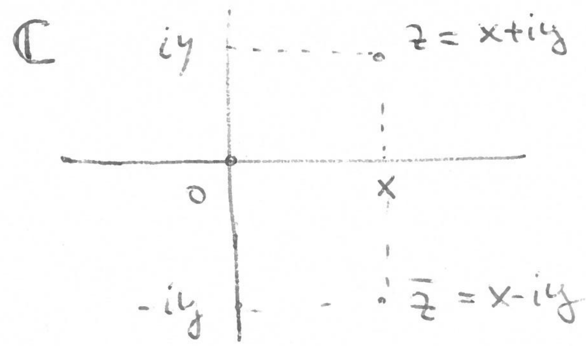
Практика 1

Комплексные числа и простейшие комплексные отображения



$(x,y) \rightsquigarrow z = x+iy$

$x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$

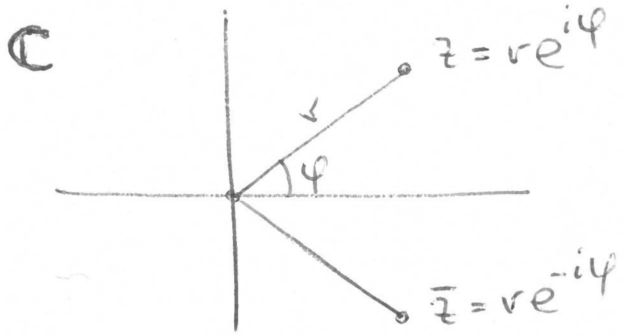
$y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

$\bar z = x - iy\,, \quad |z|^2 = z\cdot \bar z = x^2+y^2$

сложение, умножение — естественным образом, $i^2 = -1$, $iy_1 + iy_2 = i(y_1+y_2)$

$(iy_1)x_1 = ix_1y_1, \dots$

декартова форма записи комплексных чисел



$(r,\varphi) \rightsquigarrow z = re^{i\varphi}$

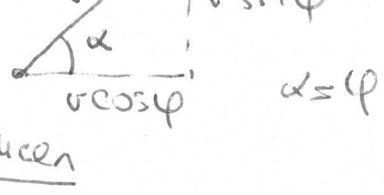
$r \geq 0$ — полярный радиус

$\varphi \in [0, 2\pi)$ — главная ветвь* аргумента (можно рассматривать и другие ветви, об этом — позже)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, если $\varphi \in \mathbb{R}$, то $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ совпадают с обычными тригонометрич. функциями.

В частности, $|e^{i\varphi}|^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, $r = |z|$, φ — это угол с осью OX (как и ожидалось)



полярная форма записи комп-х чисел

Упражнение: нарисуйте множество

1) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$

2) $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$

3) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) > 0\}$

4) $\{z \in \mathbb{C} : z^8 = 256\}$

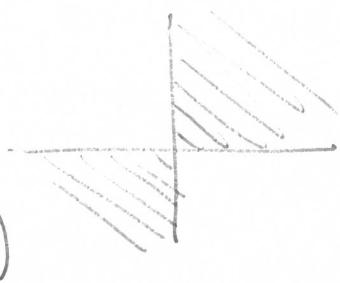
5) $\{z \in \mathbb{C} : z = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$

Решение 3:

$z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$

$\sin 2\varphi > 0 \iff$

$\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$



Упражнение Упростите выражение: 1) $\sum_{k=0}^{N} \cos(kx) = \dfrac{\sin\alpha_1 x \cos\alpha_2 x}{\sin\alpha_3 x}$

2) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) = ?$ $\quad \operatorname{Re}\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) = ?$ (в терминах $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$)

3) Выразите $\cosh x$, $\operatorname{sh} x$ через $\sin z$, $\cos z$ для подходящих z

4) Докажите, что $\sin z$, $\cos z$ не ограничены в $\mathbb{C}$ по модулю

5) Докажите, что $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$

Упражнение Найдите образы множеств Ω под действием отображений f:

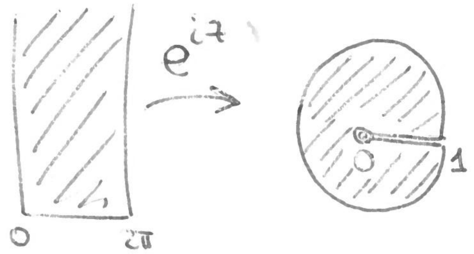
1) $f = iz$, $\Omega = \mathbb{C}_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$

2) $f = z^3$, $\Omega = \{z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in (0, \varphi_0)\}$

3) $f = e^{iz}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ решение



4) $f = \dfrac{z-i}{z+i}$, $\Omega = \mathbb{C}_+$

5) $f = \sqrt{z}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$

$\left(\sqrt{re^{i\varphi}} := \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2}\right)$

6) $f = -z$, $\Omega = \{\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$

7) $f = \overline{z}$, $\Omega = \{\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$

8*) Докажите, что отображения вида $\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ переводят прямые и окружности в прямые и окружности.

Практика 2

Аналитические функции в картинках

Ω_1, Ω_2 — области в $\mathbb{C}$, $f: \Omega_1 \to \Omega_2$

Опр f — аналитическая, если выполнено одно из равносильных условий:

1) $\forall z_0 \in \Omega_1 \ \exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ в окр-ти $\forall z_0 \in \Omega_1$, ряд сх-ся абсолютно

3) Если $u(x,y) = Re(f(x+iy))$, $v(x,y) = Im(f(x+iy))$, $(x,y) \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$

то $u, v \in C^1(\Omega_1)$ и $\left.\begin{matrix} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{matrix}\right\}$ условие Коши-Римана

4) $f\,dz$ — замкнутая форма в Ω_1, т.е. $\forall$ кусочно-гладких путей γ_1, γ_2 гомотопных в Ω_1 и имеющих общее начало и общий конец $\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$ $\quad (dz = dx + i\,dy)$

Примеры:

$f(z) = z$ — аналитическая, $f(z) = \bar{z}$ — не аналитическая $\left(u'_x = 1 \neq -1 = v'_y\right)$

многочлены от z, e^z, $\sin z$, $\cos z$ — аналитические, аналитические функции можно складывать, умножать, рассматр-ть суперпозицию, делить (если нет нулей в области)

Опр $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ — конф., если f — ан-я биекция Ω_1 на Ω_2.

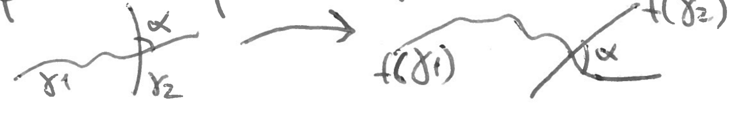
Пример $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ — конф. от-е $\Omega_1 = \mathbb{C}_+$ на $\Omega_2 = \mathbb{D}$

Проверка $f(z_1) = f(z_2) \iff (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_1 + i)(z_2 - i) \iff z_1 z_2 + 1 + i(z_1 - z_2) = z_2 z_1 + 1 + i(z_2 - z_1) \iff z_1 = z_2$

$\Rightarrow f$ — инъективна, кроме того, $\forall w \in \mathbb{D} \ \exists z: w = \dfrac{z-i}{z+i}$ (выразить z через w) и $|w| < 1 \iff |z+i|^2 > |z-i|^2 \iff |z|^2 + 1 + 2Re(z \cdot \bar{i}) > |z|^2 - 2Re(z \cdot \bar{i}) + 1 \iff Re(z \cdot \bar{i}) > 0 \iff Im\, z > 0$

$\Rightarrow f$ — сюрьективна

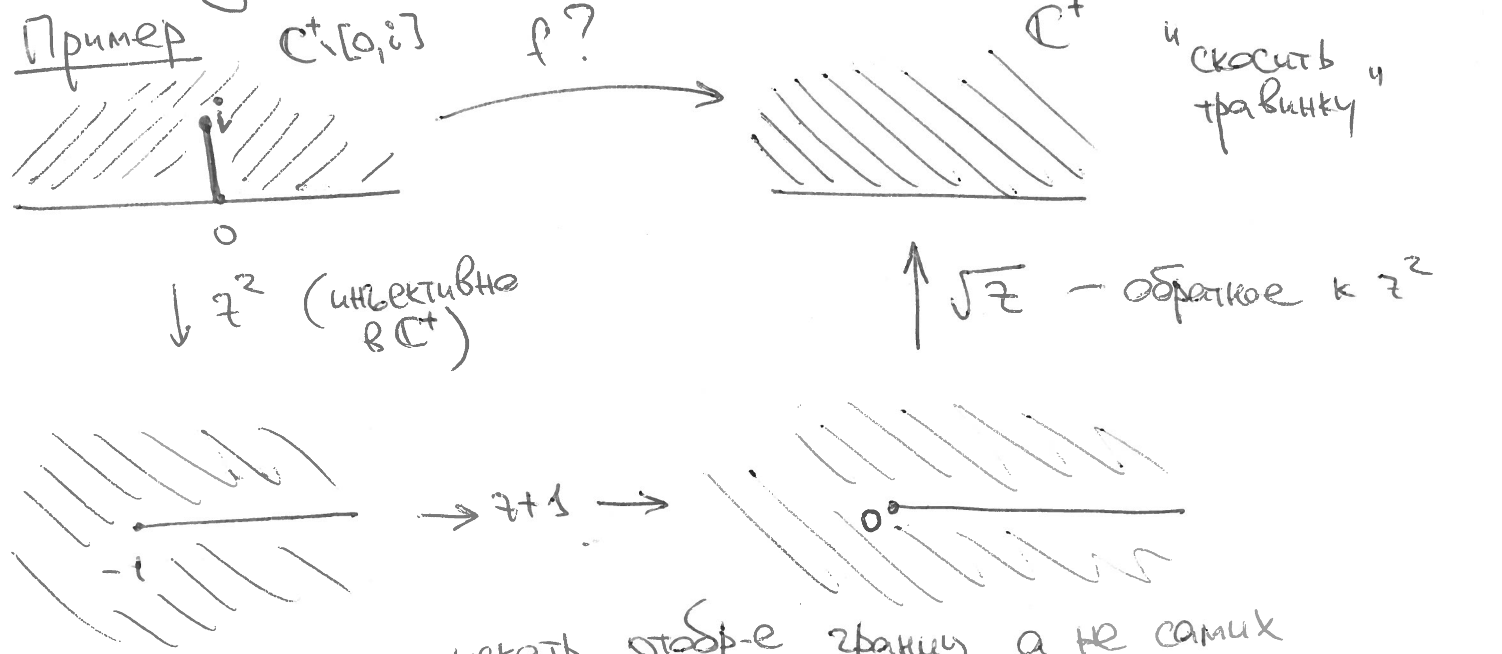
Замечание конф-е отобр-е сохр-т углы между кривыми



Теорема Римана Если Ω_1, Ω_2 — односвязные области, $\Omega_1, \Omega_2 \neq \mathbb{C}$, то $\exists f$ — конф. отобр-е Ω_1 на Ω_2

Как на практике искать f из теоремы Римана? Надо пытаться переводить $\partial\Omega_1$ в $\partial\Omega_2$ (это проще, так как понижает размерность задачи). Явный ответ возможен только для очень хороших (простых) областей.

Пример

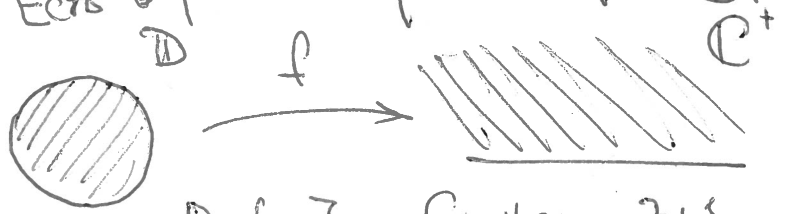


Почему разумно искать отобр-е границ, а не самих областей? Есть такой общий факт:

Теорема Каратеодори Пусть Ω_1 — область в $\mathbb{C}$: $\partial\Omega_1$ $(=\overline{\Omega}\setminus\Omega)$ — это непр-й инъективный образ $\mathbb{T}=\{|z|=1\}$. Пусть $f:\Omega_1\to\mathbb{C}$ — инъективное аналитич. от-е, $\Omega_2=f(\Omega_1)$. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{\Omega_1}$ на $\overline{\Omega_2}$, причём $f(\partial\Omega_1)=\partial\Omega_2$.

Замечание Есть вариант теоремы Каратеодори в $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

Пример



Ищем $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Скажем, $i\frac{z+1}{z-1}$ подойдёт.

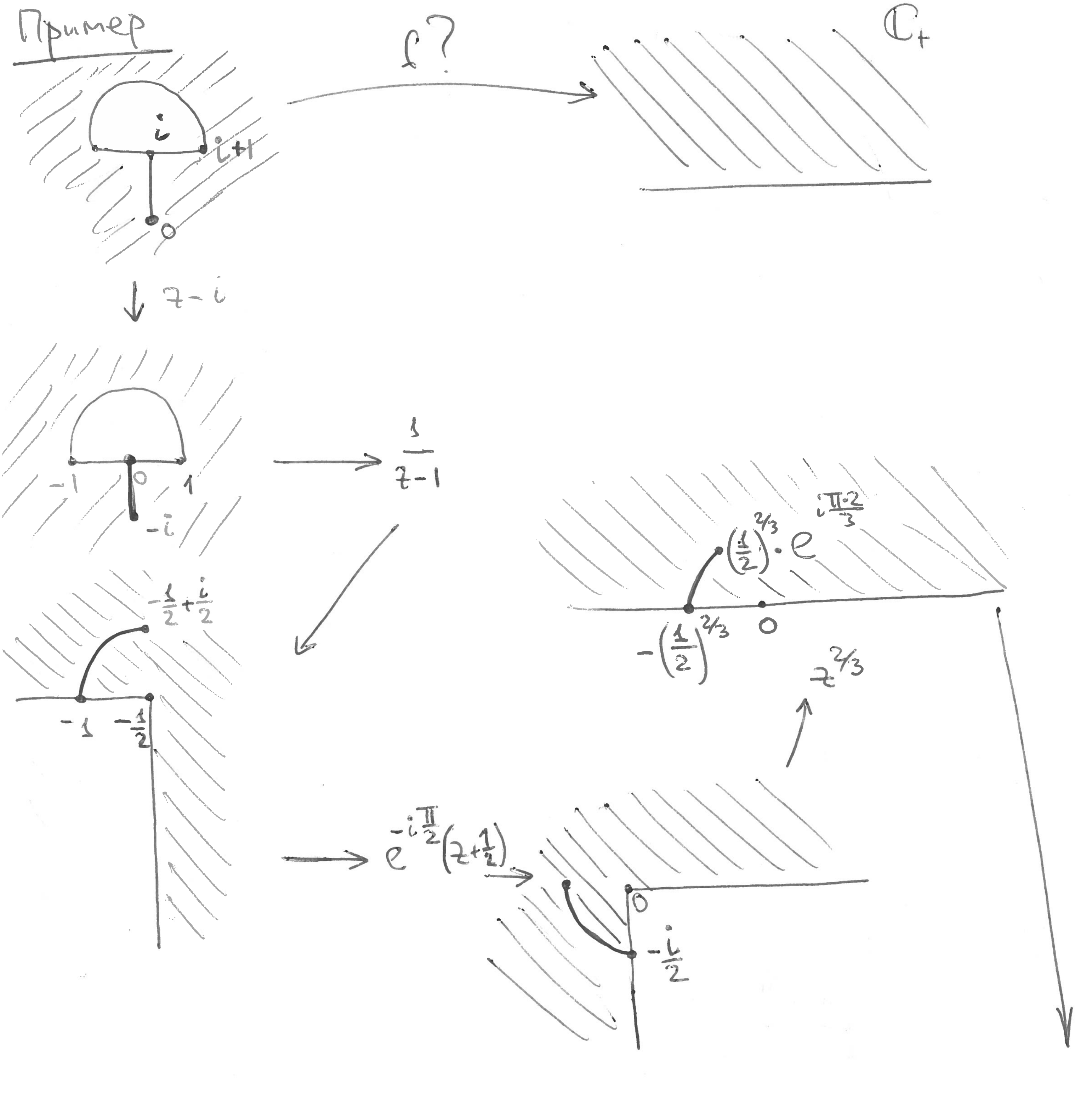
Дробно-линейные отображения: $f: z \longrightarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$

$f(-d/c)=\{\infty\}$, можно считать, что $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$.

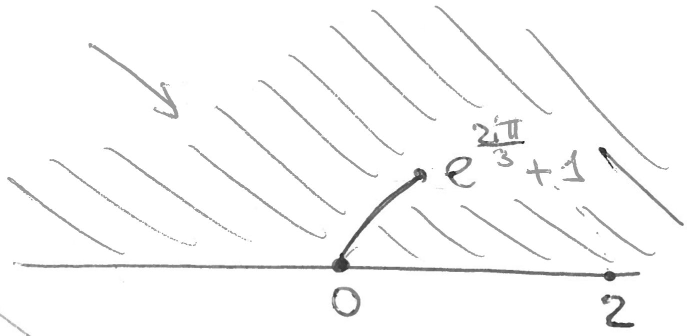
Свойства

1) {автоморфизмы $\hat{\mathbb{C}}$} = {дробно-лин-е отображения}
2) группа относительно операции суперпозиции
3) прямые и окр-ти переводятся в прямые и окр-ти
4) сохраняют углы между кривыми в $\hat{\mathbb{C}}$.

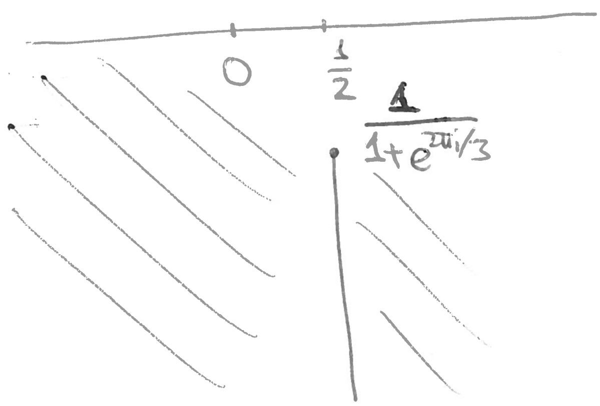
Пример



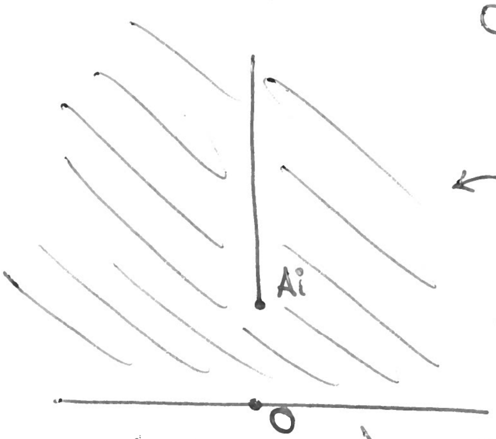
$\longrightarrow 2^{2/3} \cdot z + 1$



$\longrightarrow \frac{1}{z} \longrightarrow$



$\longleftarrow -\left(z-\frac{1}{2}\right) \longleftarrow$

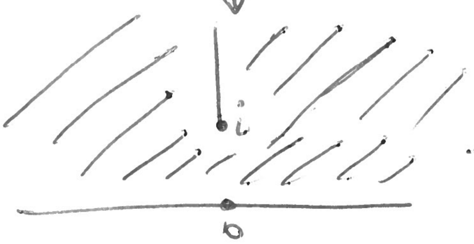


$$Ai = -\left(\frac{1}{1+e^{\frac{2\pi i}{3}}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

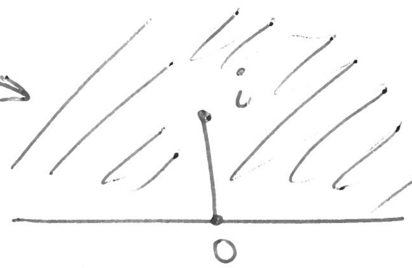
$\downarrow$

$\frac{2}{\sqrt{3}}z$

$\downarrow$

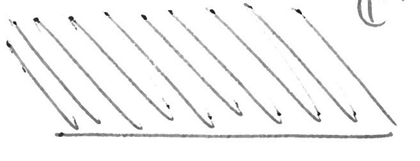


$\longrightarrow -\frac{1}{z} \longrightarrow$



$\longrightarrow$

$\longrightarrow \sqrt{z^2+1} \longrightarrow$

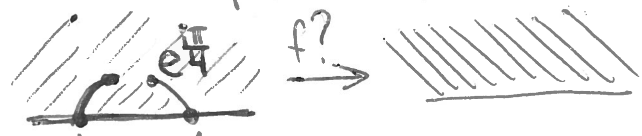


как в примере „скосить травинку"

Д/З: 1) Найти образ $f(\mathbb{D})$ для $f=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

(„свести мосты")

2)



Практика 3

Отображение Жуковского

Опр $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

Задача: f конформно отображает $\mathbb{D}$ на $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$

инъективность: $f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \Leftrightarrow$ или $z_1 = z_2$ или $z_1 \cdot z_2 = 1$, но $|z_1 \cdot z_2| < 1$ для $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

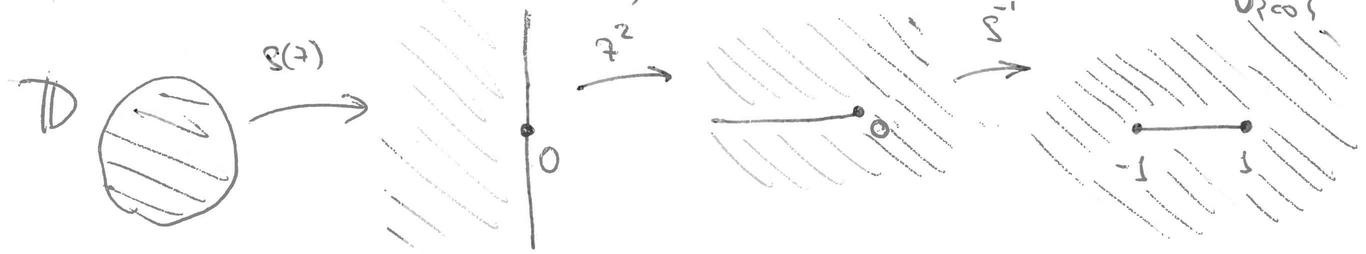
Угадаем образ $\mathbb{D}$, посмотрев на $f(\partial\mathbb{D})$:

$f(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cos\varphi \in [-1, 1]$ $\Rightarrow$ похоже, что $f(\mathbb{D}) = \hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$

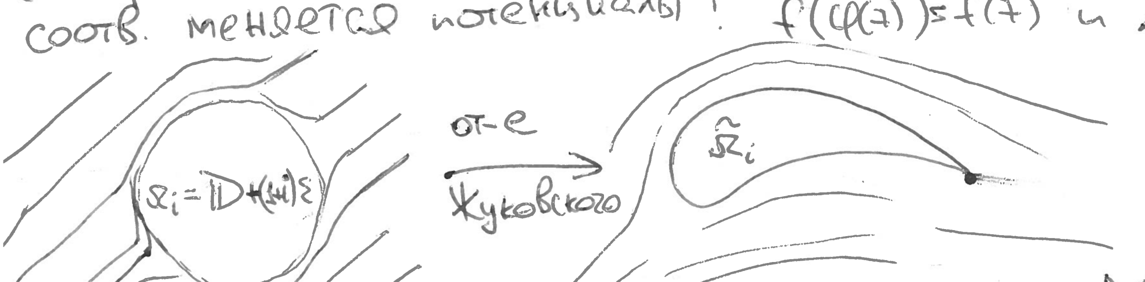
Чтобы это доказать, представим f в виде $f = S^{-1} \circ z^2 \circ S$

где $S(z) = \frac{z-1}{z+1}$: $-\frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 - 1} = -\frac{(z-1)^2 + (z+1)^2}{(z-1)^2 - (z+1)^2} = -\frac{2z^2 + 2}{-4z} = f(z)$

$S^{-1}(w) = -\frac{w+1}{w-1}$



Замечание В гидродинамике теория конф-х отобр-й применяется следующим образом. Пусть Ω_e – внешняя жорданова область, $V = V_x + iV_y$ – поле скоростей жидкости/газа обтекающей внутреннюю жорданову область Ω_i. Тогда $g = V_x - iV_y$ – аналитич. функция и $\exists f: f' = g$ – потенциал поля скоростей, в терминах которого записываются основные объекты гидродинамики. Например, $\{\operatorname{Im} f = C\}$ – линии тока, $\{\operatorname{Re} f = C\}$ – эквипотенциальные линии. Если Ω_e меняется (отображается) конформным образом на $\tilde{\Omega}_e = \varphi(\Omega_e)$, то соотв. меняется потенциалы: $\tilde{f}(\varphi(z)) = f(z)$ и линии тока:



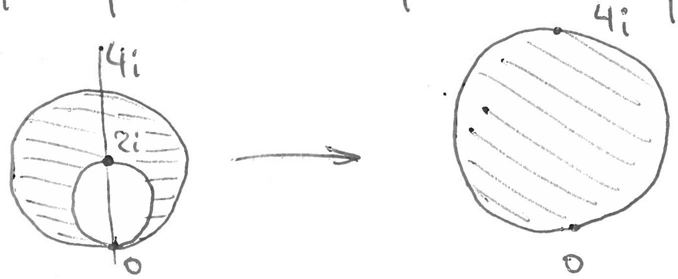
(это позволяет вычислять линии тока и другие величины)

Ref: Шабунин, Половинкин, Карл

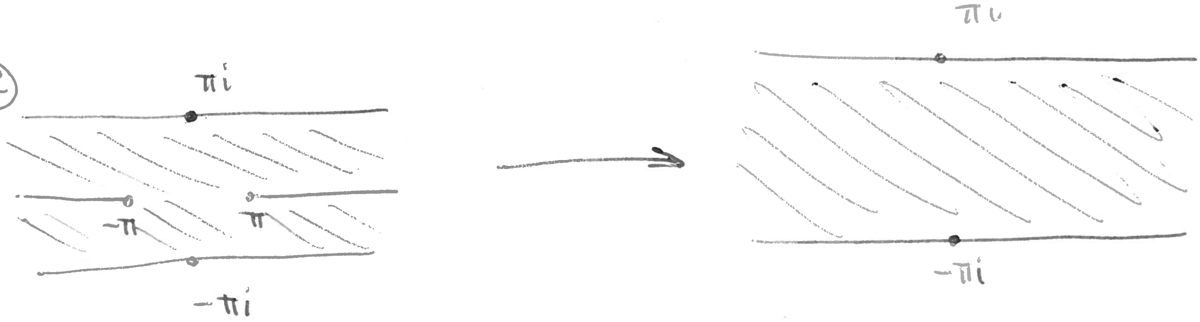
На дом: докажите, что $f(\mathbb{C}_+) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ для отображение Жуковского

Примеры на конформные отображения:

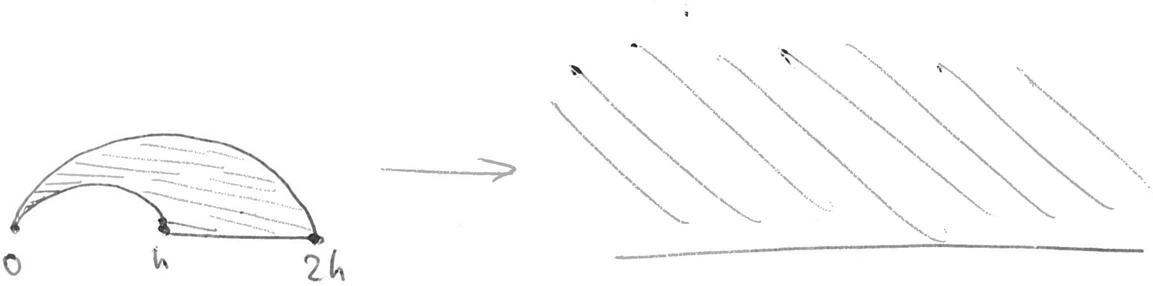
1



2

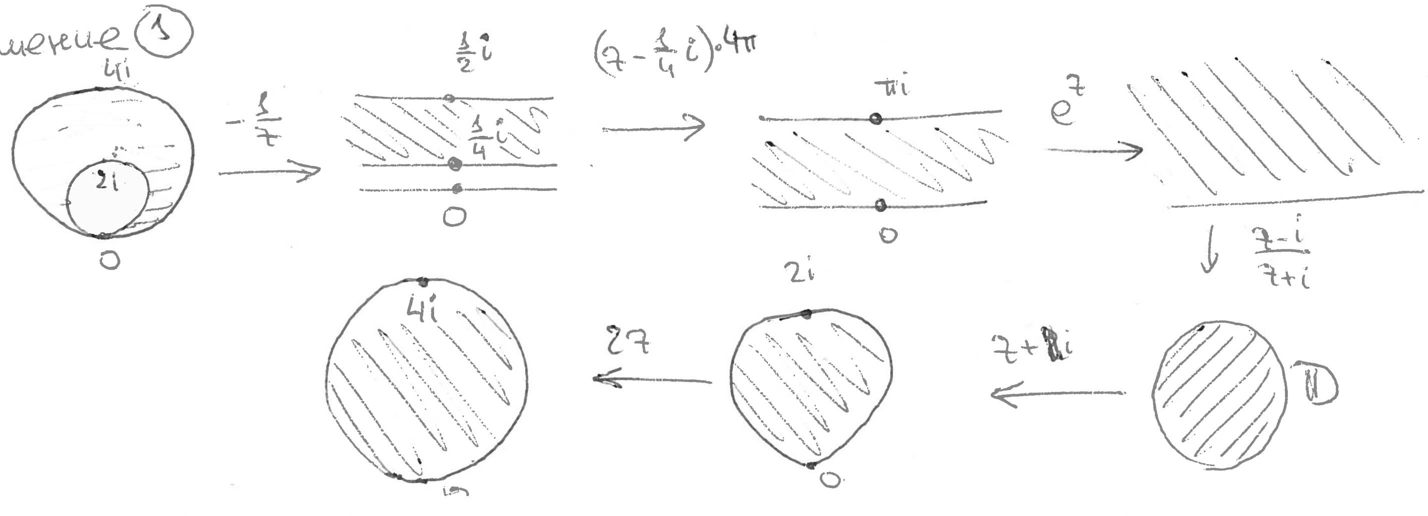


3

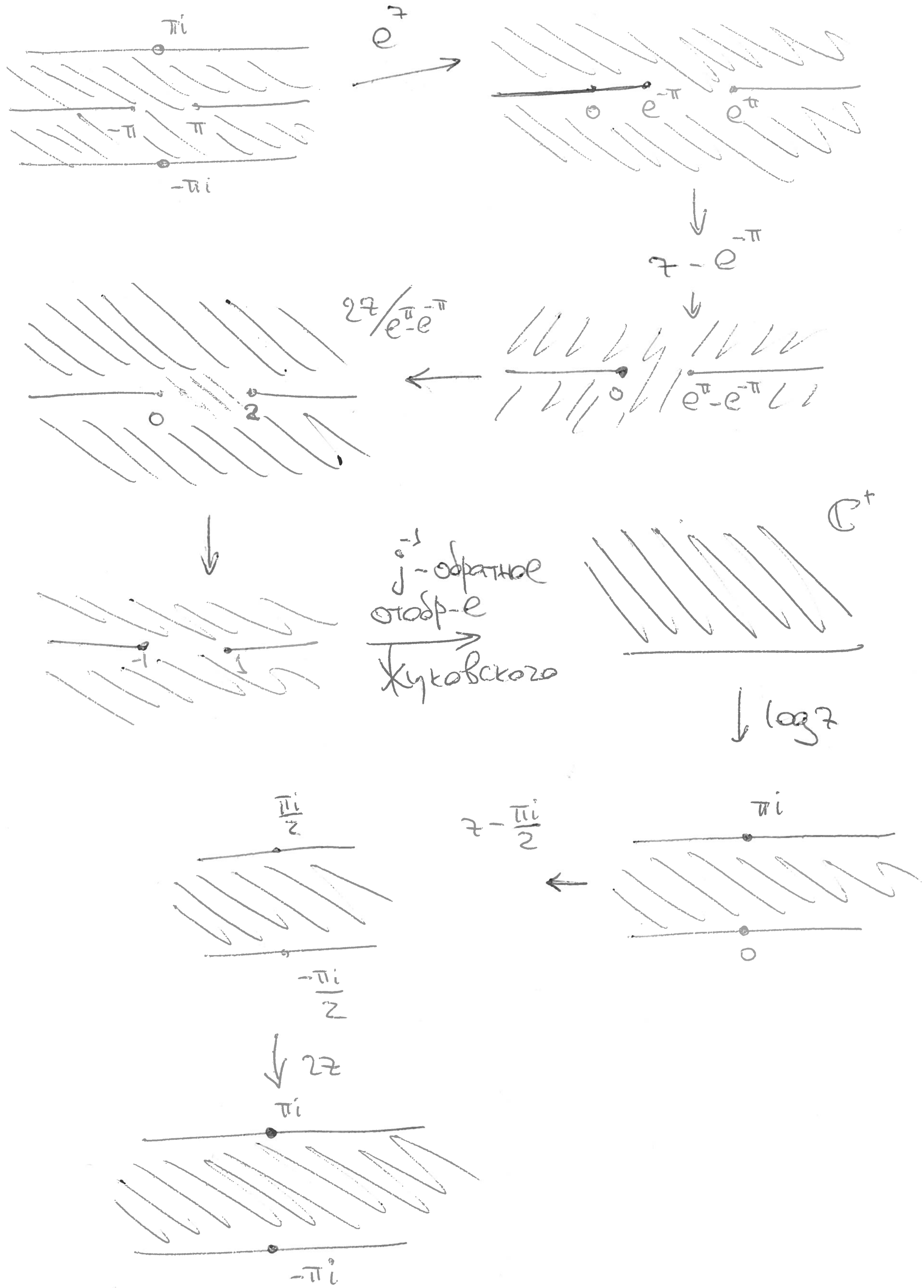


4

Решение 1

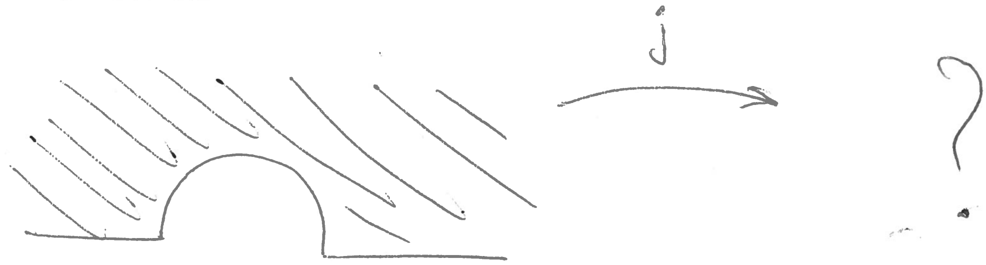


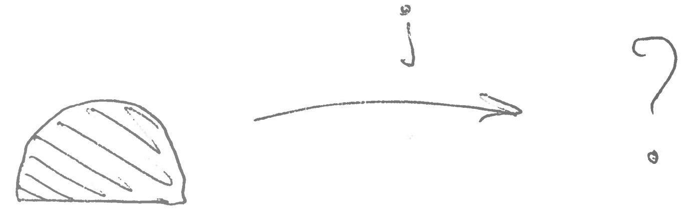
Решение (2)

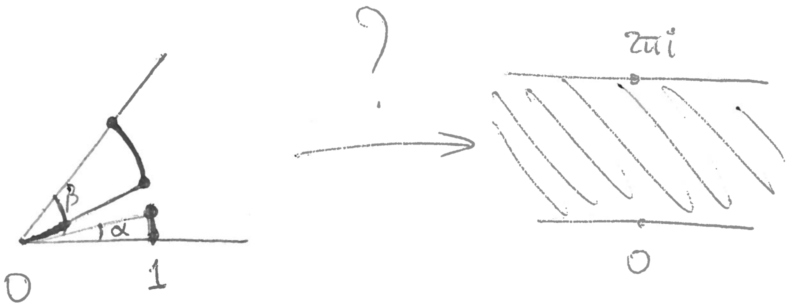


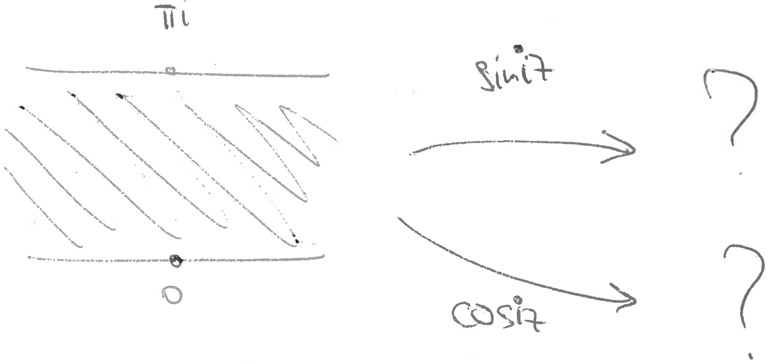
πi
−π
π
−πi
e^z
0
e^{−π}
e^{π}
z − e^{−π}
e^π − e^{−π}
2z/(e^π − e^{−π})
0
2
−1
1
j^{−1} - обратное отобр-е Жуковского
ℂ^+
log z
z − πi/2
πi/2
−πi/2
0
2z
πi
−πi

Домашнее задание

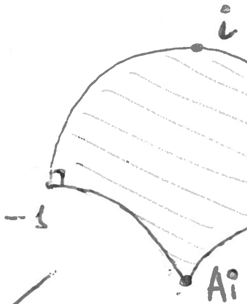


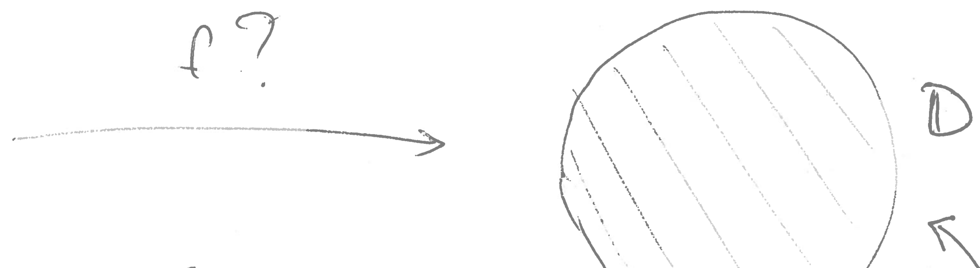






Домашнее задание № 1: разбор





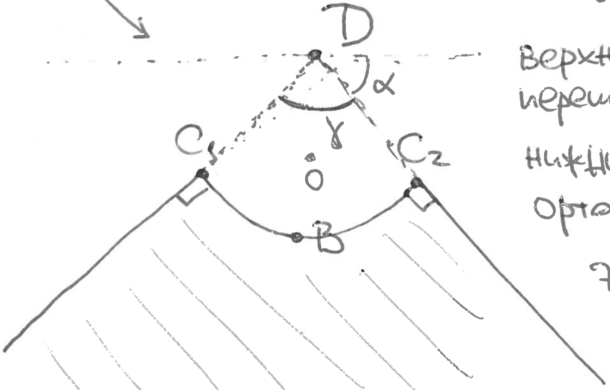
$\mathbb{D} \cap B^c[-1-2i, 2] \cap B^c[1-2i, 2]$

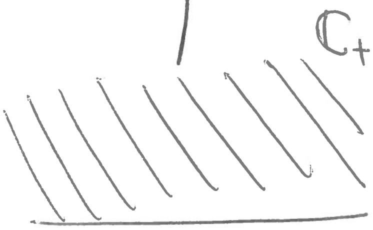
Ai – точка пересечения окружностей $|z+1+2i|=2$, $|z-1+2i|=2$ лежащая ближе к началу координат, $A<0$.

$\frac{1}{z-Ai}$

$\frac{z-i}{z+i}$

$B = \frac{1}{i-Ai} = \frac{-i}{1+|A|}$





Верхняя окружность перешла в окружность ⊥ мнимой оси

нижние окружности – в прямые ортогональные верхней

$z=0$ перешло в $-\frac{i}{|A|}$

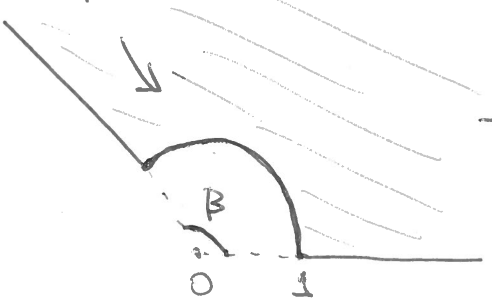
$C_1 = \frac{1}{-1-Ai} = \frac{-1+Ai}{1+A^2}$

$C_2 = \frac{1}{1-Ai} = \frac{1+Ai}{1+A^2}$

D = образ $\tilde{A}i$ – точки пересечения $|z+1+2i|=2$, $|z-1+2i|=2$ лежащей дальше от начала координат, т.е. $D = \frac{1}{\tilde{A}i-Ai} = \frac{-i}{\tilde{A}-A} = \frac{i}{|\tilde{A}-A|}$

Положим $R=|D-C_1|=|D-C_2|$, α – угол как на картинке ($\alpha>0$)

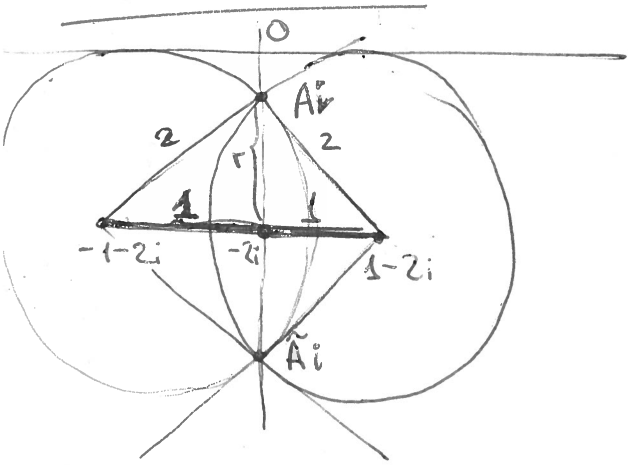
$\frac{(z-D)\cdot e^{-i\alpha}}{R}$



$\to z^{\pi/\beta} \to$

$\beta = \pi - 2\alpha$

Вычисления точек!



$$r^2+1^2=2^2$$

$$r=\sqrt{3}$$

$$A=-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-2$$

$$\tilde{A}=-(2+\sqrt{3})$$

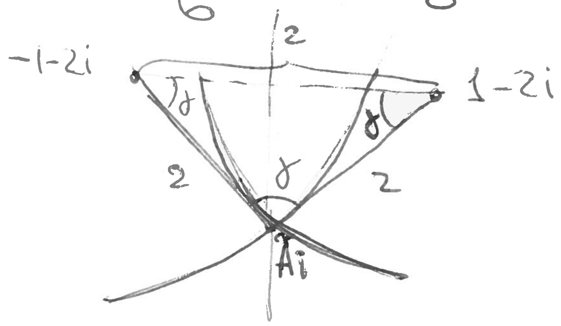
$$D=\frac{i}{|\tilde{A}-A|}=\frac{i}{2\sqrt{3}}$$

$$C_1=\frac{-1+Ai}{1+(\sqrt{3}-2)^2}=\frac{-1+(\sqrt{3}-2)i}{1-4\sqrt{3}+3+4}=\frac{-1+(\sqrt{3}-2)i}{8-4\sqrt{3}}$$

$$R^2=|D-C_1|^2=\left|\frac{i}{2\sqrt{3}}-\frac{(\sqrt{3}-2)i}{8-4\sqrt{3}}+\frac{1}{8-4\sqrt{3}}\right|^2=\left|\frac{i}{2\sqrt{3}}+\frac{i}{4}-\frac{1}{8-4\sqrt{3}}\right|^2=$$

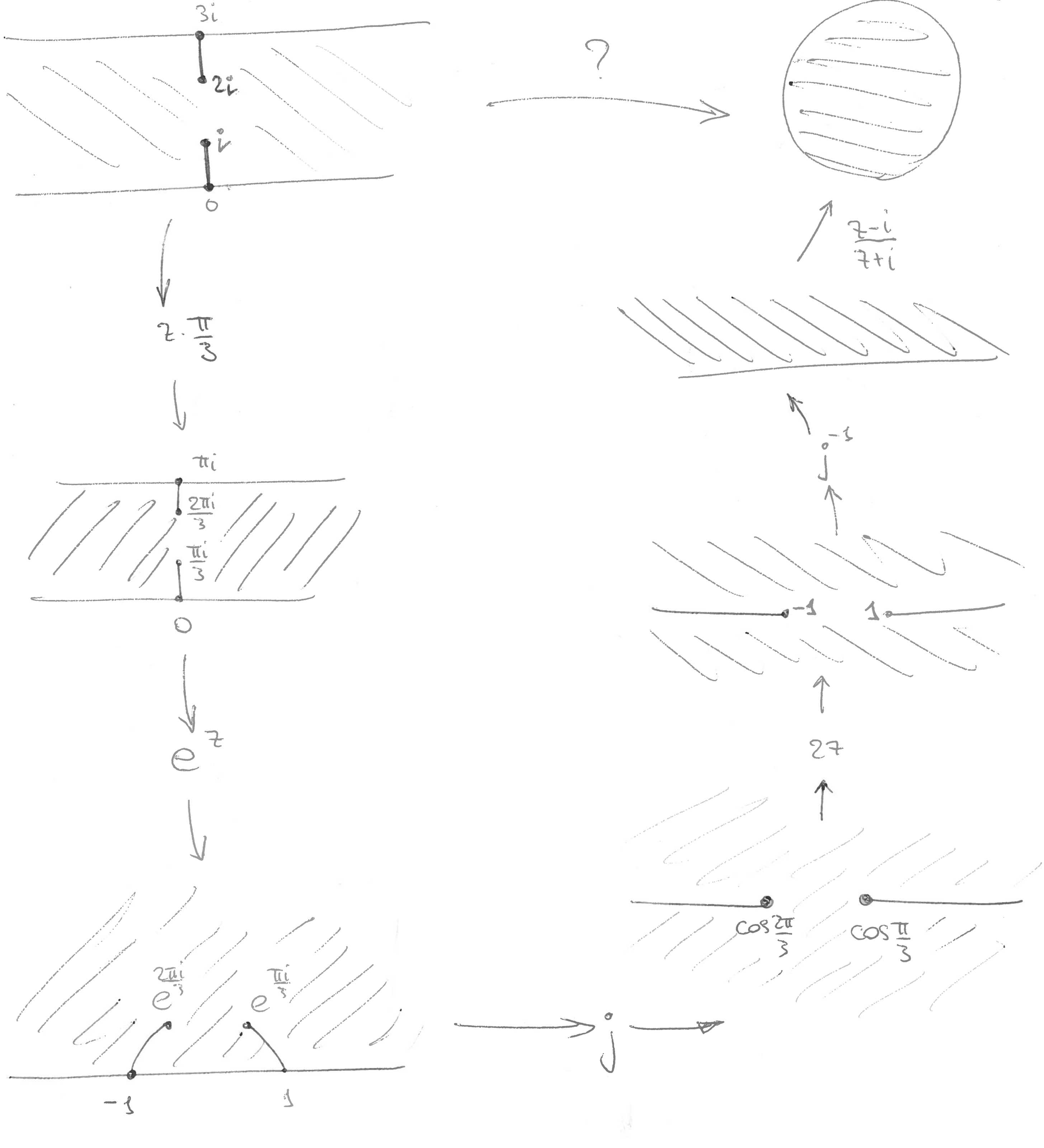
$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{(8-4\sqrt{3})^2}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{6},\quad \beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{2\pi}{3}$$

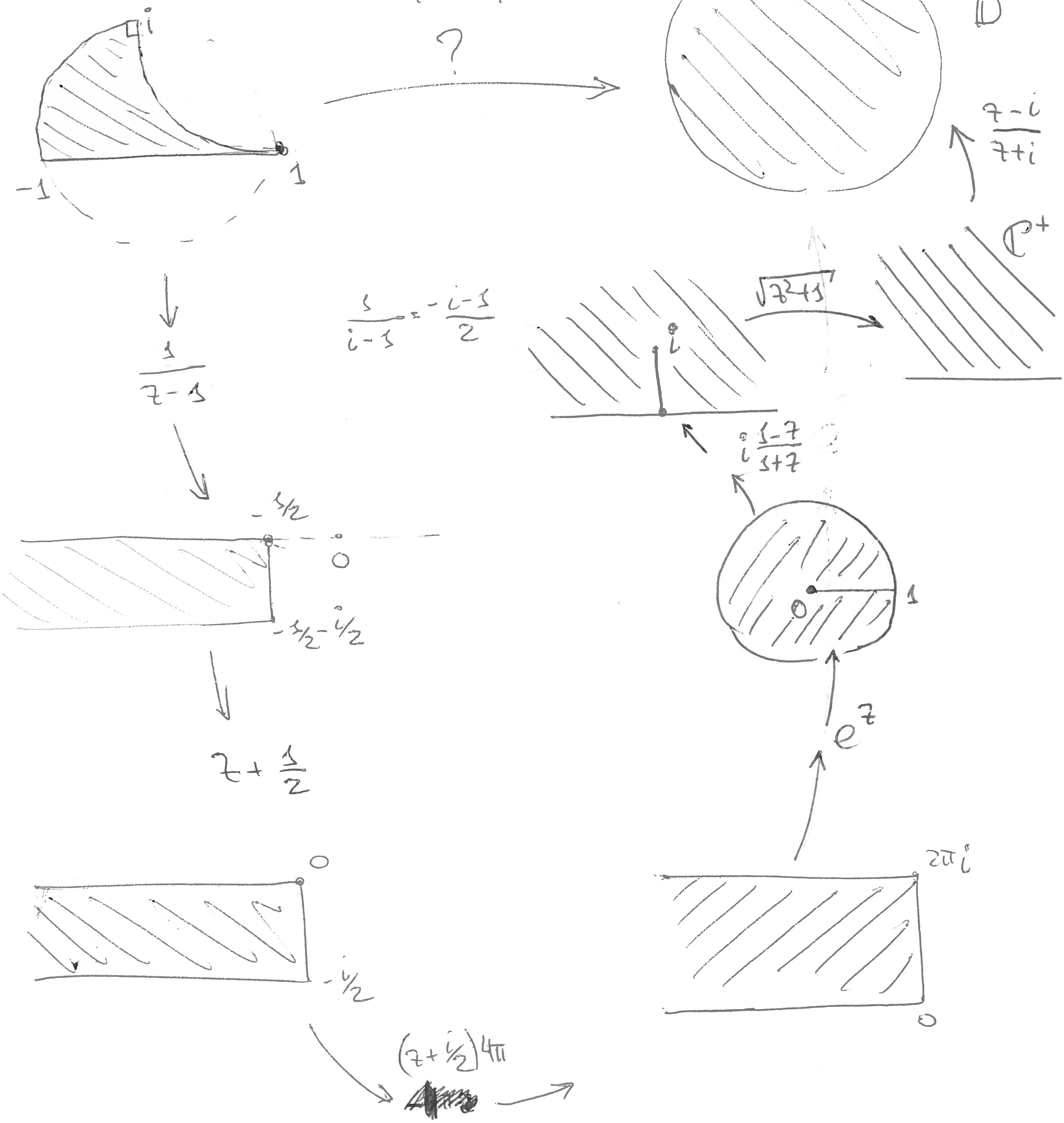


Самостоятельная 22Б01, разбор

D



Самостоятельная 22Б02, разбор



Практика 4

Логарифм и аргумент аналитической функции. Особые точки и их тип.

Опр Пусть Ω - область, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ - аналитическая фун-я.

Многозначный логарифм: $\mathrm{Log} f$ - сем-во фун-й, т.ч. $e^h = f$ $\forall h \in \mathrm{Log} f$

Многозначный аргумент: $\mathrm{Arg} f$ - сем-во фун-й, т.ч. $e^{ig}|f| = f$ $\forall g \in \mathrm{Arg} f$

Многозначный логарифм и аргумент определён для $\forall \Omega$ и $\forall f: f(a) \neq 0$ в Ω, причём $\mathrm{Arg} f = \mathrm{Im} \, \mathrm{Log} f$ (как множества)

Аналитический логарифм (аналитическая ветвь логарифма) — любая аналитическая функция семейства $\mathrm{Log} f$.

Непрерывный аргумент (непрерывная ветвь аргумента) — любая непрерывная функция семейства $\mathrm{Arg} f$

Теорема Если Ω - односвязная область, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ - не имеет нулей в Ω, то $\exists \log f$ - аналитическая ветвь логарифма f в Ω. Более того, $\forall$ 2 ветви отличаются в Ω на $2\pi k i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример: в области $\Omega = \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ определена аналитическая фун-я F: $F^2 = z^2+1$

Действительно, $F := \exp\left(\frac{1}{2} \log(z^2+1)\right)$, где $\log(z^2+1)$ - аналитич. ветвь логарифма для z^2+1. Заметим, что $z^2+1 \neq 0$ если $\mathrm{Re}\, z > 0$ так что всё корректно.

Пример: в области $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-\infty i, -i] \cup [i, +\infty i])$ определена аналитическая функция F: $\mathrm{tg}(F(z)) = z$.

Действительно, $\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$ $\Longleftrightarrow$ если $\mathrm{tg}\, z = w$ то

$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}$, $z = \frac{1}{2i} \mathrm{Log} \frac{1+iw}{1-iw}$. В односвязной области

Ω: 

$\mathrm{Log} \frac{1+iw}{1-iw}$ имеет аналитическую ветвь.

Дальнейшая цель: разобраться, почему в области $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$
$\exists$-ет аналитическая ветвь корня $\sqrt{1-z^2}$, но $\nexists$ аналитической ветви $\sqrt[3]{1-z^2}$

Опр Пусть $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ аналитич. фун-я, где $a \in \Omega$. Тогда $a \in \Omega$ называется изолированной особой точкой функции f

Типы изолир-х особых точек:

1) устранимая особая точка — когда $\sup_{\mathring{U}} |f(z)| < \infty$ для нек. $\mathring{U}$ — проколотой окр-ти a.
— можно доопр-ть до ан-й фун-и в Ω.

2) полюс порядка n — когда $\frac{1}{f}$ имеет устранимую особую точку a, причём после устранения она является корнем кратности n, то есть $\frac{1}{f} = (z-a)^n g$, где g опр-на и аналитична в Ω', $g(a) \neq 0$ ($\Omega' \subset \Omega$; $a \in \Omega'$)

Критерий: $f = O(|z-a|^{-n})$, причём n — такое минимальное число

3) существенно особая точка — когда особая точка, но не 1) или 2)

Примеры $\frac{\sin z}{z}$ имеет устранимую особую точку $z=0$

$\frac{1}{1-\cos z}$ имеет полюса второго порядка в точках $z = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, $z = -2\pi, -4\pi, \dots$

$e^{1/z}$ имеет существенно особую точку $z=0$.

Опр Пусть γ — путь в Ω ($\gamma \in C([0,1] \to \Omega)$). Аргумент (непр-й) фун-и f вдоль γ — это отображение $\psi \in C([0,1], \mathbb{R})$ т.ч. $e^{i\psi(t)} |f(\gamma(t))| = f(\gamma(t))$ на $[0,1]$. Определён $\forall f \in C(\Omega)$: $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \gamma([0,1])$.

Опр Изменение аргумента f вдоль γ: $\Delta_\gamma \arg_\gamma f = \psi(1) - \psi(0)$
— не зависит от выбора ветви $\psi = \arg_\gamma f$.

Теорема (принцип аргумента) Пусть Ω — область: Ω — ограничена, $\partial\Omega = \bigcup_1 \gamma_k$ где γ_k — простые замкнутые кусочно-гладкие пути, проходимые так, чтобы область оставалась слева при обходе, f — определена и аналитична в окр-ти $\Omega_\delta = \Omega + B(0,\delta)$ за исключением конечного числа полюсов в Ω. Тогда

$$\Delta_{\partial\Omega} \arg f = \sum \Delta_{\gamma_k} \arg_{\gamma_k} f = 2\pi(N_f - P_f)$$

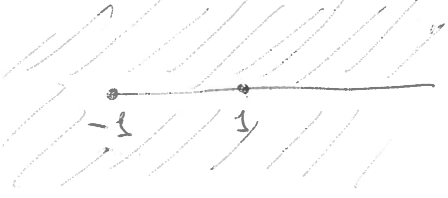
где N_f — число нулей с учетом кратности, P_f — число полюсов с учетом кратности

Практика 5

Регулярные ветви аналитических функций

Пример В области $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ $\exists f \in Hol(\Omega) : f^2 = z^2 - 1$.

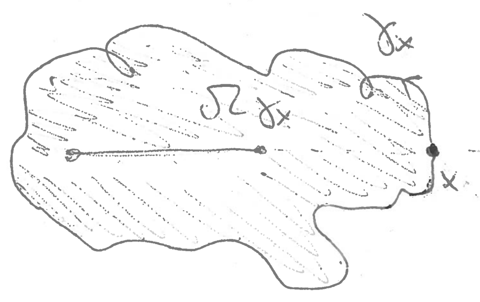
Подробный разбор: Рассмотрим $\Omega' = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty)$ – односвязную область, в ней $f := \exp\left(\frac{1}{2}\log(z^2-1)\right)$, где $\log(z^2-1)$ – – аналитич. ветвь логарифма z^2-1 ($\exists$-ет в силу односвязности)



По лемме об устранении особенности ($f \in Hol(\tilde{\Omega} \setminus I)$ & $f \in C(\tilde{\Omega})$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f \in Hol(\tilde{\Omega})$, см. задачу №4 листка 1) достаточно проверить, что f продолжается до функции $f \in C(\Omega)$. Заметим, что

$$f = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)} = e^{\frac{1}{2}\log|z^2-1| + \frac{i}{2}\arg(z^2-1)}$$

и $\log|z^2-1| = \ln|z^2-1|$ – непр-но продолжается в Ω. Значит, достаточно показать, что $g := e^{\frac{i}{2}\arg(z^2-1)}$ непр-но пр-ся. Для этого возьмём $\forall$ кусочно-гладкий путь γ_x в Ω из Ω'. и проверим, что $\exists \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g(\gamma_x(t)) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} g(\gamma_x(t))$



($\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_x(0) = \gamma_x(1) = x > 1$, $\gamma_x(0,1) \subset \Omega'$)

– этого достаточно для проверки непр-ти g

Можно считать, что γ_x – простой (срежем лишнее), обозначим $\psi(t) : [0,1] \to \Omega$ – аргумент z^2-1 вдоль γ_x. Тогда (считаем $\psi = \arg(z^2-1)$ в Ω')

$\lim\limits_{t\to 0} g(\gamma_x(t)) = e^{\frac{i}{2}\psi(0)}$, $\lim\limits_{t\to 1} g(\gamma_x(t)) = e^{\frac{i}{2}\psi(1)}$ и эти пределы равны $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\psi(1) - \psi(0)) = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. По принципу аргумента, $\psi(1) - \psi(0) = \Delta \arg_{\gamma_x}(z^2-1) = 2\pi(N_{z^2-1} - P_{z^2-1})$

где $N_{z^2-1} = 2$ – количество нулей в Ω_{γ_x}
$P_{z^2-1} = 0$ – количество полюсов Ω_{γ_x} } с учётом кр-ти.

Итого, получаем, что для непр-ти g достаточное (и необходимое, в действительности) условие заключается в том, что $\frac{1}{2}2\pi\cdot 2 = 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Такое $k\in\mathbb{Z}$ — существует ($k=1$), таким образом $\exists\ \sqrt{z^2-1}\in Hol(\Omega)$.

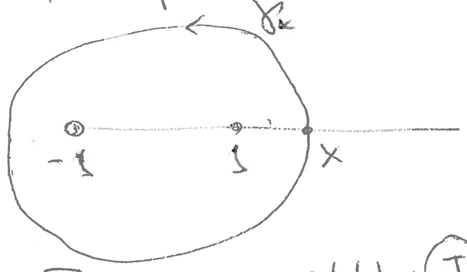
<u>Пример</u> В области $\Omega=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ $\nexists$ регулярной ветви $\sqrt[3]{z^2-1}$. Действительно, если такая ветвь есть, то в $\Omega'=\mathbb{C}\setminus[-1,\infty)$ она совпадает с $e^{\frac{1}{3}\log(z^2-1)}=f$, где $\log(z^2-1)$ — какая-то аналитич. ветвь $\mathrm{Log}(z^2-1)$. Но тогда

$$g=e^{\frac{i}{3}\arg(z^2-1)}$$

— непр-на в Ω и значения на верхнем и нижнем берегу разреза совпадают, т.е.

$$\lim_{t\to 0} g(\gamma_x(t)) = \lim_{t\to 1} g(\gamma_x(t))$$

или $\frac{1}{3}(\psi(1)-\psi(0)) = 2\pi k$, где ψ — аргумент вдоль γ_x. Но тогда по принципу аргумента



$$\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = 2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z} \iff k=\frac{2}{3}\in\mathbb{Z}?!$$

— противоречие.

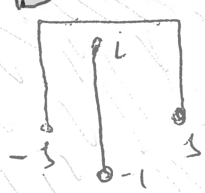
Ещё примеры: (I) В какой области $\exists \log\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)\in Hol(\Omega)$

a) $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{|z|\le 2\}$ — да

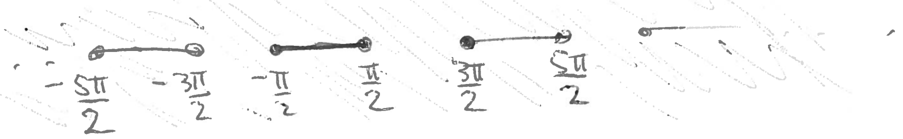
b) $\Omega=\mathbb{C}\setminus([1,i]\cup[-1,-i])$

c) $\Omega=\mathbb{D}$ — нет

d) Ω:



(II) В области



$\exists f\in Hol(\Omega):\ f^2=\cos z$

(III) В области $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ $\exists \log\left(\frac{(z-1)(z+1)^3}{(z+i)^4}\right)\in Hol(\mathbb{C}\setminus\mathbb{D})$

(считаем нули и полюса с учётом кр-ти)

IV) В области $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left(\{z : |\operatorname{Im} z| \le 1,\ \operatorname{Re} z = 0\}\right)$
$\exists\ \operatorname{arctg} z \in \operatorname{Hol}(\Omega)$, причём Ω нельзя расширить до $\tilde{\Omega}$
так, чтобы $\operatorname{arctg} z \in \operatorname{Hol}(\tilde{\Omega})$, $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, $\Omega \ne \tilde{\Omega}$.

V) $\exists\ \sqrt[3]{(z-1)(z+1)^2} \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \setminus [-1,1])$.

§ Теорема Руше

<u>Теорема</u> Пусть Ω — ограниченная область с кусочногладкой границей $\partial\Omega$, пусть $f, g \in \operatorname{Hol}(\Omega_\varepsilon)$, где $\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega} + B(0,\varepsilon)$ — окрестность $\overline{\Omega}$, пусть $|g(z)| < |f(z)|$ на $\partial\Omega$. Тогда

$$N_{f+g} = N_f \text{ в } \Omega.$$

<u>Пример:</u> $z^{10} + 3z^3 - 1 = 0$ имеет 7 корней в кольце $1 < |z| < 2$

$\Omega_2 := \{|z| < 2\}$ $\quad f_2 = z^{10},\ g_2 = 3z^3 - 1$

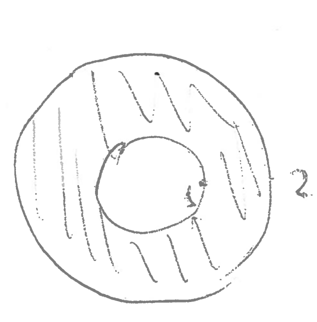
$\Omega_1 := \{|z| < 1\}$ $\quad f_1 = 3z^3,\ g_1 = z^{10} - 1$

На $\partial\Omega_2$: $|f_2| = 2^{10} > 3\cdot 8 + 1 \ge |g_2|$

На $\partial\Omega_1$: $|f_1| = 3 > 2 > |g_1|$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{f_2+g_2} = N_{f_2} = 10 \\ N_{f_1+g_1} = N_{f_1} = 3 \\ \text{На } \partial\Omega_1 \text{ корней нет } (|g_1| < |f_1|) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 \text{ корней в } \Omega_2 \\ 3 \text{ корня в } \Omega_1 \\ \text{Нет корней на } |z| = 1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

7 корней в 

<u>Пример:</u> сколько корней у ур-я
$z + \lambda - e^z = 0$ в области $\operatorname{Re} z < 0$?

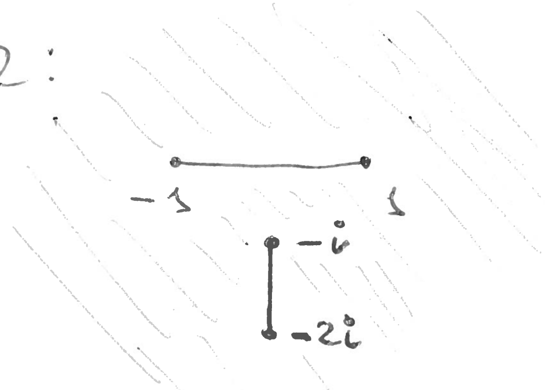
<u>Пример:</u> $z \sin z = 1$ имеет только вещ. корни.

Домашнее задание на 3 балла к понедельнику 25 марта

Найдите минимальное $k \in (1, +\infty) \cap \mathbb{Z}$ такое, что

$\exists\, f \in Hol(\Omega)$, $f^k = \dfrac{(z^3 - z)(z+i)}{z+2i}$, где

Ω:



Положить в ячейку РБ до 18:00 понедельника 25 марта

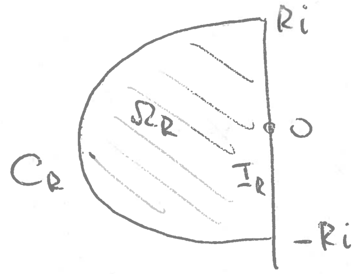
Практика 6

Задачи на теорему Руше и ряды Лорана

Пример Количество корней $z+\lambda-e^z=0$ $\left(\lambda\in(1,+\infty)\right)$

в $\{\operatorname{Re} z<0\}$ = ?

Фиксируем $R\gg 1$, рассмотрим Ω_R:



$f = z+\lambda$

$g = -e^z$

На I_R: $|z+\lambda| = |iy+\lambda| = \sqrt{\lambda^2+y^2} \geq \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1$

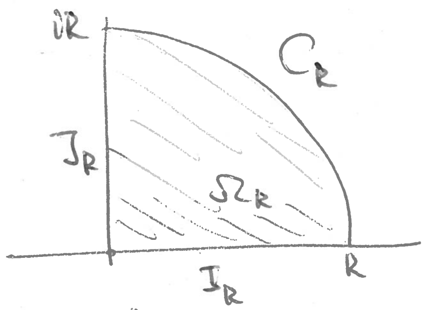
$|-e^z| = |e^{iy}| = 1$

На C_R: $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x < 1$ $(x<0)$

$|z+\lambda| \geq |z| - \lambda = R-\lambda > 1$ (при больших R)

$\Rightarrow N_{f+g}(\Omega_R) = N_f(\Omega_R) = 1$

Пример Найти число корней $z^8+4z^4+z^3+2z+3=0$ в первом квадранте



$f = z^8+4z^4+4$

$g = z^3+2z+1$

На C_R: $|f| = |z^8(1+o(1))| = R^8(1+o(1))$, $R\to\infty$

$|g| \leq 4(|z^3|+1) \leq 4(R^3+1)$ $\Rightarrow$ $|f|>|g|$ на C_R при больших R.

На I_R: $|f(x)| = x^8+4x^4+4 > \begin{cases} 4 & x\in(0,1) \\ 5x^4+3, & x\geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow |f|>|g|$ на I_R

$|g(x)| = x^3+2x+1 \leq \begin{cases} 4, & x\in(0,1) \\ 3x^4+1, & x\geq 1 \end{cases}$

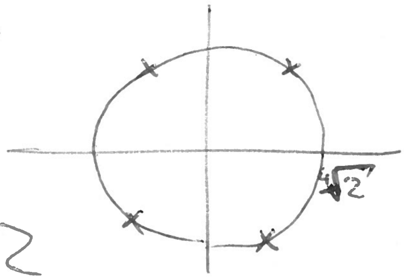
$|g(0)|<|f(0)|$

На J_R: $|g(iy)| \le g(y)$, $|f(iy)| = f(y)$ $\Rightarrow$ $|f| > |g|$ на J_R

$\Rightarrow$ $N_{f+g}(\Omega_R) = N_f(\Omega_R)$.

$z^8 + 4z^4 + 4 = (z^4+2)^2 = 0$ — нули кр-ти 2.

В Ω_R попадает 1 ноль кратности 2 $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $N_f(\Omega_R) = 2$, ответ: 2

<u>Пример</u> Доказать, что $\forall a \in \mathbb{C}$ $\forall n \ge 2$ уравнение $1 + z + az^n = 0$ имеет хотя бы 1 корень в круге $\{|z| \le 2\}$

Если все корни: $|z_k| > 2$, $k = 1, \ldots, n$, то

$a(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) = 1 + z + az^n$

$|z_1 \cdot \ldots \cdot z_n| = |a|^{-1}$ $\Rightarrow$ $|a|^{-1} > 2^n \Leftrightarrow |a| < \frac{1}{2^n}$

Итого, в случае $|a| \ge \frac{1}{2^n}$ доказывать нечего, а если $|a| < \frac{1}{2^n}$

то $f := 1 + z$, $g := az^n$, при $|z| = 2$ $|f| \ge |z| - 1 = 1$, $|g| \le |a| \cdot 2^n < 1$

$\Rightarrow$ $N_{f+g}(\{|z| \le 2\}) = N_f\{|z| \le 2\} = 1$, ok.

<u>Д/з:</u> количество корней $z^5 - 12z^2 + 14 = 0$ в правой полуплоскости

§ Ряды Лорана

<u>Теорема</u> Пусть f аналитична в кольце $\Omega_{R,r}(a) = \{r < |z-a| < R\}$, где $0 \le r < R \le +\infty$, $a \in \mathbb{C}$. Тогда $\exists! \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$$

причём ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах в $\Omega_{R,r}(a)$.

__Опр__ Коэффициент c_{-1} ряда Лорана называется вычетом функции f в точке a, обозначается через $\mathrm{res}_a f$ ("residue"). $\sum\limits_{-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ — главная часть ряда Лорана

__Примеры__ Найдём главную часть ряда Лорана функции $\mathrm{ctg}^2 z$ в кольце $\{0<|z|<\varepsilon\}$.

$$\mathrm{ctg}^2 z = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2}\left(\left(\frac{z\cos z}{\sin z}\right)^2\right)$$ $\Rightarrow$ полюс порядка 2

$$\Rightarrow \mathrm{ctg}^2 z = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots$$

В силу чётности, $c_{-1} = c_1 = 0$

$$c_{-2} = \lim_{z\to 0} z^2 \mathrm{ctg}^2 z = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z\cos z}{z}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ ответ: $\frac{1}{z^2}$

Ещё пример: разложим в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$$ в кольцах $\Omega_{0,3}(1) = \{0<|z-1|<3\}$

$\Omega_{3,\infty}(1) = \{|z-1|>3\}$

В $\Omega_{0,3}(1)$: $f(z) = \frac{-1}{z-1}\cdot\left(\frac{1}{z+2}\right)' = -\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z-1+3}\right)' =$

$$= -\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n\cdot(-1)^n}{3^n}\right)' =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^{n-2}\cdot n}{3^{n+1}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j (z-a)^j$$

$$c_j = \begin{cases} \frac{(-1)^{j+3}(j+2)}{3^{j+3}}, & j \geq -1 \\ 0, & j < -1 \end{cases}$$

В $\Omega_{3,\infty}(1)$: $f(z) = -\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{(z-1)(1+\frac{3}{z-1})}\right)' =$

$$= -\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{(z-1)^k}\right)' = -\frac{1}{z-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{(z-1)^{k+1}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k\cdot(-(k+1))}{(z-1)^{k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(-3)^k}{(z-1)^{k+3}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j (z-1)^j$$

$$c_j = \begin{cases} (-j-2)(-3)^{-j-3} & j \le -3 \\ 0 & j > -3 \end{cases}$$

<u>Пример</u> $\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+2i}$ разложим в кольце $0<|z|<\varepsilon$.

$$\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+2i} = \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+2i}\right)\frac{1}{3i} = \frac{1}{3i}\left(-\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1-z/i} - \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2i}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z/i} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2i}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{i^k} + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2i}\right)^k z^k$$

– главной части нет, т.к. ф-ция аналитична в т. $z=0$

разложим в кольце $|z|>2$:

$\frac{1}{z-i}\;\frac{1}{z+2i}$

$$\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{3i}\,\frac{1}{z(1-\frac{i}{z})} - \frac{1}{3i}\,\frac{1}{z(1+2i/z)} = \frac{1}{3i\,z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{z^k} - \sum\frac{(-2i)^k}{z^k}\right)$$

$$= \frac{1}{3i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k-(-2i)^k}{z^{k+1}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j z^j$$

$$c_j = \begin{cases} \frac{1}{3i}\left(i^{-j-1} - (-2i)^{-j-1}\right) & j \le -1 \\ 0 & j > -1 \end{cases}$$

(при $j=-1$ это тоже $=0$)

Практика 7

Теорема Коши. Вычисление интегралов

<u>Теорема</u> Пусть Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, ориентированной так, что область остаётся слева при обходе вдоль $\partial\Omega$. Пусть $E \subset \Omega$ — конечное подмножество, $f \in C(\overline{\Omega} \setminus E) \cap Hol(\Omega \setminus E)$. Тогда

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in E} \operatorname{res}_a f}$$

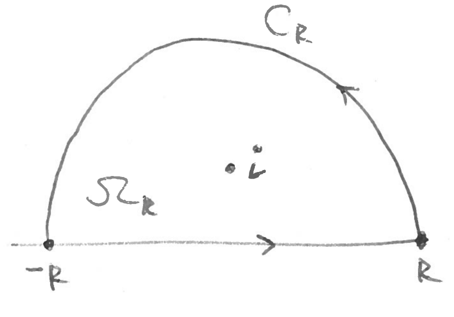
<u>Лемма Жордана</u> Пусть $\alpha > 0$, $f \in C(\overline{\mathbb{C}_+})$, $|f(z)| \to 0$ если $|z| \to \infty$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \oint\limits_{C_R} f(z) e^{i\alpha z}\,dz = 0$, где $C_R = \{|z| = R\} \cap \mathbb{C}_+$.

<u>Пример</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = ?$

Рассмотрим $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$, заметим, что $\operatorname{Re} f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$ для $x \in \mathbb{R}$.

По теореме Коши:



$$\int_{\partial\Omega_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f(z) \overset{*}{=} 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

$$\|$$

$$\int_{[-R,R]} f(x)\,dx + \underbrace{\oint_{C_R} f(z)\,dz}_{\to 0}$$

$R \to \infty$ по лемме Жордана

$$\downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$ [интеграл сх-ся по пр-ку Дирихле]

ответ

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

Как посчитали вычет? Объясним (*):

$$\operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{z+i}\cdot\frac{1}{z-i} = \frac{e^{iz}}{z+i}\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Действительно, $\dfrac{e^{iz}}{z+i} = \dfrac{e^{-1}}{2i} + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2 + \dots$

поэтому ряд Лорана имеет вид $\underbrace{\dfrac{e^{-1}}{2i}}_{\parallel}\cdot\dfrac{1}{z-i} + c_0 + \dots$

$$c_{-1} = \operatorname{res}_i\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right).$$

<u>Пример</u> $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)} = ?$

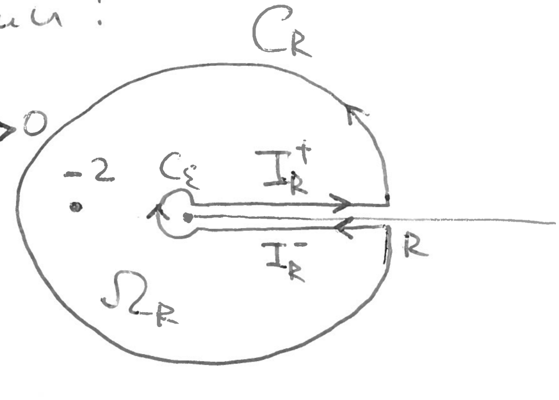
Сначала обычным способом:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)} = \left[y=\sqrt{x},\ dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right] = 2\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+2} =$$

$$= 2\int \frac{\sqrt{2}\, d(y/\sqrt{2})}{\left(\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)2} = \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Теперь с помощью теоремы Коши:

$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}\,(z+2)}$, где $\sqrt{z}$: $\sqrt{x+i\varepsilon} \to \sqrt{x} > 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$



$$\int_{\partial\Omega_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{-2} f(z) = 2\pi i\,\frac{1}{\sqrt{-2}} = \sqrt{2}\,\pi$$

$$\parallel$$

$$\oint_{C_R} + \oint_{C_\varepsilon} + \int_{\overrightarrow{I_R^+}} + \int_{\overleftarrow{I_R^-}} f(z)\,dz$$

Оценим!

$$\left|\oint_{C_R} f(z)\,dz\right| \le 2\pi R \cdot \max_{|z|\in C_R} |f(z)| \le \frac{2\pi R}{\sqrt{R}\,(R-2)} \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)$$

(использовали $|\sqrt{z}| = \left|e^{\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2} i \arg z}\right| = e^{\frac{1}{2}\ln|z|} = |z|^{1/2}$)

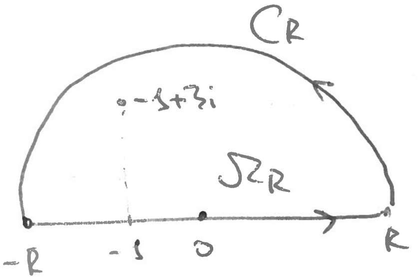
$$\left|\oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon \cdot \max_{|z|\in C_\varepsilon} |f(z)| \le \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}\,(2-\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

$$\int_{I_R^+} f(z)\,dz \longrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)} \quad R\to\infty$$

$$\int_{I_R^-} f(z)\,dz \longrightarrow \int_\infty^0 \frac{dx}{(\lim \sqrt{x-i\varepsilon})\,(x+2)} = \int_\infty^0 \frac{dx}{-\sqrt{x}\,(x+2)} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)}$$

Итого: $2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)} = \sqrt{2}\,\pi$, значит $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

<u>Пример</u> $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,dx = ?$



$$f(z) := \frac{z e^{iz}}{z^2+2z+10} = \frac{z e^{iz}}{(z+1-3i)(z+1+3i)}$$

$$\oint_{\Omega_R} = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(z)\,dz}_{\downarrow\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} + \underbrace{\oint_{C_R} f(z)\,dz}_{\downarrow\ 0,\ \text{лемма Жордана}}$$

$$\| $$

$$2\pi i \operatorname{res}_{-1+3i} f(z) = 2\pi i\, \frac{(-1+3i)\,e^{-i-3}}{6i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Im}\left(\frac{2\pi}{6\cdot e^3}(-1+3i)\,e^{-i}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{3\cdot e^3}\left(-e^{-i}\right) + \frac{\pi}{e^3} i e^{-i}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{3e^3}\sin(-1) + \frac{\pi}{e^3}\left(\operatorname{Re}\left(e^{-i}\right)\right) = \frac{\pi}{3e^3}\sin(1) + \frac{\pi}{e^3}\cos(1)$$

$$= \frac{\pi\left(\sin(1) + 3\cos(1)\right)}{3e^3}.$$

Ha gom: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = 0.$

Практика 8

Вычисление интегралов. Интеграл в смысле главного значения

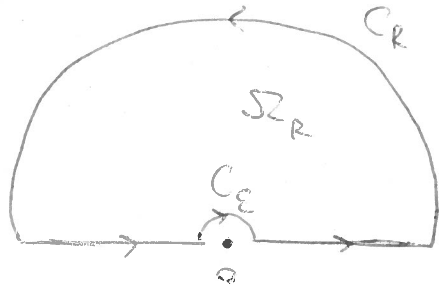
<u>Опр</u> Пусть $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. Интеграл в смысле главного значения —

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\varepsilon < |x-a| < R} f(x)\,dx$$

если предел в правой части $\exists$.

<u>Пример</u> $p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x} = 0$

<u>Пример</u> $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx = ?$



Вычислим для $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ интеграл

$$0 = \oint_{\partial\Omega_R} f(z)\,dz = \oint_{C_R} + \int_{\varepsilon<|z|<R} + \oint_{C_\varepsilon} \to p.v. \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$$

нет полюсов в Ω_R

$\oint_{C_R} \to 0$ по лемме Жордана

Посчитаем $\oint_{C_\varepsilon} = -\oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -\int_0^\pi f(\varepsilon e^{it})\,\varepsilon i e^{it}\,dt = -\int_0^\pi \left(\frac{c_{-1}}{\varepsilon e^{it}} + c_0 + \ldots\right) \cdot i\varepsilon e^{it}\,dt$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем

вычет для f

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} = -\int_0^\pi \frac{c_{-1}}{\varepsilon \cdot e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it}\,dt = -c_{-1}\pi i, \text{ где } c_{-1} = \operatorname{res}_0 f(z)$$

Но $f(z) = \frac{1}{z}(1 + iz + \ldots) \Rightarrow c_{-1} = 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i$

Итого, $0 = \text{p.v.}\int f(x)dx - \pi i$, т.е.

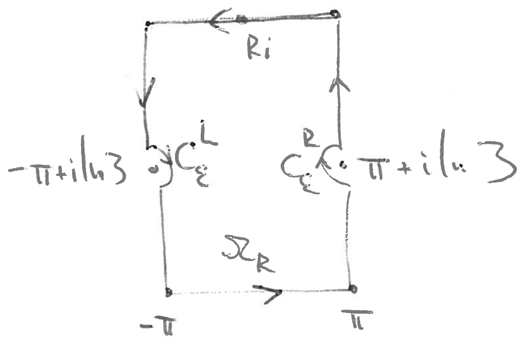
$$\text{p.v.}\int \frac{e^{ix}}{x}dx = \pi i,$$ переходя к мнимой части,

получаем

$$\text{p.v.}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} = \pi, \quad \text{и} \quad \text{p.v.}\int \frac{\sin x}{x}dx = \int \frac{\sin x}{x}dx$$

так как $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится в обычном смысле.

<u>Пример</u> $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5+3\cos x} = ?$$



Рассмотрим $f = \frac{1}{5+3\cos z}$

Где полюса? $5+3\cos z = 0 \iff \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -\frac{5}{3}$

$\iff w + \frac{1}{w} = -\frac{10}{3}$ для $w = e^{iz} \iff w^2 + \frac{10}{3}w + 1 = 0$

$\iff \left(w+\frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9} = 0 \iff \left(w+\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

$\iff w = -\frac{5}{3} \pm \frac{4}{3} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right. \iff e^{iz} = e^{i\pi \pm \ln 3} \iff z = \pi \mp \ln 3 \cdot i + 2\pi k$

В контур попадают точки $-\pi + i\ln 3$, $\pi + i\ln 3$.

$$0 = \underset{\partial\Omega_R}{\int} f(z)dz = \underset{[-\pi,\pi]}{\fint} f(x)dx + \underset{[-\pi,\pi]+iR}{\int} f(z)dz + \underbrace{\underset{[\pi,\pi+Ri]\setminus B(\pi+i\ln 3,\varepsilon)}{\int} f(z)dz + \underset{[-\pi+Ri,-\pi]\setminus B(-\pi+i\ln 3,\varepsilon)}{\int} f(z)dz}_{\text{это } = 0 \text{ из-за периодичности}} + \left(\oint\limits_{C_\varepsilon^R} + \oint\limits_{C_\varepsilon^L}\right) f(z)dz$$

т. Коши, нет полюсов в Ω_R

$$\left| \underset{[-\pi,\pi]+iR}{\int} f(z)dz \right| \le 2\pi \cdot \max_{\operatorname{Im} z = R} \frac{1}{|5+3\cos z|} \le \frac{2\pi}{3\cdot\frac{e^R - e^{-R}}{2} - 5} \to 0$$

$$\oint_{C_\varepsilon^R} + \oint_{C_\varepsilon^L} f(z)\,dz = -\oint_{|z-\pi-i\ln 3|=\varepsilon} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{res}_{\pi+i\ln 3} f(z)$$

периодичность и смена напр-я обхода

Посчитаем $\operatorname{res}_{\pi+i\ln 3} f(z)$:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-\pi-i\ln 3} + C_0 + \ldots$$

так как полюс первого порядка ($(5+3\cos z)' = -3\sin z$ не обнуляется вне $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow C_{-1} = \operatorname{res}_{\pi+i\ln 3} f(z) = \lim_{z\to\pi+i\ln 3} \frac{z-\pi-i\ln 3}{5+3\cos z} =$$

$$= \lim \frac{z-\pi-i\ln 3}{5+3\cos z - (5+3\cos(\pi+i\ln 3))} = \frac{1}{(5+3\cos z)'}\Bigg|_{z=\pi+i\ln 3} =$$

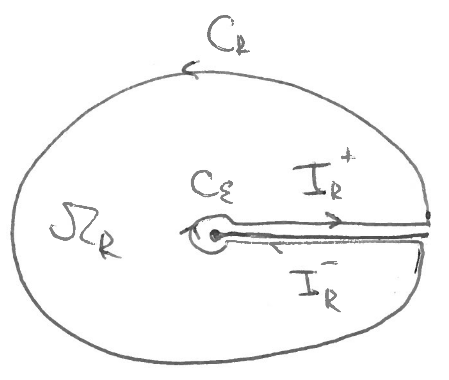
$$= -\frac{1}{3\sin(\pi+i\ln 3)} = \frac{2i}{-3\left(e^{i\pi-\ln 3} - e^{-i\pi+\ln 3}\right)} = \frac{2i}{-3\left(-\frac{1}{3}+3\right)} = -\frac{i}{4}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$ ← ответ

__Пример__ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x+1)^3}\,dx = ?$

Рассмотрим $f(z) = \dfrac{\log z}{(z+1)^3}$, $g(z) = \dfrac{\log^2 z}{(z+1)^3}$ в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$

Посчитаем $\displaystyle\int_{\partial\Omega_R} g(z)\,dz$ по границе области Ω_R:



$$\left|\oint_{C_R} g(z)\right| \le \frac{2\pi R\cdot(\log R+2\pi)^2}{(R-1)^3} \to 0 \qquad R\to\infty$$

$$\left|\oint_{C_\varepsilon} g(z)\right| \le \frac{2\pi \varepsilon\left(|\log \varepsilon|+2\pi\right)}{(1-\varepsilon)^3} \to 0\,, \quad \varepsilon\to 0$$

$$\int_{I_R^+} g(z)\,dz \to \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(x+1)^3}\,dx$$

$$\int_{I_R^-} g(z)\,dz \to \int_\infty^0 \frac{(\log x+2\pi i)^2}{(x+1)^3}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\pi i \operatorname{res}_{-1} g(z) = \oint_{\partial\Omega_R} g(z)\,dz \longrightarrow \cancel{\int_0^\infty g(x)dx} + \cancel{\int_\infty^0 g(x)dx} +$$

$$+ 4\pi i\int_\infty^0 f(x)\,dx - 4\pi^2\int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow 4\pi \int_\infty^0 f(x)\,dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{res}_{-1} g(z)\right) = 2\pi \operatorname{Re}\left(\operatorname{res}_{-1} g(z)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\operatorname{res}_{-1} g(z)\right)$$

$$g(z) = \frac{\log^2 z}{(z+1)^3} = \frac{1}{(z+1)^3}\left(\log^2(-1) + \frac{(\log^2 z)'\big|_{z=-1}}{1!}\cdot(z+1) + \frac{(\log^2 z)''\big|_{z=-1}}{2!}(z+1)^2+\dots\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{z=1} g(z) = \frac{1}{2!}(\log^2 z)''\Big|_{z=-1} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\log z}{z}\right)'\right)\Big|_{z=-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{z^2} - \frac{\log z}{z^2}\right)\Big|_{z=-1} = 1-(\log(-1)) = 1-\pi i$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = -\frac{1}{2} \leftarrow \text{ответ}$$

Практика 9

Принцип максимума. Теорема Лиувилля

Теорема (принцип максимума) Пусть Ω - область, $f \in Hol(\Omega)$

Если $\exists z_0 \in \Omega: |f(z_0)| \geq |f(z)| \ \forall z \in \Omega$, то $f \equiv const$ в Ω.

Следствие (принцип максимума) Пусть Ω - огр-я область, $f \in Hol(\Omega)$ и $f \in C(\overline{\Omega})$. Тогда $\exists z_0 \in \partial\Omega: |f(z_0)| \geq |f(z)| \ \forall z \in \overline{\Omega}$.

Пример $\Omega = \mathbb{C}^+$, $f(z) = \sin z$. $\sup\limits_{x \in \partial\Omega} |f(x)| = 1$ но $\sup\limits_{z \in \Omega} |f(z)| = +\infty$

$\Rightarrow$ убрать ограниченность в следствии нельзя.

Теорема (теорема Лиувилля) Если $f \in Hol(\mathbb{C})$ и $|f(z)| \leq C$ $\forall z \in \Omega$, то $f \equiv const$

Примеры:

1) $f \in Hol(\mathbb{C})$, $|f(z)| \leq C(|z|^n + 1) \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ - многочлен степени не выше n

Решение: рассмотрим g - многочлен, $\deg g \leq n$: $f - g = O(z^{n+1})$ при $z \to 0$

Функ-я $h = \frac{f-g}{z^n}$ - целая и ограниченная $\Rightarrow h \equiv const \Rightarrow$

$\Rightarrow f - g = C \cdot z^n \Rightarrow f$ - многочлен, $\deg f \leq n$.

2) $f \in Hol(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$, $\sup\limits_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \overset{\forall z \in \mathbb{D}}{\leq} |z|$, причём следующие условия равносильны: 1) $\exists z_0 \in \mathbb{D}: |f(z_0)| = |z_0|$ и 2) $f(z) = \alpha z$ для нек. $\alpha \in \mathbb{C}: |\alpha| = 1$.

Решение $g(z) := \frac{f(z)}{z} \in Hol(\mathbb{D})$. При этом $\forall r \in (0,1)$

$$\sup_{|z| \leq r} |g(z)| \underset{\text{принцип max}}{=} \sup_{|z| = r} |g(z)| \leq \sup_{|z|=r} |f(z)| \cdot \sup_{|z|=r} \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z)| \leq \lim_{r \to 1} \sup_{|z| \leq r} |g(z)| = \lim_{r \to 1} \frac{1}{r} = 1.$$

3) Пусть $f \in Hol(\mathbb{C})$, $|\mathrm{Im}\, f| \le 1$. Тогда $f \equiv const$.

<u>Решение</u> $g := \frac{1}{2i - f} \in Hol(\mathbb{C})$, $|g| \le \frac{1}{\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |2i - f|} \le$

$$\le \frac{1}{\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |\mathrm{Im}(2i - f(z))|} \le 1 \Rightarrow g \equiv const \text{ по т. Лиувилля}$$

$\Rightarrow f \equiv const$

4) Если $f \in Hol(\mathbb{D})$, $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f| \le M$, то $\forall \lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D}$: $f(\lambda) = 0$ имеет место нер-во $|f(z)| \le \left|\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda} z}\right|$

<u>Решение</u> $g := \frac{f(z)}{\left(\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda} z}\right)}$, $g \in Hol(\mathbb{D})$, аналогично лемме Шварца $|g| \le 1$ в $\mathbb{D}$ (так как $\left|\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda} z}\right| = 1$ на единичной окружности)

5) В условиях предыдущего примера, $|f'(\lambda)| \le \frac{1}{1-|\lambda|^2}$

<u>Решение</u> $|f(z)| \le \left|\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda} z}\right|$ $\forall z \in \mathbb{D} \overset{f(\lambda)=0}{\Longleftrightarrow} \left|\frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}\right| \le \frac{1}{|1-\bar{\lambda} z|}$

дальше подставить $z = \lambda$

6) $A \in B(H)$, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists\, (\lambda I - A)^{-1} \in B(H)\}$. <u>Утв-е:</u> $\sigma(A) \ne \varnothing$

<u>Решение</u> Возьмём $h_1, h_2 \in H$, $f := ((\lambda I - A)^{-1} h_1, h_2)$. Если $\sigma(A) = \varnothing$, то $f \in Hol(\mathbb{C})$. При этом $|f(\lambda)| \le \|(\lambda I - A)^{-1}\| \cdot \|h_1\| \cdot \|h_2\| = \frac{1}{|\lambda|} \|(I - \frac{A}{\lambda})^{-1}\| \cdot \|h_1\| \cdot \|h_2\| \le \frac{C}{|\lambda|} \|h_1\| \cdot \|h_2\|$ если $|\lambda| > \|A\|$ (пишем ряд для $(I - A/\lambda)^{-1} = \sum\limits_0^\infty \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$) $\Rightarrow f$ — огр-я целая $\Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow$

$((A - \lambda I)^{-1} h_1, h_2) = 0$ $\forall h_1, h_2$ $\forall \lambda$ $\Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} = 0 \Rightarrow I = 0$?!

Практика 10

Принцип Фрагмена-Линделёфа. Теорема Адамара о трёх прямых

<u>Упражнение</u> (вспоминаем принцип max & теор. Лиувилля)

А) Пусть $f, g \in Hol(\mathbb{C})$ такие, что $(|f|-|g|)^2 \geq 1$ всюду в $\mathbb{C}$.

Доказать, что f, g – постоянны

Б) Пусть Ω_1, Ω_2 – огранич. области, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$, $\begin{cases} f, g \in C(\overline{\Omega_2}) \\ f, g \in Hol(\Omega_2) \end{cases}$

Доказать, что либо $\sup\limits_{z \in \partial\Omega_1} |f(z)| + |g(z)| < \sup\limits_{z \in \partial\Omega_2} |f(z)| + |g(z)|$

либо эти супремумы совпадают и тогда f, g – постоянны.

<u>Решение А</u> Заметим, что по непр-ти $|f|-|g|$ не может менять знак в $\mathbb{C}$ (если в одной точке $|f|-|g|<0$ а в другой $|f|-|g|>0$, то соединим их отрезком и где-то на отрезке будет значение $|f|-|g|=0$, но $(|f|-|g|)^2 \geq 1$).

Считаем, что $|f|-|g|>0$ всюду. Тогда $|f|-|g| \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{f}$ – огр-я целая функ-я $\Rightarrow f \equiv const \Rightarrow$
$\Rightarrow |c|-|g| \geq 1 \Rightarrow |g| \leq |c|-1$ в $\mathbb{C} \Rightarrow g$ – огр-я целая функ-я $\Rightarrow g \equiv const$.

<u>Решение Б</u> $\sup\limits_{z \in \Omega_1} |f(z)|+|g(z)| = |f(z_0)|+|g(z_0)|$, где $z_0 \in \partial\Omega_1$

– это принцип max. Найдем $\alpha_{1,2} \in \mathbb{C} : |\alpha_{1,2}| = 1$ и

$$|\alpha_1 f(z_0) + \alpha_2 g(z_0)| = |f(z_0)| + |g(z_0)|.$$

Положим $h = \alpha_1 f + \alpha_2 g$. Тогда $h \in Hol(\Omega_2)$, $h \in C(\overline{\Omega_2})$ и

$$\sup\limits_{z \in \Omega_1} |f(z)|+|g(z)| = \sup\limits_{z \in \overline{\Omega_1}} |h(z)| \leq \sup\limits_{z \in \overline{\Omega_2}} |h(z)| = \sup\limits_{z \in \partial\Omega_2} |h(z)| \leq \sup\limits_{z \in \partial\Omega_2} |f(z)|+|g(z)|$$

$$\sup\limits_{z \in \Omega_1} |f(z)|+|g(z)| = \sup\limits_{z \in \partial\Omega_1} |f(z)|+|g(z)|$$

принцип max

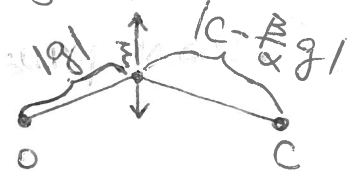
Мы показали, что $\sup\limits_{z\in\partial\Omega_1} |f(z)|+|g(z)| \le \sup\limits_{z\in\partial\Omega_2} |f(z)|+|g(z)|$

Предположим, что в этом нер-ве — равенство. Тогда, функции $h(z) = \alpha f + \beta g$, $\varphi(z) = |f|+|g|$ принимают max значение в Ω_2.

По принципу max, $h \equiv const \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}: f + \frac{\beta}{\alpha} g = c.$

Значит, $\varphi = \left|c - \frac{\beta}{\alpha} g\right| + |g|$ — принимает max значение в Ω_2.

Но такого не может быть: g — открытое отображение (можно пошевелить $\xi = \frac{\beta}{\alpha} g$)



<u>Задача</u> (Принцип Фрагмена–Линделёфа)

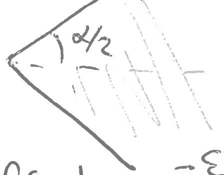
Пусть f — аналитична в угле раствора α (Γ_α), $f \in C(\overline{\Gamma_\alpha})$,

$|f(z)| \le C \cdot e^{|z|^\rho}$ $\forall z \in \Gamma_\alpha$, где $\rho \in (0, \frac{\pi}{\alpha})$. Тогда если

$|f(z)| \le M$ $\forall z \in \partial\Gamma_\alpha$, то $|f(z)| \le M$ всюду в Γ_α.

<u>Решение</u> Возьмём $h_\varepsilon(z) = f(z) e^{-\varepsilon z^{\rho_1}}$, где $0 < \rho < \rho_1 < \frac{\pi}{\alpha}$, $\varepsilon > 0$

Считаем, что Γ_α такой:



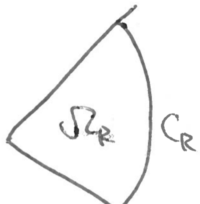
$|h_\varepsilon(z)| \le |f(z)| e^{-\varepsilon Re(z^{\rho_1})} = |f(z)| \cdot e^{-\varepsilon |z|^{\rho_1} \cdot Re(e^{i\rho_1 \arg z})}$

Заметим, что $\arg z \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}] \Rightarrow \rho_1 \arg z \in [-\delta_1, \delta_1]$ где

$\delta_1 = \frac{\alpha \cdot \rho_1}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Re(e^{i\rho_1 \arg z}) = \cos(\rho_1 \arg z) > A > 0$

$\Rightarrow |h_\varepsilon(z)| \le |f(z)| \cdot e^{-\varepsilon |z|^{\rho_1} \cdot A} \le e^{|z|^\rho - \varepsilon |z|^{\rho_1} \cdot A} \longrightarrow 0$ при $|z| \to \infty$

$\Rightarrow$ в области Ω_R



фун-я h_ε: $h_\varepsilon \in Hol(\Omega_R)$ огр, $h_\varepsilon \in C(\overline{\Omega_R})$

принцип max для Ω_R

$|h_\varepsilon(z)| \le |f(z)| \le M$ $\forall z \in \partial\Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_R$

$|h_\varepsilon(z)| \le M$ при больших R если $z \in C_R$

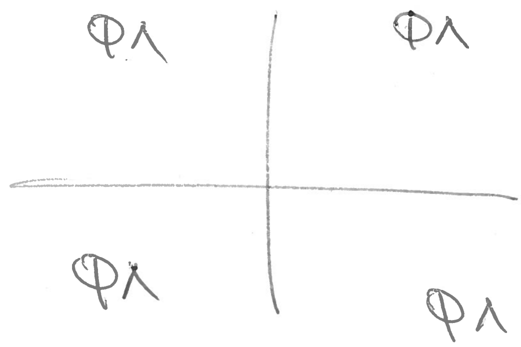
$\Rightarrow |h_\varepsilon(z)| \le M$ в Ω_R $\forall R \gg 1$

$\Rightarrow |h_\varepsilon(z)| \le M$ $\forall z \in \Gamma_\alpha \Rightarrow \left|f(z) \cdot e^{-\varepsilon z^{\rho_1}}\right| \le M$ $\forall z \in \Gamma_\alpha$

$\Rightarrow |f(z)| \le M$ (перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$)

Пример Пусть $|f(z)| \le e^{|z|}$ в $\mathbb{C}$, $f\in Hol(\mathbb{C})$, f-ограничена на $\mathbb{R}\cup i\mathbb{R}$. Тогда $f\equiv const$

Решение "Зал зеркал": 4 раза принцип ФЛ + теорема Лиувилля

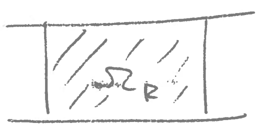


Задача (Принцип Ф-Л для полосы)

Пусть $\Pi_b = \{z\in\mathbb{C}: |\mathrm{Im}\, z|\le b\}$. Пусть $f\in C(\overline{\Pi_b})\cap Hol(\Pi_b)$ такова, что $|f(z)|\le c e^{e^{\rho|z|}}$ для всех $z\in\Pi_b$ и нек. числа $0<\rho<\frac{\pi}{2b}$. Тогда если $|f(z)|\le M$ $\forall z\in\partial\Pi_b$, то $|f(z)|\le M$ $\forall z\in\Pi_b$

Решение Рассмотрим $h_\varepsilon = |f(z)|e^{-\varepsilon\cosh(\rho_1 z)}$, где $0<\rho<\rho_1<\frac{\pi}{2b}$, $\varepsilon>0$

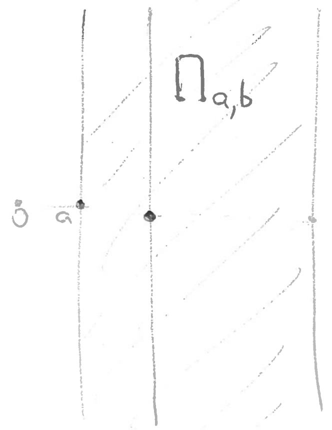
Далее рассуждение с областями



$R\to\infty$

Задача (Теорема Адамара о трех прямых)

Пусть $\overline{\Pi_{a,b}} = \{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z\in[a,b]\}$, $f\in Hol(\Pi_{a,b})\cap C(\overline{\Pi_{a,b}})$ такова, что $\sup\limits_{\Pi_{a,b}}|f|<\infty$. Положим $M(t)=\sup\limits_{\mathrm{Re}\, z=a(1-t)+bt}|f(z)|$ для $t\in[0,1]$. Тогда $M(t)\le M(0)^{1-t}M(1)^{t}$ для всех $t\in[0,1]$.



Решение Рассмотрим функцию

$$g(z) = M(0)^{\frac{b-z}{b-a}}\cdot M(1)^{\frac{z-a}{b-a}}$$

$|g(a+iy)|=M(0)$, $|g(b+iy)|=M(1)$ $\forall y$

$\left|\frac{f}{g}\right|\le 1$ на $\partial\Pi_{[a,b]}$, $\left|\frac{f}{g}\right|\le e^{c|z|}$ в $\Pi_{a,b}$ $\Rightarrow$

по принципу Ф-Л для полосы получаем

$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall z \in \Pi_{a,b}$

$$\Rightarrow M(t) \leq \sup_{\operatorname{Re} z = a(1-t)+bt} |g(z)| = \sup \left| M(0)^{\frac{b - a(1-t) - bt - iy}{b-a}} \right| \cdot \left| M(1)^{\frac{a(1-t)+bt+iy-a}{b-a}} \right|$$

$= M(0)^{1-t} \cdot M(1)^{t}$, ч.т.д.