Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и компьютерных наук

Классический анализ

Конспект основан на лекциях
Романа Викторовича Бессонова

17 сентября 2020 г.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Факультет
математики
и компьютерных
наук СПбГУ

Конспект основан на лекциях по классическому анализу, прочитанных Романом Викторовичем Бессоновым студентам Факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета в осеннем семестре 2018–2019 учебного года.

В конспекте содержится материал 1-ого семестра курса математического анализа.

Редакторы:

Михаил Опанасенко
Михаил Германсков

Наборщики:

Михаил Опанасенко
Константин Челпанов
Павел Гранин
Мария Ханина
Маргарита Лашина

Автор рисунков:

Вячеслав Тамарин

Последняя версия конспекта и исходный код:

https://www.overleaf.com/read/hbrfyfqbkckf

Сайт СПБГУ: https://spbu.ru.
Сайт факультета МКН: https://math-cs.spbu.ru.

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Вещественные числа

Основным объектом, изучаемым в данном курсе, является *поле вещественных чисел*, а именно, четвёрка $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geqslant)$, где $+$ и $\cdot$ — бинарные операции на $\mathbb{R}$, то есть функции из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$; $\geqslant$ — отношение на $\mathbb{R}$, то есть подмножество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; удовлетворяющие приведённым ниже аксиомам.

Аксиомы поля:

(1) $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists(-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$;

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$;

(4) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$;

(5) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

(6) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$;

(7) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$;

(8) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

(9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Аксиомы порядка:

(10) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geqslant x$;

(11) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \geqslant y \wedge y \geqslant x) \to x = y$;

(12) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \to x \leqslant z$;

(13) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \geqslant y \vee y \geqslant x$.

Аксиомы связи порядка с алгебраическими операциями:

(14) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \geqslant y \to x + z \geqslant y + z$;

(15) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0) \to x \cdot y \geqslant 0$.

Аксиома полноты:

(16) Для любой пары непустых множеств (A, B), где $A, B \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\forall a \in A \; \forall b \in B \; (a \leqslant b),$$

(то есть когда A «левее» B) выполняется следующее условие:

$$\exists x \in \mathbb{R} \; \forall a \in A \; \forall b \in B \; (a \leqslant x \leqslant b).$$

Пара множеств (A, B) из условия аксиомы полноты называется *щелью*.

Мы не будем доказывать существование и единственность (с точностью до изоморфизма) и поля $\mathbb{R}$.

Приведём некоторые элементарные свойства поля вещественных чисел.

Утверждение 1.1.1 (элементарные свойства $\mathbb{R}$).

(1) $x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

(2) $(-1) \cdot x = -x$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

(3) $1 > 0$, то есть $1 \geqslant 0$ и $1 \neq 0$;

(4) для любых $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

$$x \geqslant y, z \geqslant t \implies x + z \geqslant y + t.$$

Доказательство.

(1) $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \implies x \cdot 0 = 0$.

(2) Заметим, что если $y_1 + x = 0$ и $y_2 + x = 0$, то $y_1 = y_2$, поскольку

$$y_1 = y_1 + 0 = y_1 + (y_2 + x) = (y_1 + x) + y_2 = y_2.$$

Значит, $(-1)x + x = (-1 + 1)x = 0 \cdot x = 0$. В частности, $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$.

(3) $1 \neq 0$ по аксиоме (5). Предположим, что $0 > 1$. Тогда

$$-1 > 1 + (-1) \implies -1 > 0 \implies (-1)(-1) > 0 \implies 1 > 0,$$

что приводит к противоречию.

(4) Надо дважды воспользоваться аксиомой (14) и транзитивностью $\geqslant$:

$$\left.\begin{aligned} x \geqslant y &\implies x + z \geqslant y + z \\ z \geqslant t &\implies y + z \geqslant y + t \end{aligned}\right\} \implies x + z \geqslant y + z \geqslant y + t. \qquad \blacksquare$$

1.2 Верхние и нижние грани множеств

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется:

(1) *ограниченным сверху*, если существует такое $c \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in X$ выполнено $x \leqslant c$;

(2) *ограниченным снизу*, если существует такое $c \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in X$ выполнено $x \geqslant c$;

(3) *ограниченным*, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

Определение. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда любое число $c \in \mathbb{R}$, большее всех элементов X, называется *верхней гранью* множества X (аналогично определяется *нижняя грань*).

Утверждение 1.2.1. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Определим *множество верхних граней* E множества X:

$$E := \{c \in \mathbb{R} \mid x \leqslant c \text{ для всех } x \in X\}.$$

Тогда E имеет минимальный элемент, то есть существует такое $c_0 \in E$, что для любого $c \in E$ верно $c_0 \leqslant c$. Более того, этот элемент единственен.

Доказательство. Очевидно, что (X, E) — щель. Значит, по аксиоме полноты

$$\exists c_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ \forall c \in E : x \leqslant c_0 \leqslant c. \tag{†}$$

По определению c_0 лежит в E, а по (†) c_0 является минимальным элементом E. Предполагая, что существует другой минимальный элемент $c_0' \in E$, получаем

$$c_0 \leqslant c_0' \leqslant c_0,$$

откуда $c_0 = c_0'$, что показывает единственность. ■

Определение. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда минимальный элемент множества верхних граней, определённый в утверждении 1.2.1, называется *точной верхней гранью* X или *супремумом* X и обозначается через

$$\sup X.$$

Аналогично, максимальная нижняя грань ограниченного снизу множества называется *точной нижней гранью* X или *инфимумом* X и обозначается через

$$\inf X.$$

Будем также считать, что $\sup \varnothing = -\infty$, $\inf \varnothing = +\infty$,

$$\begin{aligned} \sup X &= +\infty, \quad \text{если } X \text{ не ограничено сверху}, \\ \inf X &= -\infty, \quad \text{если } X \text{ не ограничено снизу}. \end{aligned}$$

Утверждение 1.2.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, $c \in \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $c = \sup X$;

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : x \geqslant c - \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $c = \sup X$. Предположим (от противного), что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in X$ справедливо $x < c - \varepsilon$. Тогда $c - \varepsilon$ — верхняя грань X, причем $c - \varepsilon < c$. Противоречие.

Пусть теперь выполнено условие (2). Предположим, что существует c' — верхняя грань X, причём $c' < c$. Рассмотрим $\varepsilon := (c - c')/2$. Тогда существует такое $x \in X$, что

$$x \geqslant c - \left(\frac{c - c'}{2}\right) = \frac{c + c'}{2} > c',$$

но это противоречит тому, что c' — верхняя грань. ■

Утверждение 1.2.3. Если x_0 является верхней гранью X и $x_0 \in X$, то $\sup X = x_0$.

Доказательство. Очевидно. ■

Теорема 1.2.4 (лемма Кантора о вложенных отрезках). Пусть $\{[a_\gamma, b_\gamma]\}_{\gamma \in \Gamma}$ — множество таких отрезков, что для любой пары $[a_{\gamma_1}, b_{\gamma_1}],\ [a_{\gamma_2}, b_{\gamma_2}]$ верно

$$\text{либо}\ \ [a_{\gamma_1}, b_{\gamma_1}] \subset [a_{\gamma_2}, b_{\gamma_2}], \quad \text{либо}\ \ [a_{\gamma_1}, b_{\gamma_1}] \supset [a_{\gamma_2}, b_{\gamma_2}].$$

Тогда

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} [a_\gamma, b_\gamma] \neq \varnothing.$$

Кроме того, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\gamma \in \Gamma$, что $b_\gamma - a_\gamma < \varepsilon$, то существует такой $x \in \mathbb{R}$, что

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} [a_\gamma, b_\gamma] = \{x\}.$$

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Покажем, что $a_{\gamma_1} \leqslant b_{\gamma_2}$. Пусть это не так. Тогда $a_{\gamma_2} \leqslant b_{\gamma_2} < a_{\gamma_1} \leqslant b_{\gamma_1}$, то есть отрезки не пересекаются, а это невозможно. Рассмотрим теперь два множества

$$A := \{a_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\},$$
$$B := \{b_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

По предыдущему рассуждению, (A, B) — щель. Применяя аксиому полноты, получаем такое $c \in \mathbb{R}$, что

$$a_{\gamma_1} \leqslant c \leqslant b_{\gamma_2} \quad (\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma).$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$c \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} [a_\gamma, b_\gamma], \quad \text{а потому} \quad \bigcap_{\gamma \in \Gamma} [a_\gamma, b_\gamma] \neq \varnothing.$$

Покажем единственность точки, если существуют отрезки сколь угодно малой длины. Пусть числа $c, c' \in \mathbb{R}$ таковы, что $c, c' \in [a_\gamma, b_\gamma]$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда $|c - c'| \leqslant b_\gamma - a_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Зафиксируем $\varepsilon = |c - c'|/2$. Получаем, что

$$\exists \gamma \in \Gamma : b_\gamma - a_\gamma < \varepsilon \implies |c - c'| < \tfrac{1}{2}|c - c'| \implies |c - c'| = 0 \implies c = c',$$

что и требовалось. ■

1.3 Натуральные числа

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если

$$x \in X \implies x + 1 \in X.$$

Определение. Определим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ как пересечение всех индуктивных множеств в $\mathbb{R}$, содержащих единицу, то есть

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{\operatorname{Ind} X \\ 1 \in X}} X.$$

Также мы можем определить *целые числа*:

$$\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\};$$

и *рациональные числа*:

$$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x = p/q\}.$$

Определение. Пусть $x \geqslant 0$. *Целой частью* x называется число

$$[x] := \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Определение. Определим функцию *возведения в натуральную степень*:

$$x^n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ раз}}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1.3.1 (неравенство Бернулли). Для всех $x \geqslant -1$ выполнено неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Доказательство. Доказываем принципом математической индукции: при $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение выполнено для $n = k > 1$. Тогда

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant (1+x)(1+kx)\\
&= 1 + x + kx + kx^2\\
&= 1 + (k+1)x + kx^2\\
&\geqslant 1 + (k+1)x,
\end{aligned}$$

поскольку $kx^2 \geqslant 0$. ■

Лемма 1.3.2. Для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$ выполнено неравенство

$$(1+x)^n \leqslant 1 + 4^n x.$$

Доказательство. Делаем аналогично предыдущему: при $n = 1$ получаем неравенство $1 + x \leqslant 1 + 4x$ равносильно $3x \geqslant 0$, что верно при $x \geqslant 0$. Переход: пусть верно для $n = k > 1$. Тогда:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k\\
&\leqslant (1+x)(1+4^k x)\\
&= 1 + 4^k x + x + 4^k x^2\\
&\leqslant 1 + 2\cdot 4^k x + x\\
&= 1 + x(2\cdot 4^k + 1)\\
&\leqslant 1 + 4\cdot 4^k x,
\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Утверждение 1.3.3. Если $a > 0$ и $a^n \leqslant 1$, где $n \in \mathbb{N}$, то $a \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть это не так и $a > 1$, то есть $a = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + b,$$

где b — некоторая сумма произведений, составленных из единицы и ε, откуда нетрудно видеть, что $b > 0$. Противоречие. ■

Теорема 1.3.4. Для любого $x \geqslant 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное $c \geqslant 0$ такое, что $c^n = x$. Число c называется *корнем n-ой степени* из x и обозначается через $\sqrt[n]{x}$.

Доказательство. В случае $x = 0$ очевидно, что $c = 0$. Пусть теперь $x > 0$. Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}
A &:= \{s > 0 \mid s^n < x\},\\
B &:= \{s > 0 \mid s^n > x\}.
\end{aligned}$$

Множество A непусто, поскольку либо $x \in A$ (в случае $x < 1$), либо $\frac{1}{2} \in A$. Множество B непусто, поскольку $x + 1 \in B$. Заметим теперь, что

$$\forall s_1 \in A\ \forall s_2 \in B : s_1^n \leqslant x \leqslant s_2^n \implies \frac{s_1^n}{s_2^n} \leqslant 1 \implies \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^n \leqslant 1 \implies \frac{s_1}{s_2} \leqslant 1 \implies s_1 \leqslant s_2.$$

Из этого следует, что (A, B) — щель. Применяя аксиому полноты, получаем, что существует такое $c \in \mathbb{R}$, что для любых $s_1 \in A$ и $s_2 \in B$ выполнено неравенство

$$s_1 \leqslant c \leqslant s_2.$$

Покажем, что $c^n = x$. Для этого предположим, что это не так, и придём к противоречию.

(1) Предположим, что $c^n < x$. Покажем, что существует такое $\varepsilon > 0$ такое, $(c+\varepsilon)^n < x$. Обозначим $\delta := x - c^n$, $\delta > 0$. Тогда по лемме 1.3.2:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \leqslant 1 \implies (c+\varepsilon)^n &= c^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{c}\right)^n \\ &\leqslant c^n \left(1 + 4^n \frac{c}{\varepsilon}\right) \\ &= c^n + 4^n c^{n+1} \varepsilon^{-1} \\ &= x - \left((x - c^n) - 4^n c^{n+1} \varepsilon^{-1}\right) \\ &= x - \delta + 4^n c^{n+1} \varepsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Скажем, что

$$4^n c^{n+1} \varepsilon^{-1} \leqslant \frac{\delta}{2} \iff \varepsilon \leqslant \frac{2 \cdot 4^n c^{n+1}}{\delta}, \quad \varepsilon = \min\left(\frac{c}{2}, \frac{2 \cdot 4^n c^{n+1}}{\delta}\right).$$

Тогда

$$(c+\varepsilon)^n \leqslant x - \delta + 4^n c^{n+1} \varepsilon^{-1} \leqslant x - \frac{\delta}{2} < x,$$

что и требовалось. Отсюда получаем, что $c + \varepsilon \in A$. Однако по выбору числа c выполнено $c + \varepsilon \leqslant c$, то есть $\varepsilon \leqslant 0$, что неверно. Значит, $c^n \geqslant x$.

(2) Аналогичным образом через неравенство Бернулли легко показывается, что из $c^n > x$ следует, что существует $\varepsilon > 0$, для которого верно $(c - \varepsilon)^n > x$.

Осталось показать единственность: пусть существует такое $d > 0$, что $d^n = x$. Тогда

$$\left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{x}{x} = 1 \implies c = d,$$

что и требовалось. ■

1.4 Сведения из топологии

Топологические пространства

Определение. *Топологией* на множестве X называется набор подмножеств $\mathcal{T} \subset 2^X$, обладающий следующими свойствами:

(1) $\varnothing$ и X лежат в $\mathcal{T}$;

(2) объединение всех элементов любого подмножества $\mathcal{T}$ лежит в $\mathcal{T}$;

(3) пересечение элементов любого конечного подмножества $\mathcal{T}$ лежит в $\mathcal{T}$.

Множество X с заданной на нём топологией $\mathcal{T}$ называется *топологическим пространством.*

Множества, лежащие в $\mathcal{T}$, называются *открытыми*. Множество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Упражнение. Пересечение произвольного числа замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Определение. Открытое в $\mathbb{R}$ множество U называется *окрестностью* точки x, если $x \in U$. Множество

$$U_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\},$$

называется *ε-окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}$. Множество

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}.$$

называется *проколотой ε-окрестностью* точки x.

Определение. *Стандартной топологией* на $\mathbb{R}$ называется множество

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} := \{X \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset X\}.$$

Нетрудно проверить, что это действительно топология.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Если $Y \subset X$, то семейство множеств

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

является топологией на Y и называется *индуцированной топологией*. Множество Y с такой топологией называется *топологическим подпространством* X, а его открытые множества — это точности все пересечения Y с открытыми множествами в X.

Предельные точки, замыкание

Определение. *Внутренностью* множества $E \subset X$ называется наибольшее по включению открытое множество в E; оно обозначается через $\operatorname{Int} E$.

Замыканием множества $E \subset X$ называется наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее E; оно обозначается через $\operatorname{Cl} E$ или $\overline{E}$.

Определение. Пусть $E \subset X$. Тогда точка $x \in X$ называется:

- *предельной точкой* множества E, если для любой окрестности U точки x выполнено
$$E \cap (U \setminus \{x\}) \neq \varnothing;$$

- *изолированной точкой* множества E, если существует такая окрестность U точки x, что
$$U \cap E = \{x\}.$$

Утверждение 1.4.1. Пусть $E \subset X$. Тогда E замкнуто в том и только том случае, когда содержит все свои предельные точки.

Доказательство. См. конспект по общей топологии. ■

Теорема 1.4.2. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху и замкнуто. Тогда

$$\sup E \in E.$$

Доказательство. Как мы помним, $x = \sup E$ в том и только том случае, когда $x \geqslant y$ для каждого $y \in E$, и для всех $\varepsilon > 0$ существует такой $y \in E$, что $x - \varepsilon \leqslant y$.

Докажем, что x — предельная точка E (тогда теорема будет доказана в силу замкнутости E и одного из предыдущих утверждений). Действительно, так как U открыто и $x \in U$, то для некоторого $\varepsilon > 0$
$$U_\varepsilon(x) \subset U,$$
и тогда элемент $y \in E$, для которого выполнено $x - \varepsilon \leqslant y$, лежит в $U_\varepsilon(x) \subset U$, что и требовалось. ■

Плотность

Определение. Пусть $E_1, E_2 \subset X$ и $E_1 \subset E_2$. Говорят, что E_1 *плотно* в E_2, если любая окрестность U точки x в E_2 пересекается с E_1 (то есть $U \cap E_1 \neq \varnothing$).

Теорема 1.4.3. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Доказательство. По определению плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ равносильна условию

$$\forall a < b\ \exists q \in \mathbb{Q} : q \in (a, b) \iff (na, nb) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n(b-a) \geqslant 2$ (оно существует по принципу Архимеда). Пусть $q = [nb] - 1 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Покажем, что $q \in (na, nb) : q < [nb] \leqslant nb$;
$$[nb] + 1 > nb, \quad nb - na \geqslant 2 \implies [nb] + 1 > na + 2 \implies q > na.$$
Значит $na < q < mb$, $q \in (na, nb)$, что и требовалось. ■

Компактность

Определение. Пусть $E \subset X$. Тогда семейство открытых множеств $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ называется *открытым покрытием* множества E, если

$$E \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma.$$

Определение. Множество $E \subset X$ называется *компактным* подмножеством X, если для любого открытого покрытия этого множества можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 1.4.4. Множество $E \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Доказательство. Пусть E компактно. Тогда $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие E, а значит можно выбрать конечное подпокрытие, то есть $E \subset (-N, N)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$ и E ограничено. Пусть теперь $x \in \mathbb{R}$ — предельная точка для E. Предположим, что $x \notin E$. Тогда

$$\left\{\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right) \cup \left(x + \frac{1}{n}, +\infty\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

— открытое покрытие. Поскольку E компактно, найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$E \subset \left(-\infty, x - \frac{1}{N}\right) \cup \left(x + \frac{1}{N}, +\infty\right).$$

Но тогда $\dot{V}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$ для, например, $\varepsilon = 1/2N$, что противоречит определению предельной точки. Значит, все предельные точки лежат в E, то есть E замкнуто.

Пусть теперь E замкнуто и ограничено. Будем доказывать от противного; рассмотрим открытое покрытие $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ множества E, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Поскольку E ограничено, $E \subset [a_0, b_0]$ для некоторого отрезка $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$. Построим рекуррентную последовательность отрезков следующим образом:

- если множество $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap E$ не имеет конечного подпокрытия, то

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right];$$

- в противном случае

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right].$$

Очевидно, что на каждом шаге пересечение отрезка с E нельзя покрыть объединением конечного числа множеств из $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Обозначим $I_n = [a_n, b_n]$. Тогда $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — семейство вложенных отрезков, причём в нём есть отрезки сколь угодно малой длины. По лемме Кантора о вложенных отрезках $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$, где $x \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $x \in E$. По построению $I_n \cap E \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то есть x — предельная или изолированная точка для E. В любом случае, из этого следует, что $x \in E$.

Найдём в исходном покрытии окрестность точки x, скажем, U_γ. По определению стандартной топологии, $U_\varepsilon(x) \subset U_\gamma$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Найдём такое n, что

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда $I_n \subset U_\varepsilon(x)$, то есть I_n покрывается конечным множеством из $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Противоречие. Значит, E — компактно. ∎

Следствие 1.4.5. Отрезок $[0,1]$ — компактное множество.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что $[0,1]$ — замкнутое и ограниченное множество. Очевидно, что оно ограничено, скажем, числом 2. Рассмотрим произвольную точку $x \notin [0,1]$. Если $x > 1$, то $[0,1] \cap U_\varepsilon(x) = \varnothing$ для $\varepsilon = \frac{x-1}{2}$, а если $x < 0$, то $[0,1] \cap U_\varepsilon(x) = \varnothing$ для $\varepsilon = \frac{-x}{2}$. Таким образом, отрезок $[0,1]$ содержит все свои предельные точки, то есть он замкнут. ∎

Следствие 1.4.6 (лемма Больцано–Вейерштрасса). Любое бесконечное ограниченное подмножество $\mathbb{R}$ имеет предельную точку.

Доказательство. Пусть $E \subset [a,b]$ и это множество не имеет предельных точек. Тогда для всех $x \in [a,b]$ существует такое $\varepsilon_x > 0$, что множество $U_{\varepsilon_x} \cap E$ содержит лишь конечное число точек. Очевидно, что $\{U_{\varepsilon_x}(x)\}_{x\in[a,b]}$ — открытое покрытие $[a,b]$. Значит, можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, при этом для всех k множество $U_{\varepsilon_{x_k}}(x_k) \cap E$ конечно, то есть множество

$$\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} \left(U_{\varepsilon_{x_k}}(x_k) \cap E\right) = \left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} U_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)\right) \cap E$$

конечно. Но тогда E конечно, что противоречит условию. ∎

Связность и промежутки

Определение. Топологическое пространство $(X,\mathcal{T})$ называется *связным*, если в нем нет открыто-замкнутых множеств. Множество $E \subset X$ называется связным, если топологическое пространство $(E,\mathcal{T}_E)$ связно.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *промежутком*, если из того, что $x \in E$, $y \in E$ и $x \leqslant z \leqslant y$ следует, что $z \in E$. В символьной записи,

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R} : x \in E \land y \in E \land x \leqslant z \leqslant y \implies z \in E. \tag{1.4.1}$$

Определение. Каждый промежуток в $\mathbb{R}$ имеет один из следующих видов:

$$[a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b),\ (a,+\infty),\ [a,+\infty),\ (-\infty,a),\ (-\infty,a],\ (-\infty,+\infty),$$

где $a,b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидно, что каждое из перечисленных множеств удовлетворяет по определению условию (1.4.1).

Рассмотрим случай, когда E ограничено. Обозначим

$$a := \inf E, \quad b := \sup E, \quad E \subset [a,b].$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такие $a_1, b_1 \in E$, что

$$a_1 < a + \varepsilon \quad \text{и} \quad b_1 > b - \varepsilon,$$

причём $[a_1, b_1] \subset E$, $[a_1, b_1] \supset (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, а значит

$$\bigcup_{\varepsilon>0} (a+\varepsilon, b-\varepsilon) = (a, b).$$

Таким образом, $(a, b) \subset E \subset [a, b]$, то есть E — промежуток. Аналогичным образом доказывается для неограниченных множеств (достаточно выкинуть одну из переменных). ■

Теорема 1.4.7. Множество $E \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда E — промежуток.

Доказательство. Предположим, что E связно, однако

$$\exists x, y \in E,\ z \notin E : x < z < y.$$

Рассмотрим множество $A := E \cap (-\infty, z)$. Ясно, что $A \neq \varnothing$, так как $x \in A$. $A \neq E$, поскольку $y \notin A$. Заметим, что в $\mathcal{T}_E$ множество A замкнуто. Тогда E не связно. Противоречие.

Пусть E — промежуток. Предположим, что существует такое открыто-замкнутое в индуцированной топологии множество A, что $A \neq \varnothing$, $A \neq E$. Множество $B := E \setminus A$ тоже открыто-замкнуто. Пусть $a \in A$, $b \in B$. Не умаляя общности, можно считать, что $a < b$. Рассмотрим множества

$$\widetilde{A} := [a, b] \cap A,$$
$$\widetilde{B} := [a, b] \cap B.$$

Заметим, что $[a, b] \subset E$, поскольку E — промежуток. Поэтому

$$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = [a, b] \cap (A \cup B) = [a, b] \cap E = [a, b].$$

Множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ замкнуты в стандартной топологии. Значит, если $x = \sup \widetilde{A}$, то $x \in \widetilde{A}$, и $x \neq b$, так как $A \cap B = \varnothing$. Поскольку $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = [a, b]$, имеем $(x, b] \subset \widetilde{B}$, то есть x — предельная точка для $\widetilde{B}$. Так как $\widetilde{B}$ замкнуто, $x \in \widetilde{B}$, то есть $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \supset \{x\}$. Противоречие. ■

Глава 2

Непрерывность и пределы

2.1 Непрерывные отображения

Определение. Пусть X, Y — топологические пространства, $f: X \to Y, E \subset X, F \subset Y$. *Образом* E называется множество

$$f(E) := \{y \in Y : \exists x \in E : f(x) = y\},$$

а *прообразом* F множество

$$f^{-1}(F) := \{x \in X \mid f(x) \in F\}.$$

Определение. Функция $f: X \to Y$ между топологическими пространствами называется *непрерывной*, если прообраз каждого открытого множества в Y открыт в X.

Часто рассматриваются функции $f: E \to Y$, где $E \subset X$. В этом случае подразумевается, что f непрерывна в индуцированной топологии.

Утверждение 2.1.1. Функция f непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз замкнутого множества замкнут.

Доказательство. Очевидно. ■

Теорема 2.1.2. Пусть X и Y — топологические пространства, $f: X \to Y$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) f непрерывна;

(2) для каждого $x \in X$ и каждой окрестности V точки $f(x)$ существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$.

Если выполняется условие (2), то говорят, что f *непрерывна в точке* x.

Доказательство. (1) $\implies$ (2). Пусть $x \in X$, V — окрестность $f(x)$. Тогда множество $U = f^{-1}(V)$ — окрестность точки x, причём $f(U) \subset V$.

(2) $\implies$ (1). Пусть V — открытое подмножество Y, $x \in f^{-1}(V)$. Тогда $f(x) \in V$. По предположению существует окрестность $U_x \ni x$ такая, что $f(U_x) \subset V$. Ясно, что $U_x \subset f^{-1}(V)$. Отсюда следует, что $f^{-1}(V)$ можно представить как объединение открытых множеств U_x. Следовательно, $f^{-1}(V)$ открыто. ■

Утверждение 2.1.3. Если E — подпространство X, то вложение $j\colon E \to X$, $x \mapsto x$, непрерывно.

Доказательство. Если U открыто в X, то $j^{-1}(U) = U \cap A$, а это множество открыто в A по определению топологии подпространства. ∎

Утверждение 2.1.4. Если функции $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ непрерывны, то отображение $g \circ f\colon X \to Z$ также непрерывно.

Доказательство. Если U открыто в Z, то $g(U)$ открыто в Y и $f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X. Осталось заметить, что

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U).$$ ∎

Утверждение 2.1.5. Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывна, E — подпространство X. Тогда функция $f|_E\colon A \to Y$ непрерывна.

Доказательство. Функция $f|_E$ равна композиции двух отображений: включения $j\colon E \to X$ и отображения $f\colon X \to Y$, оба из которых непрерывны. ∎

Теорема 2.1.6. Непрерывный образ компакта — компакт.

Доказательство. Пусть X — компакт, отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, $\mathcal{A}$ — открытое покрытие $f(X)$. Тогда семейство

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

является покрытием X. Эти множества открыты по непрерывности f. Значит, X можно покрыть конечным набором таких множеств, скажем,

$$f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n).$$

Тогда $\{A_i\}_{i=1}^n$ — покрытие $f(X)$. ∎

Теорема 2.1.7. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, X связно. Хотим показать, что его образ $Z = f(X)$ связен. Так как отображение, полученное из f сужением области значений на Z, также непрерывно, то достаточно рассмотреть случай с непрерывным сюръективным отображением $g\colon X \to Z$.

Пусть $Z = A \cup B$ — разбиение Z. Тогда $g^{-1}(A)$ и $g^{-1}(B)$ — тоже непересекающиеся множества, чьё объединение равно X. Они открыты в X, поскольку g непрерывно, и непусты, так как g сюръективно. Таким образом, они образуют разделение X, что противоречит связности X. ∎

Теорема 2.1.8 (Вейерштрасса о максимальном значении). Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда существуют такие точки $c, d \in [a,b]$, что

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Доказательство. Поскольку f непрерывно и отрезок $[a,b]$ компактен, образ $A = f([a,b])$ компактен. В частности, A ограничено, то есть супремум и инфимум этого множества конечны. Кроме того, они лежат в A, так как A замкнуто, то есть содержит свои предельные точки. ■

Теорема 2.1.9 (Больцано–Коши о среднем значении). Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна, E — промежуток. Тогда для всех $x_0, x_1 \in E$ существует такое $x \in E$, что

$$f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1).$$

Доказательство. Очевидное следствие того, что образ связного множества связен и того, что любое связное множество в $\mathbb{R}$ — промежуток. ■

Теорема 2.1.10 (ε-δ определение непрерывной функции). Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}$. Тогда непрерывность f равносильна тому, что для любого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть f непрерывно. Выбрав x и ε, рассмотрим множество

$$f^{-1}(U_\varepsilon(f(x))).$$

Оно открыто в X и содержит x. Тогда оно содержит некоторый δ-шар B с центром в x. Если $y \in B$, то $f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$, что и требовалось.

Обратно, предположим, что ε-δ условие выполняется. Пусть $\mathbb{R}$ открыто в Y. Покажем, что $f^{-1}(V)$ открыто в E. Пусть $x \in f^{-1}(V)$. Так как $f(x) \in V$, существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(f(x)) \subset V$. По ε-δ условию найдётся такая δ-окрестность $U_\delta(x)$, что

$$f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Тогда $U_\delta(x)$ — окрестность x, содержащаяся в $f^{-1}(V)$. Таким образом, множество $f^{-1}(V)$ открыто. ■

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \delta(\varepsilon)\ \forall x, y \in E : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1.11. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — компакт, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство. Функция f непрерывно, поэтому можно для каждого x зафиксировать функцию $\delta_x(\varepsilon)$ такую, что

$$\forall y \in E : |x-y| < \delta_x(\varepsilon) \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Будем писать $V_x := V_{\frac{\delta_x(\varepsilon)}{2}}(x)$. Заметим, что V_x — открытое множество для всех x. Тогда $\bigcup_{x \in E} V_x \supset E$ — открытое покрытие E. Поскольку E — компакт, $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in E :$

$\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} V_{x_k} \supset E$. Определим

$$\delta(\varepsilon) := \min\left(\frac{\delta_{x_1}(\varepsilon)}{2}, \frac{\delta_{x_2}(\varepsilon)}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}(\varepsilon)}{2}\right).$$

Покажем, что $\delta(\varepsilon)$ подходит под определение равномерной непрерывности. Пусть $x, y \in E$, $|x-y| < \delta(\varepsilon)$. Найдём такое $k \in \mathbb{N}$, что $x \in V_{x_k}$, то есть $|x - x_k| < \frac{\delta_{x_k}}{2}$.

$$|y - x_k| \leqslant |x - x_k| + |x - y| < \frac{\delta_{x_k}}{2} + \delta \leqslant \delta_{x_k}.$$

Тогда по определению δ_{x_k}:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

2.2 Пределы числовых последовательностей

Определение. *Последовательностью* элементов X называется функция $f\colon \mathbb{N} \to X$. Последовательность часто обозначается через $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ или просто $\{x_n\}$, где $x_n := f(n)$.

Определение. Говорят, что последовательность точек $\{x_n\}$ произвольного топологического пространства X *сходится* к точке $L \in X$, если для каждой окрестности U точки L существует такое натуральное N, что $x_n \in U$ для любого $n > N$.

Определение. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$ существуют непересекающиеся окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 соответственно.

Теорема 2.2.1. Если X — хаусдорфово пространство, то любая последовательность точек X сходится к не более чем одной точке.

Доказательство. Предположим, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ — последовательность точек, сходящихся к L_1. Пусть $L_2 \neq L_1$, а U и V — непересекающиеся окрестности точек L_1 и L_2 соответственно. Так как U содержит x_n для всех n кроме конечного числа значений, то множество V может содержать лишь конечное число x_n. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не может сходиться к L_2. $\blacksquare$

Если последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ хаусдорфова пространства X сходится к точке $L \in X$, будем писать

$$x_n \to L, \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

и называть L *пределом* последовательности $\{x_n\}$. При этом также говорят, что $\{x_n\}$ — *сходящаяся последовательность.*

Пример 2.2.1. Пространство $\mathbb{R}$ хаусдорфово, так как для данных точек $x, y \in \mathbb{R}$ окрестности $U_\varepsilon(x)$ и $U_\varepsilon(y)$ будут не пересекаться при, например, $\varepsilon = \frac{|x-y|}{4}$.

Утверждение 2.2.2. Пусть $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\{x_n\}$ сходится к L;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad (\forall n > N).$$

Доказательство. Если $x_n \to L$, то беря в определении сходимости $U := U_\varepsilon(L)$ получаем в точности условие (2).

Наоборот, предположим, что условие (2) выполнено. Пусть U открыто и $L \in U$. Тогда найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(L) \subset U$. Найдём по условию (2) такое $N \in \mathbb{N}$, что $|x_n - L| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда $x_n \in U_\varepsilon(L) \subset U$, то есть $x_n \in U$ для всех $n > N$, что и требовалось. ■

Утверждение 2.2.3. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность в $\mathbb{R}$. Тогда $\{x_n\}$ ограничена.

Доказательство. Положим $\varepsilon := 1$, $N := N(1)$. Тогда для любого $n > N$ имеем

$$|x_n - L| < 1, \quad \text{то есть} \ \ |x_n| < 1 + |L|.$$

Тогда нетрудно понять, что если

$$c := \max(1 + |L|, |x_1|, \ldots, |x_n|),$$

то $|x_n| \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Утверждение 2.2.4. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$. Если $x_n \to L_1$ и $y_n \to L_2$, то

$$x_n + y_n \to L_1 + L_2.$$

Иначе говоря, *предел суммы равен сумме пределов*.

Доказательство. Найдём такие $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что $|x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_1$ и $|x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N_2$. Положим $N := \max(N_1, N_2)$. Тогда

$$|x_n + y_n - (L_1 + L_2)| \leqslant |x_n - L_1| + |y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n > N$, что и требовалось. ■

Утверждение 2.2.5. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}$. Если $x_n \to L_1$ и $y_n \to L_2$, то

$$x_n y_n \to L_1 L_2.$$

Другими словами, *предел произведения равен произведению пределов*.

Доказательство. Если $y_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то утверждение очевидно. Если $L_1 = 0$, то утверждение следует из ограниченности последовательности y_n. В противном случае,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : |x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2\sup|y_n|} \quad (\forall n > N_1),$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : |y_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2|L_1|} \quad (\forall n > N_2).$$

Положим $N := \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ имеем

$$\begin{aligned}|x_n y_n - L_1 L_2| &= |(x_n - L_1)y_n + L_1(y_n - L_2)| \\ &\leqslant |x_n - L_1| \cdot \sup|y_n| + |L_1| \cdot |y_n - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

то есть $x_n y_n \to L_1 L_2$. ■

Утверждение 2.2.6. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}$, $x_n \to L$. Если $L \neq 0$, то

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{L}.$$

Доказательство. Будем считать, что $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, так как отбрасывание первых членов последовательности не влияет на ее предел, а нулей может быть лишь конечное число. Найдём такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что $|L - x_n| < |L|/2$ для всех $n > N_1$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - x_n|}{|x_n L|} = \frac{|L - x_n|}{|L||L - (L - x_n)|} \leqslant \frac{|L - x_n|}{|L| \cdot \big||L| - |L - x_n|\big|} \leqslant \frac{2|L - x_n|}{|L|^2}.$$

Кроме того, существует такое $N_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N_2$ верно $|L - x_n| < \frac{\varepsilon|L|^2}{2}$. Полагая $N := \max(N_1, N_2)$, получаем, что

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon \quad (\forall n > N).$$ ■

Утверждение 2.2.7. Пусть $x_n \to L_1$, $y_n \to L_2$ и $L_2 \neq 0$. Тогда

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{L_1}{L_2}.$$

(*Предел частного равен частному пределов.*)

Доказательство. По предыдущему утверждению

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \left(\frac{1}{y_n}\right) \to L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}.$$ ■

Утверждение 2.2.8. Пусть $x_n \to L_1$, $y_n \to L_2$ и $L_1 < L_2$. Тогда найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$x_n < y_n \qquad (\forall n > N).$$

Доказательство. Положим $\varepsilon := \frac{L_2-L_1}{2}$. Найдём такие натуральные N_1, N_2, что

$$|x_n - L_1| < \varepsilon, \quad (\forall n > N_1),$$
$$|x_n - L_2| < \varepsilon, \quad (\forall n > N_2).$$

Возьмём $N := \max(N_1, N_2)$. Тогда при $n > N$ выполнено

$$x_N < L_1 + \varepsilon, \quad y_n > L_2 - \varepsilon,$$

а значит

$$x_n < L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2} = \frac{L_1 + L_2}{2},$$
$$y_n > L_2 - \frac{L_2 - L_1}{2} = \frac{L_1 + L_2}{2},$$

то есть $x_n < y_n$, что и требовалось. ■

Утверждение 2.2.9. Пусть $x_n \to L_1$, $y_n \to L_2$, $x_n \leqslant y_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $L_1 \leqslant L_2$.

Доказательство. Если это не так, приходим к противоречию с предыдущим утверждением. ■

Утверждение 2.2.10 (теорема о двух милиционерах). Если $x_n \to L$, $y_n \to L$, и

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

то $z_n \to L$.

Доказательство. Найдём такие N_1, N_2, что

$$|x_n - L| < \varepsilon \quad (\forall n > N_1),$$
$$|y_n - L| < \varepsilon \quad (\forall n > N_2),$$

и положим $N := \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ имеем

$$L - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \leqslant L + \varepsilon,$$

то есть $|z_n - L| < \varepsilon$. ■

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad (\forall n, m > N).$$

Утверждение 2.2.11 (критерий сходимости Коши). Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. Предположим, что $\{x_n\} \to L$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а значит

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - L| + |L - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\forall n, m > N),$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

В обратную сторону, предположим, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Докажем сначала, что $\{x_n\}$ ограничена. Пусть $\varepsilon = 1$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$|x_n - x_m| < 1 \quad (\forall n, m > N).$$

В частности, для всех $m > N$ имеем $|x_N - x_m| < 1$, то есть $|x_m| < |x_N| + 1$. Отсюда следует, что

$$|x_n| \leqslant \max(|x_N| + 1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|).$$

Рассмотрим теперь последовательности

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k, \quad b_n = \sup_{k \geqslant n} x_k.$$

Они существуют, так как последовательность ограничена. Заметим, что

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

то есть $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ — система вложенных отрезков. По лемме Кантора о вложенных отрезках существует точка $L \in \bigcap_{n \geqslant 1} [a_n, b_n]$. Покажем, что L — предел $\{x_n\}$. Для этого оценим следующую разность:

$$b_n - a_n = b_n - x_k + x_k - x_m + x_m - a_n.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём такое $N \in \mathbb{N}$ (по определению последовательности Коши), что

$$|x_k - x_m| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall k, m > N).$$

Кроме того, по свойствам инфимума и супремума мы можем найти такие $k, m > N$, что

$$|b_N - x_k| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |x_m - a_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= b_n - x_k + x_k - x_m + x_m - a_n \\ &\leqslant |b_n - x_k| + |x_k - x_m| + |x_m - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $|b_n - a_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$, так как отрезки вложены. Осталось заметить, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого $n > N$

$$\left.\begin{aligned} a_n \leqslant L \leqslant b_n \\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \\ b_n - a_n < \varepsilon \end{aligned}\right\} \implies |L - x_n| < \varepsilon.$$

Это и значит, что $x_n \to L$. ■

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность (в произвольном топологическом пространстве),

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots,$$

где $n_k \in \mathbb{N}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\{x_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ называется *подпоследовательностью* $\{x_n\}$.

Лемма 2.2.12. Если $\{x_n\} \to L$, то $\{x_{n_k}\} \to L$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём такое $N \in \mathbb{N}$, что $|x_n - L| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Тогда

$$|x_{n_k} - L| < \varepsilon \quad (\forall k > N),$$

так как $n_k \geqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. ■

Определение. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}$, $\{x_{n_k}\}$ — сходящаяся подпоследовательность $\{x_n\}$. Тогда число

$$L = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

называется *частичным пределом* $\{x_n\}$.

Определение. Будем писать $x_n \to +\infty$ и говорить, что x_n *сходится к (плюс) бесконечности*, если для любого числа $M > 0$ существует такое $N := N(M) \in \mathbb{N}$, что

$$x_n > M \quad (\forall n > N).$$

Аналогично определяется $x_n \to -\infty$ (*сходимость к минус бесконечности*).

Отметим, что последовательности, сходящиеся к $\pm\infty$, считаются не сходящимися.

Упражнение. Докажите, что для любых числовых последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ выполнены следующие свойства.

1. $x_n \to +\infty,\ y_n \to +\infty \implies x_n + y_n \to +\infty$;
2. $x_n \to +\infty,\ y_n \to +\infty \implies x_n \cdot y_n \to +\infty$;
3. $x_n \to +\infty,\ y_n \to -\infty \implies x_n \cdot y_n \to -\infty$;
4. $x_n \to +\infty,\ x_n \subset (0, \infty) \iff \frac{1}{x_n} \to 0$;
5. $x_n \to L,\ L > 0,\ y_n \to +\infty \implies x_n \cdot y_n \to +\infty$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

(1) *возрастающей*[1], если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(2) *строго возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(3) *убывающей*, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(4) *строго убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(5) *монотонной*, если она убывает или возрастает.

Утверждение 2.2.13. Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, то она сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Аналогично, если последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу, то она сходится и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}.$$

Доказательство. Докажем только первое утверждение. Пусть $L = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По свойствам супремума найдётся такое $\exists N \in \mathbb{N}$, что $|x_N - L| < \varepsilon$. В силу возрастания x_n отсюда следует, что $|x_n - L| < \varepsilon$ для всех $n > N$, а это и есть определение предела. ■

Замечание. Для неограниченных последовательностей утверждение 2.2.13 тоже верно, поскольку супремум неограниченного множества мы считаем равным $+\infty$.

Определение. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}$. Тогда *верхний предел* $\{x_n\}$ определяется следующим образом:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k, & \text{если } \{x_n\} \text{ ограничена сверху,} \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично, *нижний предел* определяется по правилу

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k, & \text{если } \{x_n\} \text{ ограничена снизу,} \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Иногда верхний и нижний пределы обозначаются через $\limsup$ и $\liminf$ соответственно.

Отметим, что последнее определение корректно, так как последовательности $\{\sup_{k\geqslant n} x_k\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\inf_{k\geqslant n} x_k\}_{n\geqslant 1}$ монотонны, а у монотонных последовательностей всегда есть предел (возможно, бесконечный).

Таким образом, верхний и нижний пределы существуют всегда.

[1] Существует другая терминология, в которой говорят о *неубывающих* и возрастающих последовательностях. Нам кажется, что при такой терминологии гораздо проще запутаться, поэтому не будем её использовать.

Утверждение 2.2.14. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — сходящаяся подпоследовательность в $\{x_n\}$, причём

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = L,$$

где $L \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant L \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

если считать, что

$$-\infty < L < +\infty \quad (\forall L \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху — в противном случае её верхний предел равен $+\infty$, и неравенство $L \leqslant +\infty$ выполнено по нашему соглашению. Покажем, что

$$L \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Для этого рассмотрим вспомогательные последовательности

$$y_{n_k} = \sup_{m \geqslant k} x_{n_m}, \quad \widetilde{y}_{n_k} = \sup_{m \geqslant n_k} x_m.$$

Нетрудно понять, что

$$x_{n_k} \leqslant y_{n_k} \leqslant \widetilde{y}_{n_k} \quad (\forall k \in \mathbb{N}),$$

откуда $L \leqslant \lim_{k\to\infty} \widetilde{y}_{n_k}$. Осталось заметить, что

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{y}_{n_k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqslant n} x_k = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство для нижнего предела аналогично. ■

Утверждение 2.2.15. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная сверху последовательность. Тогда в $\{x_n\}$ существует такая сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство. Построим некоторые последовательности чисел $n_k, m_k \in \mathbb{N}$, такие что

$$m_1 = n_1 = 1, \quad m_1 = n_1 < m_2 \leqslant n_2 < m_3 \leqslant \ldots$$

Если построены n_k, m_k, где $k \geqslant 1$, то выбираем такое m_{k+1}, что

$$|y_{m_{k+1}} - L| < \frac{1}{k+1},$$

где $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$, $y_{m_{k+1}} = \sup_{n \geqslant m_{k+1}} x_n$, и

$$|x_{n_m} - L| \leqslant |x_{n_m} - y_{n_m}| + |y_{n_m} - L| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\{x_{n_m}\}$ сходится к L. ■

Утверждение 2.2.16. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

Доказательство. Очевидно. ■

Утверждение 2.2.17. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = L,$$

где $L \in \mathbb{R}$. В этом случае $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

Доказательство. Если

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = L,$$

то $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ по теореме о двух милиционерах.

Наоборот, если $x_n \to L$, то можно найти такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

(Аналогично с нижним пределом). ■

2.3 Начальные сведения о рядах

Обозначение. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbb{R}$. Тогда символ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ обозначает *ряд*, составленный из элементов a_n.

Определение. Говорят, что ряд $\sum a_n$ *сходится*, если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, где

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Число S называется *суммой ряда*. Если такого предела не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Замечание. Последовательности $\{a_n\}$ и $\sum a_n$ полностью определяется частичными суммами. Действительно, $a_1 = s_1$, $a_2 = s_2 - s_1$, $a_3 = s_3 - s_2$ и так далее.

Теорема 2.3.1 (критерий Коши сходимости рядов). Ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Применим критерий Коши для последовательности $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ — сходимость ряда равносильна тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M(\varepsilon)$, что для любых $M(\varepsilon) < m < n$ выполнено

$$\varepsilon > |s_n - s_m| = \left|\sum_{i=m}^{n} a_n\right|. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.3.1. Докажем следующее равенство (*телескопический ряд*):

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Доказательство. Прямое вычисление:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} s_n \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Пример 2.3.2. *Гармонический ряд*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$$

расходится.

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим число $s_{2N} - s_N$:

$$s_{2N} - s_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geqslant (2N - N)\frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{4}$ не существует подходящего $M(\varepsilon)$ по критерию Коши. $\blacksquare$

Утверждение 2.3.2. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдем $M(\varepsilon)$ из критерия Коши и подставим $m = n > N(\varepsilon)$. Тогда $|a_n| < \varepsilon$, то есть для последовательности $\{a_n\}$ мы нашли $N(\varepsilon)$ из определения сходимости последовательности, равное $M(\varepsilon)$. $\blacksquare$

Следствие 2.3.3. Ряд $\sum (-1)^n$ расходится. $\blacksquare$

Утверждение 2.3.4. Ряд $\sum a_n$, где $a_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда $\sup_{N\geqslant 1} \sum_{n=1}^{N} a_n < +\infty$. Более того, в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{N\geqslant 1} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Доказательство. Так как $a_n \geqslant 0$, последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм является возрастающей последовательностью. Применив утверждение 2.2.13, получаем то, что требовалось доказать. ■

Утверждение 2.3.5 (признак сравнения). Пусть $|a_n| \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если ряд $\sum b_n$ сходится, то и ряд $\sum a_n$ сходится.

Доказательство. Найдём $M(\varepsilon)$ из критерия Коши для ряда $\sum b_n$, выберем $n > m > M(\varepsilon)$ и оценим:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon.$$

Тогда мы нашли $M(\varepsilon)$ из критерия Коши для ряда $\sum a_n$, из чего следует сходимость этого ряда. ■

Утверждение 2.3.6. Ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^p}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Доказательство. По признаку сравнения, из того, $\sum \frac{1}{n}$ расходится, следует, что $\sum \frac{1}{n^p}$ при $p \leqslant 1$ расходится. Пусть теперь $p > 1$. Так как $\frac{1}{n^p} \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, достаточно проверить, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} < +\infty.$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$. Найдём такое $j \in \mathbb{N}$, что $2^j \leqslant N < 2^{j+1} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} \leqslant \sum_{n=1}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{n^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^j)^p + \cdots + (2^{j+1}-1)^p}\right) \\
&\leqslant 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^j}{2^{jp}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^j} \\
&= \frac{1 - q^{j+1}}{1 - q} \\
&\leqslant \frac{1}{1 - q},
\end{aligned}$$

где $q = 2^{1-p} < 1$. ■

Упражнение. Пусть $q > 0$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится тогда и только тогда, когда $q < 1$, причём в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Утверждение 2.3.7 (преобразование Абеля). Пусть $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ и $m \geqslant n \geqslant 2$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_m b_m - s_{n-1} b_n,$$

где $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Также эту формулу называют *суммированием по частям*.

Доказательство. Прямое вычисление:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m}(s_k - s_{k-1})b_k &= \sum_{k=n}^{m} s_k b_k - s_{k-1} b_l \\
&= \sum_{k=n}^{m} s_k b_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} s_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_m b_m - s_{n-1} b_n.
\end{aligned}$$ ■

Утверждение 2.3.8 (признак Дирихле). Пусть $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$, причём:

(1) $\sup_{k\geqslant 1} |s_k| = M < +\infty$, где $s_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$;

(2) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, и при этом $\{b_k\}$ — неотрицательная убывающая последовательность.

Тогда ряд $\sum_{k\geqslant 1} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть $m \geqslant n \geqslant 2$. Тогда:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| &\leqslant \sum_{k=n}^{m} |s_k|(b_k - b_{k+1}) + M \cdot b_m + M \cdot b_n \\
&\leqslant M\left(\sum_{k=n}^{m}(b_k - b_{k+1}) + b_m + b_n\right) \\
&= M(b_n - b_{m+1} + b_n + b_m) \\
&\leqslant M \cdot 4b_n.
\end{aligned}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|b_k| < \frac{\varepsilon}{4M}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant M \cdot 4b_n < M \cdot \frac{4\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$ ■

Следствие 2.3.9 (признак Лейбница). Пусть последовательность $\{c_n\}$ монотонно стремится к нулю. Тогда ряд $\sum (-1)^n c_n$ сходится.

Доказательство. Действительно, взяв $a_n = (-1)^n$ и $b_n = c_n$, мы получим, что ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n = (-1)^n c_n$$

сходится по признаку Дирихле. ∎

Утверждение 2.3.10 (признак Абеля). Пусть $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$, причём:

1. Последовательность $\{b_n\}$ ограничена и монотонна;
2. Ряд $\sum a_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Доказательство. Оставляется в качестве упражнения. ∎

2.4 Пределы отображений в топологических пространствах

Определение. Пусть X, Y — топологические пространства, $E \subset X$, $a \in X$ — предельная точка E. Элемент $L \in Y$ называется *пределом отображения* $f\colon E \to Y$ в точке a, если для любой окрестности V точки L в Y существует окрестность U точки a в X, такая что

$$f(\dot{U} \cap E) \subset V,$$

где $\dot{U} = U \setminus \{a\}$.

Обозначение. То, что функция f в точке a имеет предел L обычно обозначается одним из следующих способов:

- $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$;
- $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Утверждение 2.4.1. Если L_1, L_2 — пределы $f\colon E \to Y$ в точке $a \in E$, где Y — хаусдорфово пространство, то $L_1 = L_2$.

Доказательство. Пусть $L_1 \neq L_2$. Найдём $V_1 \in \mathcal{T}_Y$, $V_2 \in \mathcal{T}_Y$ такие, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Теперь по определению непрерывности в точке выберем окрестности точки $a \in U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ такие, что

$$f(\dot{U}_1 \cap E) \subset V_1 \qquad f(\dot{U}_2 \cap E) \subset V_2.$$

Так как $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, верно

$$f(\dot{U}_1 \cap \dot{U}_2 \cap E) \subset V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

Однако $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_X$ и $a \in U_1 \cap U_2$, а значит $U = U_1 \cap U_2$ — окрестность a. Точка a — предельная, поэтому $\dot{U} \cap E \neq \varnothing$, то есть $f(\dot{U} \cap E) \neq \varnothing$. Противоречие. ∎

2.5 Пределы функций

Обозначение. Пусть $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Множество $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ обозначается $U_\varepsilon(a)$. Это множество иногда называют *ε-окрестностью точки a*. Множество $\dot{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ называют *проколотой ε-окрестностью точки a*.

Теорема 2.5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка E, $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия равносильны:

1. Существует предел $\lim_{x \to a} f(x) = L$ в топологии $\mathcal{T}_\mathbb{R}$;

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого числа a такого, что $a \in \dot{U}_\delta$ верно, что $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем, что из первого условия следует второе. Пусть $\varepsilon > 0$ Рассмотрим $U \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$ такое, что $a \in U$ и $f(\dot{U} \cap E) \subset U_\varepsilon(L)$. Поскольку $U \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$ и $a \in U$, существует $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(a) \subset U$. Но тогда если $x \in \dot{U}_\delta(a)$, то $|f(x) - a| < \varepsilon$, что мы и хотели получить.

Теперь докажем что второе условие влечёт первое. Пусть $V \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$, $L \in V$, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(L) \subset V$. Найдем δ для ε из второго условия. Тогда заметим, что $f(\dot{U}_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(L) \subset V$, то есть мы нашли U из первого условия. ∎

Утверждение 2.5.2 (предел сужения совпадает с пределом функции). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $A \subset E$, a — предельная точка A, функция $f : E \to \mathbb{R}$ такова, что существует предел $\lim_a f(x) = L$, где $x \in E$ Тогда существует предел

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad x \in A.$$

Доказательство. Очевидным образом следует из ε-δ определения. ∎

Утверждение 2.5.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E = E_1 \cup E_2$, a — предельная точка E_1, E_2, $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x \in E_1}} f(x) = L \text{ и } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in E_2}} f(x) = L.$$

Доказательство. Докажем импликацию слева направо. Применим предыдущее утверждение для множеств $E_1 \subset E$ и $E_2 \subset E$;

Теперь докажем справа налево. Для фиксированного ε выберем подходящие δ_1 для E_1 и δ_2 для E_2 из определения предела функции в точке. Тогда для E подходит $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$.

∎

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E. Обозначим $E_+ := E \cap (a, +\infty)$ и $E_- := E \cap (-\infty, a)$. Тогда, если a — предельная точка для E_+, то

$$\lim_{x \to a} f(x), \quad x \in E_+$$

называется *пределом справа* в точке a, аналогично,

$$\lim_{x \to a} f(x), \quad x \in E_-$$

называется *пределом слева* в точке a.

Утверждение 2.5.4. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка E, E_-, E_+. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E_-}} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in E_+}} f(x) = L.$$

Доказательство. Следует из утверждения 2.5.3, поскольку $E = E_1 \cup E_2 \cup \{a\}$ (точка a не имеет значения, поскольку исключается в определении предела). ■

Теорема 2.5.5. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E, $f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Существует предел $\lim_a f(x) = L$, $x \in E$.

2. Для любой последовательности $\{x_n\} \subset \dot{E} = E \setminus \{a\}$, стремящейся к a верно, что $f(x_n) \to L$.

Доказательство. Выведем из первого условия второе. Пусть $\{x_n\} \subset \dot{E}$ и $\lim x_n = a$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что если $x \in U_\delta(a)$, то $f(x) \in U_\varepsilon(L)$. Поскольку $x_n \to a$, существует $N(\delta(\varepsilon))$ такое, что для любого $n > N$ верно, что $|x_n - a| < \delta(\varepsilon)$. Тогда для любого $n > N$ верно, что $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, то есть $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Теперь докажем импликацию в другую сторону. Предположим, что первое не выполнено. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно выбрать $x \in E$, $x \neq a$ так, чтобы было выполнено $|x - a| < \delta$ и $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon$. Построим последовательность $\{x_n\} \subset \dot{E}$ такую, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ точка x_n была бы любой, удовлетворяющей условиям $|x_n - a| < 1/n$ и $|f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon$. По построению $\lim x_n = a$, также $\{x_n\} \subset \dot{E}$, а значит должно быть верно, что $\lim f(x_n) = L$, однако это противоречит предположению. ■

Следствие 2.5.6. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E, даны функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ такие, что существуют пределы $\lim_{x\to a} f(x)$ $\lim_{x\to a} g(x)$. Тогда:

1. Существует предел $\lim_a \alpha f(x) = \alpha \lim_a f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2. Существует предел $\lim_a \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_a f(x) + \lim_a g(x)$;

3. Существует предел $\lim_a \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_a f(x) \cdot \lim_a g(x)$;

4. Существует предел $\lim_a g(x) \neq 0 \implies \exists \lim_a \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_a f(x)}{\lim_a g(x)}$.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы и арифметических свойств пределов. ■

Следствие 2.5.7. Пусть $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, точка a — предельная для E_1, b — для E_2, функции $f\colon E_1 \to E_2$, $g\colon E_2 \to \mathbb{R}$ таковы, что существуют пределы $\lim_a f(x) = b$, $x \in E_1$ и $\lim_b g(x) = L$, $x \in E_2$. Также существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ такая , что $b \notin f(\dot{U}(a))$. Тогда существует предел $\lim_a g(f(x)) = L$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset E_1 \setminus \{a\}$ такую, что $\lim x_n = a$. Существует предел $\lim_a f(x) = b$, $x \in E_1$, а значит существует предел $\lim f(x_n) = b$. Из условия о том, что существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ со свойством $b \notin f(\dot{U}(a))$ следует, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ верно $f(x_n) \neq b$. Тогда множество $\{f(x_n)\}_{n>N}$ содержится в $E_2 \setminus \{b\}$. Существует предел $\lim_b g(x) = L$, $x \in E_2$, следовательно существует предел $\lim g(f(x_n)) = L$. Получается, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset E_1 \setminus \{a\}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = L.$$

Значит существует предел $\lim_a g(f(x)) = L$. ■

Теорема 2.5.8. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$ — предельная точка для E, $f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. f непрерывна в точке a;
2. Существует предел $\lim_a f(x) = f(a)$, $x \in E$.

Доказательство. Согласно теореме **??** непрерывность в точке a равносильна тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|x - a| < \delta$ и $x \in E$, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. А по теореме 2.5.1 мы знаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < |x - a| < \delta$ и $x \in E$, то $|f(x) - \lim_a f(x)| < \varepsilon$. Но так как $\lim_a f(x) = a$, мы можем брать одинаковые $\delta(\varepsilon)$ в обоих условиях. ■

Следствие 2.5.9. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда f непрерывна на E тогда и только тогда, когда для каждого предельной точки a множества E существует $\lim_x f(x) = f(a)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Пусть a — предельная точка E. Тогда по предыдущей теореме f непрерывна в a тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $x \in E$.
2. Пусть a — изолированная точка. Тогда f непрерывна в a по определению, то есть, для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять δ такое, что $U_\delta(a) \cap E = \{a\}$. ■

Следствие 2.5.10. Если функции f, g непрерывны на E, то:

1. Функция $\alpha f(x)$ непрерывна на E;
2. Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна на E;
3. Функция $f(x) \cdot g(x)$ непрерывна на E;
4. Пусть $g(x) \neq 0$, тогда функция $f(x)/g(x)$ непрерывна на E.

Доказательство. Очевидным образом следует из предыдущей теоремы. ■

Пример 2.5.1. Рассмотрим функцию $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Она не является непрерывной.

Доказательство. Рассмотрим прообраз открытого множества $\operatorname{sgn}^{-1}(-1/2, 1/2) = \{0\}$. Это множество не является открытым в стандартной топологии на $\mathbb{R}$. ■

Пример 2.5.2. Функция Римана $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}. \end{cases}$$

разрывна в $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Лемма 2.5.11. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества E, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ такова, что $\lim_a f(x) = L$, $x \in E$. Тогда существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a такая, что $\sup\{f(x) : x \in \dot{U}(a) \cap E\} < \infty$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. Найдем $\delta(\varepsilon)$ из определения предела функции в точке. Пусть $\dot{U}(a) := \dot{U}_\delta(a)$. Тогда $\sup\{f(x) : x \in \dot{U}(a) \cap E\} \leqslant |L| + 1$. ■

Лемма 2.5.12. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества E, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ такова, что $\lim_a f(x) = L$, $x \in E$, и $L \neq 0$. Тогда существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ такая, что для любого $x \in \dot{U}(a) \cap E$ выполнено $|f(x)| \geqslant \frac{|L|}{2}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$. Найдем $\delta(\varepsilon)$ из определения предела функции в точке. Тогда возьмём $\dot{U}(a) := \dot{U}_\delta(a)$. Тогда очевидно верно, что если $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap E$, то

$$|L - f(x)| \in U_{L/2}(L) \implies |f(x)| \geqslant |L|/2.$$ ■

Утверждение 2.5.13 (критерий Коши для функций). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества E, $f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда существование предела $\lim_a f(x)$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta := \delta(\varepsilon)$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(a) \cap E$ верно $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существование предела $\lim_a f(x)$, $x \in E$ означает, что для $\varepsilon/2$ можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы из того, что $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap E$ следовало, что $|f(x) - \lim_a f(x)| < \varepsilon/2$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(a) \cap E$ верно

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \left|f(x_1) - \lim_{x\to a} f(x)\right| + \left|\lim_{x\to a} f(x) - f(x_2)\right| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Построим последовательность $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\delta_n < \frac{1}{n} : x_1, x_2 \in \dot{V}_{\delta_n}(a) \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{n}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено вложение $\dot{V}_{\delta_{n+1}}(a) \subset \dot{V}_{\delta_n}(a)$. Выберем произвольно $\xi_n \in \dot{V}_{\delta_n}(a) \cap E$. Тогда $\xi_n \to a$, так как $|x_n - a| < 1/n$. Последовательность $\{f(\xi_n)\}$ является последовательностью Коши, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $1/n_0 < \varepsilon$, а значит если $k, m > n_0$, то $|f(\xi_k) - f(\xi_m)| \leqslant 1/n_0$, так как $\xi_k, \xi_m \in \dot{U}_{\delta_s}$, где $s := \min(k, m)$. Значит, найдётся $L \in \mathbb{R}$ такое, что существует предел $\lim f(\xi_n) = L$. Докажем, что существует $\lim_a f(x) = L$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ и выберем N так, чтобы было верно $1/N < \varepsilon/2$ и для всякого $n > N$ выполнялось

$$|f(\xi_n) - L| < \varepsilon/2.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$|f(x) - L| \leqslant |f(x) - f(\xi_n)| + |f(\xi_n) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \forall x \in \dot{U}_{\delta_N}(a) \cap E,$$

а значит существует предел $\lim f(x) = L$. ∎

Утверждение 2.5.14. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — возрастающая и ограниченная сверху функция. Тогда для каждой предельной точки a множества $E_- := E \cap (-\infty, a)$ существует предел $\lim_a f(x)$ и, более того, $\lim_a f(x) = \sup\{f(x) : x \in E_-\}$, где предел берётся по множеству E_-.

Доказательство. Пусть $c = \sup\{f(x) : x \in E_-\}$. По свойствам супремума для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0 \in E_-$ такое, что $|f(x_0) - c| < \varepsilon$. Обозначим $\delta := |x_0 - a|/2$. Тогда для всех $x \in E_- \cap \dot{U}_\delta(a)$ таких, что $x \geqslant x_0$ верно

$$c \geqslant f(x) \geqslant f(x_0),$$

и поэтому

$$|f(x) - c| < |f(x_0) - c| < \varepsilon$$

для всех $x \in E \cap \dot{U}_\delta(a)$ а значит $\lim_a f(x) = c$. ∎

Утверждение 2.5.15. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка для E, $f\colon E \to \mathbb{R}$, функция f ограничена,

$$F = \{c \in \mathbb{R} : \exists\{x_n\} \subset E \setminus \{a\},\ x_n \to a,\ f(x_n) \to c\},$$

тогда F имеет максимальный элемент.

Доказательство. Нужно проверить, что $F \neq \varnothing$ и, поскольку F ограничено из ограниченности f, что $\exists x_n \subset E : f(x_n) \to \sup F$.

- Проверим, что $F \neq \varnothing$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset E$ такую, что $x_n \to a$, $x_n \neq a$ ни для какого $n \in N$. Последовательность $f(x_n)$ ограничена сверху, а значит существует
$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Покажем, что $c \in F$. По определению верхнего предела существует $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim f(x_{n_k}) = c$. Значит $c \in F$, то есть $F \neq \varnothing$.

- Докажем, что $\sup F \in F$. Построим $\{x_n\}$ следующим образом: найдем

$$\{c_n\} \in F,\ c_n \to c$$

так чтобы $|c_n - c| < 1/n$ для любого n. Для каждого c_n найдем

$$\{y_{m,n}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset E \setminus \{a\},\ y_{m,n} \xrightarrow{m\to\infty} a,\ f(y_{m,n}) \xrightarrow{m\to\infty} c_n.$$

Далее для каждого n выберем $m_0 := m_0(n)$ такое, что

$$|y_{m_0,n} - a| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |f(y_{m_0,n}) - c_n| < \frac{1}{n},$$

и положим $x_n = y_{m_0,n}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива следующая оценка:

$$|f(x_n) - c| \leqslant |f(x_n) - c_n| + |c_n - c| < \frac{2}{n},$$

откуда получается, что $\{f(x_n)\} \to c$. Значит, $c \in F$. ∎

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества E, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ такова, что она ограничена на $E \cap \widehat{U}(a)$ для некоторой окрестности $\widehat{U}(a)$ точки a. тогда число

$$A = \limsup_{x\to a} f(x), \qquad x \in E$$

называется *верхним пределом* f в точке a. По предыдущему утверждению, A — наибольший элемент множества

$$F = \{c \in \mathbb{R} : \exists\{x_n\} \subset E \setminus \{a\},\ x_n \to a,\ f(x_n) \to c\}.$$

Аналогично вводится *нижний предел*.

Теорема 2.5.16. Пусть $E \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка E, $f\colon E \to \mathbb{R}$. Следующие утверждения равносильны:

1. Существует предел $\lim_a f(x) = L$, где $x \in E$.

2. Функция f — ограничена в некоторой окрестности $a \in U(a)$ и

$$\liminf_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = \limsup_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = L.$$

Доказательство. Докажем, что первое условие влечёт второе. По лемме 2.5.11 существует $U(a)$ такая, что для любого $x \in U(a)$ верно $|f(x)| < |L| + 1$ Пусть $c = \limsup_a f(x)$, где $x \in E$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset E$ стремящаяся к a, такая, что для любого $n \in N$ $x_n \neq a$, и есть сходимость $f(x_n) \to c$, где $c = \limsup_a f(x)$ (для нижнего предела аналогично). Но так как $\lim_a f(x) = L$, по теореме 2.5.5 получаем $c = L$.

Теперь докажем импликацию в обратную сторону. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset E$ такую, что $x_n \to a$ и $x_n \neq a$ и $f(x_n) \to L$. Пусть $c := \limsup f(x_n)$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что

$$L \leqslant c = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \implies c \leqslant \limsup_{x\to a} f(x).$$

Аналогично можно показать, что

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leqslant L.$$

Тогда мы показали, что

$$\liminf_{x\to a} f(x) = L = \limsup_{x\to a} f(x),$$

То есть L не зависит от выбора последовательности, сходящейся к a, а значит существует предел функции в точке a по теореме 2.5.5. ■

Упражнение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка множества E, $f\colon E \to \mathbb{R}$, пусть $\delta > 0$, тогда определим

$$F(\delta) := \sup\{f(x) : x \in \dot{E} \cap (a-\delta, a+\delta)\}.$$

Тогда $\limsup_a f(x) = \lim F(\delta)$ при $\delta > 0$ и $\delta \to 0$. Так можно определить предел $+\infty$.

2.6 Бесконечные пределы и пределы в бесконечности. O-символика

Определение. Будем считать, что $V = (M, +\infty)$ — окрестность символа $+\infty$, $V = (-\infty, M)$ — окрестность символа $-\infty$, где $M \in \mathbb{R}$.

Определение. Обозначим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, $E \subset \mathbb{R}$. В этом параграфе будем говорить, что a — *предельная точка множества* E, если она предельная для множества E в стандартной топологии на $\mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$; если E не ограничено сверху и $a = +\infty$; если E не ограничено снизу и $a = -\infty$. Пусть нам дана функция $f\colon E \to \mathbb{R}$. Будем писать

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = L,$$

если для любой окрестности $L \in V(L)$ существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $f(\dot{U})(a) \subset V(L)$..

Замечание. Для $a, L \in \mathbb{R}$ вышеприведенное определение предела соответствует определению предела функции из предыдущего параграфа, $E = \mathbb{N}$ соответствует определению предела последовательности. Для других символов пределы также можно определить на ε-δ языке (смотрим следующее определение).

Определение. Напишем ε-δ определение только для $+\infty$, другое определение устроено аналогично

$$\lim_{x\to a} f = +\infty \iff \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta,\ x \in E \implies f(x) > M.$$

Замечание. Нетрудно убедиться, что для пределов бесконечности и бесконечных пределов верны аналогичные обычным пределам свойства, в которых не происходит сложению бесконечностей разных знаков.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда:

- $f = O(g)$ в точке a, если существует число $c > 0$ и окрестность $U(a)$ точки a, такая, что для любого $x \in U(a) \cap E$ выполнено $|f(x)| \leqslant c \cdot |g(x)|$;
- $f = O(g)$ на E, если существует $c > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant c \cdot |g(x)|$ для всех $x \in E$;
- $f = o(g)$ в точке a, если существует такая окрестность $U(a)$ точки a, что $f(x) = g(x)\alpha(x)$ для всех точек $x \in \dot{U}(a) \cap E$ и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$;
- $f \sim g$ в точке a, если существует такая окрестность $U(a)$ точки a, что $f(x) = g(x)\alpha(x)$ для всех точек $x \in \dot{U}(a) \cap E$, причем $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$.

Примеры 2.6.1.

1. В точке $x = +\infty$ верно $x = o(x^2)$, $\alpha(x) = 1/x$;
2. В точке 0 верно $x^2 = o(x)$, $\alpha(x) = x$;
3. В точке $x = +\infty$ верно $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0 = O(x^n)$;
4. $f(x) \to 0$ при $x \to 1$ тогда и только тогда , когда$f = o(1)$ в точке 1;
5. $x^2 + 1 \sim x^2$ в точке $+\infty$;
6. В точке 0 верно $x^2 + 1 \sim 1$.

Утверждение 2.6.1.

- Если $f = O(g)$, а $g = O(h)$, то $f = O(h)$;
- Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$;
- $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $g \sim f$;
- Если $f = o(g)$ и $g = o(h)$, то $f = o(h)$;
- $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$;
- $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

Доказательство. Арифметические свойства пределов. ∎

Определение. Функция $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* на E в точке a, если $\alpha = o(1)$ при $x \to a$, иными словами $\lim_a \alpha(x) = 0$. Говорят, что α — бесконечно малая порядка $k > 0$ в точке a, если $\alpha \sim c(x-a)^k$, где $c \neq 0$ и $x \to a$, $x \in E$.

Утверждение 2.6.2. Пусть $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ и $c_n \neq 0$. Тогда $p(x) \sim c_n x^n$ при $x \to \infty$.

Доказательство. Запишем равенство:

$$p(x) = c_n x^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{c_n x} + \ldots + \frac{c_0}{c_n x^n}\right),$$

тогда $p(x) = c_n x^n \cdot \alpha(x)$, где

$$\alpha(x) = 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n x} + \ldots + \frac{c_0}{c_n x^n}.$$

Очевидно, что $\alpha(x) \to 1$ при $x \to +\infty$, то есть мы доказали то, что требовалось. ∎

Утверждение 2.6.3. Пусть $q > 1$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ верно, что $n^m = o(q^n)$ при $n \to \infty$. Иными словами, *показательная функция с показателем большим единицы растёт быстрее любого многочлена.*

Доказательство. Достаточно показать, что $n^m/q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Запишем равенство:

$$\frac{n^m}{q^n} = \left(\frac{n}{\widetilde{q}^n}\right)^m, \quad \text{где } \widetilde{q} = \sqrt[m]{q} > 1.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\widetilde{q}^n} = 0.$$

Скажем, что $\widetilde{q} = (1+\varepsilon)^2$, где $\varepsilon > 0$. Тогда:

$$0 \leqslant \frac{n}{\widetilde{q}^n} = \frac{n}{(1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon)^n} \leqslant \frac{n}{(1+n\varepsilon)(1+n\varepsilon)} \leqslant \frac{n}{(n\varepsilon)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \to 0.$$ ∎

Глава 3

Дифференциальное исчисление

3.1 Производная: определение и простейшие свойства

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Если у множества E нет изолированных точек, и f дифференцируема в любой его точке, то функция $x_0 \mapsto f'(x_0)$, где $x_0 \in E$, называется *производной* f *на* E.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $C^1(E)$ *семейство непрерывно дифференцируемых функций на* E, то есть множество таких функций $f\colon E \to \mathbb{R}$, что в любой точке $x_0 \in E$ существует производная $f'(x_0)$, и функция f' непрерывна на E.

Аналогично можно ввести класс $C^k(E)$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, в котором лежат такие функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, что $f' \in C^{k-1}(E)$.

Семейство непрерывных функций на E будем обозначать через $C(E)$. Ясно, что имеет место цепочка включений

$$C^1(E) \supseteq C^2(E) \supseteq \dots \supseteq C^k(E) \supseteq C^{k+1}(E) \supseteq \dots$$

Определение. *Гладкой функцией на* E называется функция, дифференцируемая бесконечное число раз. Множество гладких обозначается через $C^\infty(E)$. Нетрудно понять, что

$$C^\infty(E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(E).$$

Утверждение 3.1.1. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in E$. Тогда она непрерывна в ней.

Доказательство. При x, достаточно близких к x_0, имеем следующую оценку:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \cdot |x - x_0| \leqslant |x - x_0| \cdot |f'(x_0) + 1|.$$

Следовательно, при $|x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{|f'(x_0)+1|}$ получаем $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, а это и есть определение непрерывности. ■

Утверждение 3.1.2. Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f + g$, fg, а также f/g при условии, что $g(x_0) \neq 0$, дифференцируемы в x_0, причём

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0),\\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.\end{aligned}$$

Доказательство. По определению производной имеем следующее:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

Для произведения:

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}\\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Наконец, по непрерывности и отделённости от нуля

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

из чего по формуле производной произведения получаем

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = -f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} + \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

что и требовалось. ■

3.2 Производная суперпозиции и обратной функции

Теорема 3.2.1. Пусть $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$, $f\colon E_1 \to E_2$, $g\colon E_2 \to \mathbb{R}$ — функции, x_0 — предельная точка E_1, $y_0 = f(x_0) \in E_2$ — предельная точка E_2, f дифференцируема в x_0, g дифференцируема в y_0. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причём

$$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \tag{3.2.1}$$

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$E_{11} := \{x \in E_1 \mid f(x) = f(x_0)\},$$
$$E_{12} := \{x \in E_1 \mid f(x) \neq f(x_0)\}.$$

Ясно, что $E_1 = E_{11} \cup E_{12}$.

Рассмотрим два случая. Если x_0 — предельная точка E_{11}, то

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \in E_{11}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Кроме того, при $x \in E_{11}$ верно равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = 0,$$

и в этом случае равенство доказано.

Пусть теперь x_0 — предельная точка E_{12}, и последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_{12}$ стремится к x_0. Тогда имеем равенство

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \\ &= g'(y_0) f'(x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (3.2.1) выполнено всегда. ■

Утверждение 3.2.2. Пусть $f\colon [a,b] \to [c,d]$ — непрерывная биекция, f дифференцируема в точке $x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) \neq 0$. Пусть $g\colon [c,d] \to [a,b]$ — обратное к f отображение, тогда g — дифференцируема в y_0, и

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{3.2.2}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$, $y_n = f(x_n) \in [c,d]$. Докажем, что

$$x_n \to x_0 \iff y_n \to y_0.$$

Следствие слева вправо выполнено по непрерывности, докажем обратное. Пусть $x_n \not\to x_0$ и $y_n \to y_0$. Тогда по определению предела существует такое $\delta > 0$, что бесконечно многих x_n выполнено неравенство $|x_n - x_0| > \delta$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть x_1 — её предел. Очевидно, что $x_1 \neq x_0$, и поэтому $f(x_1) \neq f(x_0)$. Тогда получаем, что $f(x_{n_k}) \to f(x_1)$, но при этом $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Противоречие.

Пусть $\{y_n\} \subset [c;d]$, $y_n \to y_0$, $y_n = f(x_n)$. Тогда

$$g'(y_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$ ■

Замечание. Если же $f'(x_0) = 0$, то теорема неверна. Например, для $f(x) = x^3$ имеем $f'(0) = 0$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, но при этом g не дифференцируема в нуле.

3.3 Экстремумы и теорема Лагранжа о среднем

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E, $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что f *достигает локального максимума в точке* a, если существует окрестность $U \ni a$ такая, что $f(x) \geqslant f(a)$ при всех $x \in U \cap E$. Аналогично, f *достигает локального минимума в точке* a, если существует окрестность $U \ni a$ такая, что $f(x) \leqslant f(a)$ при $x \in U \cap E$. Аналогично определяется *строгий локальный максимум и минимум* — в неравенствах соответствующий знак будет строгим.

Определение. Точка $a \in E$ называется *точкой внутреннего локального экстремума для функции* f, если a — точка локального экстремума для f, и a — предельная точка для множеств $E \cap (a, +\infty)$ и $E \cap (-\infty, a)$.

Утверждение 3.3.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, a — точка внутреннего локального экстремума для f, и f дифференцируема в этой точке. Тогда $f'(a) = 0$.

Доказательство. По определению производной можно записать

$$f(x) - f(a) = (x - a)(f'(a) + \alpha(x)),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Предположим, что $f'(a) > 0$ (случай $f'(a) < 0$ аналогичен). В этом случае выберем окрестность $U \ni a$ такую, что $|\alpha(x)| < \frac{f'(a)}{239}$. Тогда в ней $f'(a) + \alpha(x) > 0$, а $x - a$ может принимать любой из знаков в зависимости от того, справа или слева от a находится x. Следовательно, выражение $(x - a)(f'(a) + \alpha(x))$ может принимать значения обоих знаков, однако $f(x) - f(a)$ принимает значения только одного знака так как a - точка внутреннего локального экстремума. Противоречие. ∎

Теорема 3.3.2 (Ролль). Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непрерывная на $[a, b]$ функция, f дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Если f — константа, то доказывать нечего. Иначе на (a, b) существует точка минимума x_1 и точка максимума x_2. По предыдущему утверждению $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. ∎

Теорема 3.3.3 (Лагранж). Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, f дифференцируема на (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Доказательство. Отметим, что в случае $f(a) = f(b)$ это утверждение совпадает с теоремой Ролля. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{f(a)(x - b)}{a - b} + \frac{f(b)(x - a)}{b - a}.$$

Это линейная функция, и для неё выполнена теорема Лагранжа(можно взять любую точку). Тогда для функции $f-g$ выполнены условия теоремы Ролля. Значит существует $c \in [a,b]$ такая, что $(f-g)'(c)=0$. Но тогда

$$f'(c)=g'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b},$$

что и требовалось. ■

Следствие 3.3.4. Если f дифференцируема на (a,b) и $f'(x)=0$ на (a,b), то $f\equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Если f дифференцируема на (a,b), то она непрерывна на любом подотрезке $[x_1,x_2]\subset(a,b)$. По теореме Лагранжа существует точка $c\in(x_1,x_2)$ такая, что $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$, то есть $f(x_1)=f(x_2)$ для любых двух точек $x_1,x_2\in(a,b)$. Значит, f постоянна на (a,b). ■

Определение. Пусть E — множество без изолированных точек, $F,f\colon E\to\mathbb{R}$. Говорят, что F *является первообразной* f, если $F'(x)=f(x)$ для любой точки $x\in E$.

Следствие 3.3.5. Если F_1, F_2 — первообразные f на (a,b), то они отличаются на константу.

Утверждение 3.3.6. Пусть $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая на (a,b) функция.

Тогда f (нестрого) возрастает на (a,b) $\iff$ $f'(x)\geqslant 0$ на (a,b) (в случае убывания знак противоположный). Для строгого возрастания аналогично, но в неравенстве знак строгий.

Доказательство. Пусть f возрастает на (a,b). По определению производной

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

При $x>x_0$ имеем $f(x)\geqslant f(x_0)$, значит выражение под пределом неотрицательно, т.е. $f'(x_0)\geqslant 0$.

Пусть $f'(x)\geqslant 0$ на (a,b). Применим теорему Лагранжа к подотрезку $[x_1,x_2]\subset(a,b)$: существует точка $c\in(x_1,x_2)$ такая, что

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\geqslant 0,$$

т.е. $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, что и требовалось. ■

3.4 Формула Тейлора

Определение. Пусть $E\subset\mathbb{R}$ — множество без изолированных точек, функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ n раз дифференцируема в точке $x_0\in E$. Определим *многочлен Тейлора функции f с центром в точке x_0 порядка n*:

$$P_{n,f,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Определение. Пусть $f \in C^\infty(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. *Рядом Тейлора функции f с центром в точке x_0* называется ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Лемма 3.4.1. Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, тогда $f_1 f_2 \dots f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ и
$$(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'.$$

Доказательство. Простая индукция по n (база $n = 2$ была доказана ранее). ■

Лемма 3.4.2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Тогда $(x-x_0)^n \in C^\infty(\mathbb{R})$ и
$$((x-x_0)^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}.$$

Доказательство. Простая индукция по k. ■

Замечание. При $k > n$ имеем $((x-x_0)^n)^{(k)} = 0$.

Лемма 3.4.3. Пусть функция f $n \in \mathbb{N}$ раз дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнено равенство $f^{(k)}(x_0) = (P_{n,f,x_0})^{(k)}(x_0)$.

Доказательство. При $k = 0$ равенство выполнено. Если же $1 \leqslant k \leqslant n$, то по предыдущей лемме первые k слагаемых k-ой производной многочлена Тейлора обнулятся, $(k+1)$-ое слагаемое будет равно $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(k-1)\dots 1 = f^{(k)}(x_0)$, остальные же слагаемые равны положительной степени $(x-x_0)$ с коэффициентом, и в точке x_0 они обнуляются. ■

Теорема 3.4.4. Пусть функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема на (a,b) и существует n-ая производная f в точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда при $x \to x_0$ верно равенство
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - P_{n,f,x_0}(x)$. По предыдущей лемме имеем
$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$
Будем доказывать, по индукции, что если $g \in C^{n-1}(a,b)$ и $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ и существует $g^{(n)}(x_0) = 0$, то $g(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

База $n = 1$: $g \in C(a,b)$, $g(x_0) = g'(x_0) = 0$, по определению
$$0 = g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0},$$
т.е. $g(x) = o(x-x_0)$ при $x \to x_0$.

Пусть теперь $g(x) = o((x-x_0)^n)$ при $n \leqslant N$, $g \in C^N(a,b)$,
$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(N)}(x_0) = 0$$

и существует $g^{(N+1)}(x_0) = 0$. Обозначим $\varphi(x) = g'(x)$, тогда

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(N)}(x_0) = 0,$$

откуда по индукционному предположению следует, что $\varphi(x) = o((x-x_0)^N)$ при $x \to x_0$. По теореме Лагранжа для некоторой промежуточной точки ξ_x имеем

$$\begin{aligned} g(x) = g(x) - g(x_0) = g'(\xi_x)(x-x_0) = \\ = \varphi(\xi_x)(x-x_0) = \psi(\xi_x)(\xi_x - x_0)^N(x-x_0) = \\ = \psi(\xi_x)\left(\frac{\xi_x - x_0}{x-x_0}\right)^N (x-x_0)^{N+1}, \end{aligned}$$

где $\psi(t) \to 0$ при $t \to x_0$. Обозначим теперь

$$\overline{\alpha}(t) = \psi(\xi_x)\left(\frac{\xi_x - x_0}{x-x_0}\right)^N.$$

При $\xi_x \to x_0$ имеем, что $\left(\frac{\xi_x - x_0}{x-x_0}\right)^N$ ограничен сверху единицей, а $\psi(\xi_x) \to 0$. Поэтому

$$g(x) = \overline{\alpha}(x)(x-x_0)^{N+1} = o((x-x_0)^{N+1}),$$

что и требовалось. ■

3.5 Выпуклые функции

Определение. Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Определение. Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *строго выпуклой*, если для любых $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и для любых $x_1 \neq x_2 \in (a,b)$ выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Утверждение 3.5.1 (Йенсен). Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на (a,b) $\iff$ для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geqslant 0 : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ верно неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

В случае строгой выпуклости неравенство будет строгим.

Доказательство. Заметим, что $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in (a,b)$.

Справа налево очевидно, потому что при $n = 2$ это просто определение выпуклой функции.

Докажем теперь импликацию слева направо. Индукция: база $n = 2$ — просто определение выпуклой функции. Переход: пусть для n неравенство верно, доказываем для $n+1$. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1} \in (a, b)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \geqslant 0 : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Применим базу следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \\
&\quad = f\left((\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_n\right)\right) + f(\alpha_{n+1} x_{n+1}) \leqslant \\
&\qquad \leqslant (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_n\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

По индукционному предположению первое слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_n\right) \leqslant \\
&\quad \leqslant (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f(x_1) + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f(x_n)\right) = \\
&\qquad = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n),
\end{aligned}$$

из чего мы получаем требуемое неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$

■

Утверждение 3.5.2 (о трёх хордах). Функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла на (a, b) $\iff$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

для любых $x \in (a, b)$, $a < x_1 < x_2 < b$. В случае строгой выпуклости в неравенстве будет строгий знак.

Доказательство. Пусть f выпукла на (a, b). Если $x_1 < x < x_2$, то, записав x в виде $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, получим $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. По определению выпуклости имеем неравенство

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

из которого после домножения на $(x_2 - x_1)$ и переписывания в другом виде получаем

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x)).$$

Делим на $(x - x_1)(x_2 - x)$ и получаем требуемое неравенство. Если же $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, то аналогично.

То же самое рассуждение, но в обратную сторону. ■

Теорема 3.5.3. Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b). Тогда f (строго) выпукла на (a,b) в том и только том случае, когда f' (строго) возрастает на (a,b).

Доказательство. Пусть f выпукла на (a,b). Тогда по предыдущей теореме для любого $x \in (a,b)$ и любых $a < x_1 < x_2 < b$ имеем неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Переходя к пределу при $x \to x_1$, получаем

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

а при $x \to x_2$ получаем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

откуда $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, что и требовалось.

Пусть f' возрастает на (a,b). Рассмотрим произвольные точки $x \in (a,b)$ и $a < x_1 < x < x_2 < b$. Для каждого из промежутков (x_1, x) и (x, x_2) можно применить теорему Лагранжа: существуют точки $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$ такие, что

$$f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}; \qquad f'(c_2) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2},$$

а т.к. $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$, то $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$, что и требовалось. ■

Утверждение 3.5.4. Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируема на (a,b). Тогда f выпукла на (a,b) $\iff$ $f'' \geqslant 0$ на (a,b)

Доказательство. Утверждение равносильно тому, что f' возрастает на (a,b), а это равносильно тому, что $f'' \geqslant 0$ на (a,b). ■

3.6 Обобщённая теорема Лагранжа и правило Лопиталя

Теорема 3.6.1 (Коши, Лагранж). Пусть функции $f, g \in C[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0$ на (a,b). Тогда $g(a) \neq g(b)$ и существует точка $c \in (a,b)$ такая, что выполнено равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Если $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля существует промежуточная точка, в которой g' обнуляется, противоречие. Значит, $g(a) \neq g(b)$. Рассмотрим теперь функцию

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x).$$

Эта функция непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Нетрудно проверить, что $h(a) = h(b)$. Значит, к этой функции можно применить теорему Ролля: существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \iff \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

что и требовалось. ■

Обозначение. Будем писать $x \nearrow L$, если $x \to L$ и $x \leqslant L$.Аналогично будем писать $x \searrow L$, если $x \to L$ и $x \geqslant L$.

Теорема 3.6.2 (Лопиталь). Пусть $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a \in \mathbb{R}$, $a < b$, функции $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и существует предел

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда:

1. Если $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = 0$, то $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$;

2. Если $|g(x)| \to +\infty$ при $x \nearrow b$, то $\exists \lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

В частности существует такое $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, что $g(x) \neq 0$ при $x \in (\tilde{a}, b)$.

Доказательство. Заметим, что на (a, b) не более одного корня g, т.к. иначе возникнет противоречие с теоремой Ролля. Если корней нет, то положим $\tilde{a} = a$, иначе $\tilde{a} = t$, где $t \in (a, b)$ — такая точка, в которой $g(t) = 0$.

Пусть сначала $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = 0$ и b — конечно. Тогда по теореме Коши–Лагранжа существует промежуточная точка $\xi_x \in (x, b)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

При $x \to b$ будет выполнено $\xi_x \to b$, значит предел отношения самих функций будет тот же.

Теперь же предположим, что $b = +\infty$. Тогда имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{M \to +\infty} \frac{f(x) - f(M)}{g(x) - g(M)} = \lim_{M \to +\infty} \frac{f'(\Theta_{x,M})}{g'(\Theta_{x,M})}$$

Пусть U — окрестность точки L, тогда возьмём такое M_0, что при $\Theta > M_0$ верно

$$f'(\Theta)/g'(\Theta) \in V.$$

При $x > M_0$, $\Theta_{M,x} > M_0$ получаем требуемое.

Пусть теперь $\lim_{x \nearrow b} |g(x)| = +\infty$. В этом случае введём новую функцию

$$h(x) = f(x) - Lg(x).$$

Тогда $\lim_{x \nearrow b} h'(x)/g'(x) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что в окрестности $U_b \ni x$ верно неравенство $|h'(x)/g'(x)| < \varepsilon$. Пусть $x_0 \in U_b$, $x_0 \neq b$, и $x \in (x_0, b)$. Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{h'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

где $\xi_x \in (x_0, x)$. Таким образом,

$$\left|\frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| < \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{h(x)}{g(x) - g(x_0)} - \frac{h(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x) - g(x_0)} - \frac{h(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Переходя к верхнему пределу при $x \to b$, получаем

$$\limsup_{x \to b, x \in (x_0; b)} \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| = \limsup_{x \to b, x \in (x_0; b)} \left|\frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right| \leqslant \varepsilon$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое. ■

Следствие 3.6.3. Пусть $f \in C[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и существует предел

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует $f'(b) = L$.

Доказательство. Пусть $f_1(x) = f(x) - f(b)$, $g_1(x) = x - b$. По правилу Лопиталя имеем

$$L = \lim_{x \to b} f'(x) = \lim_{x \to b} f_1'(x) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b),$$

что и требовалось (неопределённость $\frac{0}{0}$ получается по непрерывности f в точке b). ■

Глава 4

Интегральное исчисление

4.1 Интеграл Римана и критерий Лебега

Определение. *Разбиением отрезка* $[a,b]$ называется конечный набор точек

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} : a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots x_{n-1} \leqslant x_n = b.$$

Определение. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция, P — разбиение $[a,b]$. Определим *верхнюю сумму Дарбу $U(f,P)$ функции f по разбиению P* следующим образом:

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

Аналогичным образом определим *нижнюю сумму Дарбу $L(f,P)$ функции f по разбиению P*:

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

Определение. Определим *верхний и нижний интегралы Дарбу* следующим образом:

$$\overline{I}(f) = \inf_P U(f,P);\ \underline{I}(f) = \sup_P L(f,P).$$

Определение. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Риману*, если

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f).$$

В этом случае это число называется *интегралом Римана* и обозначается $\int a^b f$.

$\mathcal{R}[a,b]$ — класс интегрируемых по Риману функций на отрезке $[a,b]$.

Утверждение 4.1.1. Пусть P_1, P_2 — разбиения отрезка $[a,b]$, причём $P_1 \subset P_2$. Тогда выполнены неравенства:

1. $U(f,P_1) \geqslant U(f,P_2)$;

2. $L(f, P_1) \leqslant L(f, P_2)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $P_2 = P_1 \cup \{x^*\}$, $x^* \notin P_1$, $x^* \in [x_k; x_{k+1}]$. Тогда имеем равенство

$$U(f,P_2) - U(f,P_1) = (x^* - x_k) \sup_{[x_k, x^*]} f(x) + (x_{k+1} - x^*) \sup_{[x^*, x_{k+1}]} f(x) - (x_{k+1} - x_k) \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Требуемое неравенство следует из того, что супремум на подотрезке не больше, чем на исходном отрезке. Для инфимума доказательство аналогично. ■

Утверждение 4.1.2. Пусть P_1, P_2 — разбиения отрезка $[a, b]$. Тогда верно неравенство

$$L(f, P_1) \leqslant U(f, P_2).$$

Доказательство. Пусть $P = P_1 \cup P_2$. Тогда по предыдущему утверждению

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P); \qquad U(f, P) \leqslant U(f, P_2),$$

а $L(f, P) \leqslant U(f, P)$ по определению. Требуемое неравенство получено. ■

Утверждение 4.1.3. Функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon > 0$ существует P — разбиение $[a, b]$ такое, что

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть A — множество всех верхних сумм Дарбу для функции f по всем разбиениям, а B - множество нижних сумм Дарбу функции f по всем разбиениям. Тогда (A, B) — щель. Если $\sup B \neq \inf A$, то для любого разбиения верхняя сумма будет отличаться от нижней на не меньше, чем на $\inf A - \sup B$ - противоречие. Значит, $\sup B = \inf A$, а это и есть определение интегрируемости по Риману.

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда существуют разбиения P_1, P_2 такие, что выполнены неравенства

$$U(f, P_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}; \qquad \int_a^b f - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует неравенство

$$U(f, P_1) - L(f, P_2) < \varepsilon.$$

Пусть $P = P_1 \cup P_2$, тогда

$$U(f, P) - L(f, P) \leqslant U(f, P_1) - L(f, P_2) < \varepsilon,$$

что и требовалось. ■

Определение. Множество $E \subset [a, b]$ называется *множеством меры нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счётный набор интервалов $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такой, что $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \supset [a, b]$ и $\sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k| < \varepsilon$.

Упражнение. Докажите, если в определении множества меры нуль брать вместо интервалов отрезки, то получившееся определение останется равносильным старому.

Примеры 4.1.1.

1. Множество из конечного числа точек является множеством меры нуль.
2. Множество из счётного числа точек является множеством меры нуль. В самом деле, для каждой точки x_n возьмём интервал $(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$. Тогда сумма их длин равна
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \cdots = \varepsilon.$$
3. Канторово множество является множеством меры нуль.

Замечание. Счётное объединение множеств $\{A_n\}n \in \mathbb{N}$ меры нуль является множеством меры нуль. Действительно, рассмотрим покрытие A_n отрезками суммарной длины не больше $\varepsilon/2^n$. Тогда объединив такие покрытия, получим покрытие $\cup A_n$ отрезками суммарной длины не больше ε.

Утверждение 4.1.4. Отрезок $[0, 1]$ не является множеством меры нуль.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим покрытие $\{I_k\}_k$ такое, что
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k| < \frac{1}{2}.$$
Поскольку отрезок компактен, то можно извлечь конечное подпокрытие
$$I_{n_1}, \ldots, I_{n_k}.$$
Но в таком случае
$$|I_{n_1}| + \cdots + |I_{n_k}| \geqslant 1,$$
противоречие. ■

Теорема 4.1.5. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда $f \in \mathcal{R}[a, b]$ в том и только том случае, когда множество её точек разрыва имеет меру ноль.

Доказательство. Пусть E — множество точек разрыва f. Предположим, что E — множество меры ноль. Для удобства обозначим
$$\mathrm{Var}_{[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$
Для каждого $\eta > 0$ положим
$$E_\eta := \{x \in [a, b] \mid \mathrm{Var}_{[c,d]} f \geqslant \eta \text{ для всех подотрезков } [c, d] \subset [a, b], \text{ содержащих } x\}.$$

Докажем, что $E_\eta \subset E$. Пусть $x \in E_\eta$, $x \notin E$. Возьмём $\varepsilon = \eta/3$ и рассмотрим отрезок $[x - \delta, x + \delta]$, где ε, δ — числа из определения непрерывности в точке x. По определению E_η получаем, что существуют точки y_1, y_2 из δ-окрестности точки x такие, что $|f(y_1) - f(y_2)| > 3\eta/4$. А с другой стороны

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant |f(y_1) - f(x)| + |f(x) - f(y_2)| \leqslant 2\eta/3.$$

Противоречие. Значит, $x \in E$ и $E_\eta \subset E$.

Теперь докажем, что E_η компактно. Для этого докажем, что оно замкнуто. Если x_0 — предельная точка E_η, то по определению множество $\dot{U}_s(x_0) \cap E_\eta \neq \varnothing$ для всех $s > 0$. Зафиксируем $s > 0$ и возьмём произвольный элемент $y \in \dot{U}_s(x_0) \cap E_\eta$. Найдём такое $\sigma > 0$, что $U_\sigma(y) \subset U_s(x_0)$, и такие $y_1, y_2 \in U_\sigma(y)$, что

$$|f(y_1) - f(y_2)| \geqslant \eta.$$

Тогда y_1 и y_2 подходят под определение E_η для x_0, то есть $x_0 \in E_\eta$ в силу произвольности выбора s. Таким образом, замкнутость доказана. Кроме того, E_η ограничено, так как содержится в $[a, b]$. Значит, оно компактно.

Пусть $\mu > 0$, $\{I_{\mu,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — набор открытых интервалов, такой, что

$$E_\eta \subset E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{\mu,k}, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} |I_{\mu,k}| < \mu.$$

Такой набор существует, так как множество E имеет меру ноль. Выберем конечное подпокрытие E_η, состоящее из интервалов $I_{\mu,k}$. Можно считать, что E_η покрыто интервалами $\widetilde{I_{\mu,1}}, \widetilde{I_{\mu,2}}, \ldots, \widetilde{I_{\mu,N_\mu}}$ так, что для любых $k \neq m$ выполнено $\widetilde{I_{\mu,k}} \cap \widetilde{I_{\mu,m}} = \varnothing$[1], а также

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N_\eta} |\widetilde{I}_{\mu,k}| < \mu.$$

Итак, для любого $\eta > 0$ и любого $\mu > 0$ множество E_η можно покрыть конечным числом непересекающихся открытых интервалов суммарной длины меньше μ. Дополнение до $\bigcup_{1\leqslant k\leqslant N_\mu} \widetilde{I}_{\mu,k}$ в $[a, b]$ состоит из конечного числа отрезков, множество которых назовём $G_{\eta,\mu}$.

Тогда рассмотрим разбиение $P_{\eta,\mu}$ отрезка $[a, b]$, состоящее из концов интервалов $\widetilde{I_{\mu,k}}$ и отрезков $G_{\eta,\mu}$. Тогда оценим

$$U(f, P_{\eta,\mu}) - L(f, P_{\eta,\mu}) \leqslant \sum_k \left|\widetilde{I_{\mu,k}}\right| \mathrm{Var}_{[a,b]} f + \sum_{\gamma\in G_{\eta,\mu}} |\gamma|\eta \leqslant \mu \cdot \mathrm{Var}_{[a,b]} f + (b - a) \cdot \eta$$

Но правая часть стремится к нулю при η и μ стремящимися к нулю. Значит, $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Теперь предположим, что функция f ограничена и $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Пусть, как и рань-

[1] Компоненты связности объединения конечного числа открытых интервалов — открытые интервалы.

ше, E — множество её разрывов. Для каждого $\eta > 0$ обозначим

$$F_\eta = \{x \in [a,b] \mid \text{ для любого } s > 0 \text{ существует } y \in U_s(x) : |f(y) - f(x)| \geqslant \eta\}.$$

Очевидно, что множество $\bigcup_\eta F_\eta$ содержит E. Тогда достаточно доказать, что F_η — множество меры нуль для всякого $\eta > 0$.

Рассмотрим такое разбиение P отрезка $[a,b]$, что

$$U(f,P) - L(f,P) < \eta\varepsilon.$$

Тогда заметим, что сумма длин отрезков разбиения, которые покрывают точки из F_η, (обозначим это множество Γ) не превосходит ε. Действительно, если она превосходит ε, то

$$U(f,P) - L(f,P) \geqslant \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|(\sup_\gamma f - \inf_\gamma f) \geqslant \sum_{\gamma\in\Gamma} |\gamma|\eta \geqslant \varepsilon\eta,$$

противоречие. Значит, мы можем покрыть множество F_η отрезками сколь угодно малой суммарной длины, стало быть оно является множеством меры нуль. ■

Следствие 4.1.6. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, $\chi_{[a,c]}$ — характеристическая функция отрезка $[a,c]$. Тогда:

(1) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$;

(2) $fg \in \mathcal{R}[a,b]$;

(3) $\chi_{[a,c]} f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(4) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

Доказательство. Пусть $E(h)$ — множество разрывов функции h. Заметим, что

(1) $E(\alpha f + \beta g) \subset E(f) \cup E(g)$;

(2) $E(fg) \subset E(f) \cup E(g)$;

(3) $E(\chi_{[a,c]}) f \subset E(f) \cup \{c\}$;

(4) $E(|f|) \subset E(f)$.

Так как $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, то $E(f), E(g)$ — множества меры ноль. Значит, $E(f) \cup E(g)$ тоже имеет меру ноль, а потому выполняются пункты 1–4. ■

Следствие 4.1.7. Пусть $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$, $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функция. Тогда для любых $h \in C[c,d]$ и $f \in \mathcal{R}[c,d]$ выполнено

$$h(\varphi) \in \mathcal{R}[a,b], \quad \psi(f) \in \mathcal{R}[c,d].$$

Доказательство. Это так, поскольку $E(h(\varphi)) = \varnothing$ и $E(\psi(f)) = E(f)$. ■

Следствие 4.1.8. $C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$.

Утверждение 4.1.9. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Доказательство. Для любых двух разбиений P_1, P_2 отрезка $[a,b]$ верно

$$\int_a^b (f+g) \leqslant U(f+g, P_1 \cup P_2) \leqslant U(f, P_1 \cup P_2) + U(g, P_1 \cup P_2) \leqslant U(f, P_1) + U(g, P_2),$$

а значит

$$\int_a^b (f+g) \leqslant \inf_{P_1}(U(f,P_1)) + \inf_{P_2}(U(g,P_2)) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Аналогично показывается, что $\int_a^b (f+g) \geqslant \int_a^b f + \int_a^b g$. Следовательно,

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 4.1.10. Если $\alpha \geqslant 0$, то для любой функции $f \in \mathcal{R}[a,b]$ выполнено

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

Доказательство.

$$\int_a^b \alpha f = \inf_P (U(\alpha f, P)) = \inf_P (\alpha U(f,P)) = \alpha \inf_P (U(f,P)) = \alpha \int_a^b f.$$

■

Утверждение 4.1.11. Для любой функции $f \in \mathcal{R}[a,b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f = -\int_a^b (-f).$$

Доказательство.

$$\int_a^b f = \inf_P (U(f,P)) = \inf_P (-L(-f,P)) = -\sup_P (L(-f,P)) = -\int_a^b (-f).$$

■

Обозначение. Обозначим через $P_{[a,b]}$ множество всех разбиений отрезка $[a,b]$.

Утверждение 4.1.12. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $c \in (a,b)$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a,c]$, $f \in \mathcal{R}[c,b]$, и, кроме того,

1. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$,
2. $\int_a^c f = \int_a^b \chi_{[a,c]} f$,
3. $\int_c^b f = \int_a^b \chi_{[c,b]} f$.

Доказательство. Ясно, что свойства 2 и 3 влекут все остальные утверждения теоремы, поэтому будем доказывать только их.

$$\overline{\int\limits_{[a,c]}} f = \inf_{P_{[a,b]} \ni P} (U(f,P)) = \inf_{P_{[a,b]} \ni P\,:\, c \in P} (U(\chi_{[a,c]} f, P))$$
$$\leqslant \inf_{P_{[a,b]} \ni P} (U(\chi_{[a,c]} f, P)) = \overline{\int\limits_{[a,b]}} \chi_{[a,c]} f.$$

Аналогично,

$$\underline{\int_{[a,c]}} f \geqslant \underline{\int_{[a,b]}} \chi_{[a,c]} f.$$
$$\overline{\int\limits_{[a,b]}} \chi_{[a,c]} f = \int\limits_{[a,b]} \chi_{[a,c]} f,$$

так как $\chi_{[a,c]} f \in \mathcal{R}[a,b]$. Значит,

$$\int\limits_a^b \chi_{[a,c]} f = \overline{\int\limits_{[a,c]}} f = \underline{\int_{[a,c]}} f = \int\limits_a^c f.$$

Аналогично доказывается для $[c,b]$. ■

Утверждение 4.1.13 (основные оценки интегралов).

1. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f \leqslant g$ на $[a,b]$. Тогда
$$\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g.$$

2. Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то
$$\left| \int\limits_a^b f \right| \leqslant \int\limits_a^b |f| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$$

Доказательство.

1. Это утверждение равносильно тому, что для любой неотрицательной функции $h \in \mathcal{R}[a,b]$ выполнено $\int_a^b h \geqslant 0$. Это так, поскольку

$$\int\limits_a^b h = \overline{\int\limits_{[a,b]}} h = \inf_P(U(f,P)) \geqslant 0,$$

где последнее неравенство верно, так как $U(f,P) \geqslant 0$.

2. Можем считать, что $\int_a^b f \geqslant 0$, иначе заменим f на $-f$. Неравенство $\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$ верно, так как $f \leqslant |f|$ на $[a,b]$. Пусть $t = \sup|f|$. Тогда неравенство

$$\int\limits_a^b |f| \leqslant (b-a)t$$

равносильно тому, что $\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b t$, так как $\int_a^b t = (b-a)t$. А это неравенство выполнено, так как $|f| \leqslant \sup|f| = t$. ■

Утверждение 4.1.14. Если $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ — монотонная функция, то множество точек её разрыва не более чем счётно.

Доказательство. Напомним, что $E(f)$ — множество точек разрыва. Пусть E_η — такое же множество, как в теореме 4.1.5. Тогда $E(f) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{1/k}(f)$. Достаточно проверить, что множество $E_{1/k}(f)$ конечно при дополнительном предположении, что $\sup_{[a,b]}|f| < \infty$. Если это так и $\sup|f|$ конечен, то $E(f)$ лежит в объединении счётного числа конечных множеств $E_k(f)$, значит оно не более чем счётно. Если же $\sup|f| = \infty$, то рассмотрим функции $f_n = f\big|_{[a_n,b_n]}$, где $a < a_n < b_n < b, a_n \to a, b_n \to b$. В таком случае $E(f) \subset \bigcup_{n\in N} E(f_n)$. При этом счётное объединение не более чем счётных множеств — не более чем счётное множество, то есть $\bigcup_{n\in N} E(f_n)$ не более чем счётно. Значит и множество $E(f)$ не более чем счётно.

Пусть $\sup|f| < \infty$. Покажем, что множество E_k конечно. Пусть это не так, тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ найдутся $a < y_1 < y_1' < y_2 < y_2' < \ldots < y_N < y_N' < b$ такие, что

$$\left|f(y_m') - f(y_m)\right| \geqslant \frac{1}{k}$$

для всех $m = 1, 2, \ldots, N$. Заметим, что

$$\left|f(y_N') - f(y_1)\right| = \left|(f(y_N') - f(y_N)) + (f(y_N) - f(y_{N-1}')) + \ldots + (f(y_1') - f(y_1))\right| \geqslant \frac{N}{k},$$

так как все эти слагаемые одного знака. Значит

$$\frac{N}{k} \leqslant \sup_{x,y\in(a,b)} |f(x) - f(y)| \leqslant 2 \sup_{x\in(a,b)} |f(x)|\,.$$

Пришли к противоречию с предположением о конечности этого супремума, так как N может быть сколь угодно большим. ■

Следствие 4.1.15. Если f — монотонная функция на $[a,b]$, то $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Доказательство. Множество точек разрыва не более чем счётно, а значит имеет меру ноль. ■

Определение. Пусть P — разбиение отрезка $[a,b]$, $P = \{x_k\}_{k=1}^N$, $a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_N = b$. *Мелкостью разбиения P* называется число

$$\mu(P) = \max_{1\leqslant k<N} (x_{k+1} - x_k).$$

Определение. Пусть дана функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и P — разбиение отрезка $[a,b]$, $P = \{x_k\}_{k=1}^N$. Пусть

$$\{y_k\}_{k=1}^{N-1} \subset [a,b] : y_k \in [x_k, x_{k+1}].$$

Тогда

$$S(f, P, \{y_k\}_{k=1}^{N-1}) = \sum_{k-1}^{N-1} f(y_k)(x_{k+1} - x_k)$$

называется *суммой Римана f по P*.

Утверждение 4.1.16. Пусть $f \in C[a,b]$, $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — разбиения отрезка $[a,b]$, $P_k = \{y_{k_m}\}_{m=1}^{N_k}$, $\mu(P_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда существует

$$\lim_{k\to\infty} S(f, P_k, \{y_{k_m}\}_{1\leqslant m<N_k}) = \int\limits_a^b f.$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$, по равномерной непрерывности найдём $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall x, y \in [a,b] : |x - y| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Возьмём $l = l(\varepsilon)$ такое, что $\mu(P_l) < \delta(\varepsilon)$. Тогда $L\left(f, P_l\right) \leqslant \int_a^b f \leqslant U\left(f, P_l\right)$.

$$U\left(f, P_l\right) - L\left(f, P_l\right) = \sum_{k=1}^{N_l-1} (x_{k+1} - x_k) \left(\sup_{[x_k, x_{k+1}]} f - \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N_l-1} (x_{k+1} - x_k) \max_{x,y\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{N_l-1} (x_{k+1} - x_k)\varepsilon = \varepsilon(b - a).$$

По определению

$$L\left(f, P_l\right) \leqslant S\left(f, P_l, \{y_k\}_{k=1}^{N_l-1}\right) \leqslant U\left(f, P_l\right),$$

а значит

$$\left| S\left(f, P_l, \{y_k\}_{k=1}^{N_l-1}\right) - \int\limits_a^b f \right| < \varepsilon(b - a).$$

Это верно для всех l таких, что $\mu(P_l) < \delta(\varepsilon)$, а значит это неравенство выполнено для любого ε при любых $l \geqslant l(\varepsilon)$. Это равносильно тому, что существует

$$\lim_{k\to\infty} S\left(f, P_k, \{y_{k_m}\}_{m=1}^{N_k}\right) = \int\limits_a^b f. \qquad \blacksquare$$

4.2 Формула Ньютона–Лейбница

Утверждение 4.2.1. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, f непрерывна в точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $x > x_0$,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} f - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x} (f(x)-f(x_0)).$$

Применим основную оценку интеграла, получим

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{x-x_0}{x-x_0} \sup_{y\in[x_0,x]} |f(x_0)-f(x)|,$$

это выражение стремится к 0 при $x \to x_0$, так как f непрерывна в x_0. Значит существует

$$\lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

Аналогично получим, что левый предел существует и равен $f(x_0)$, а значит существует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

$\blacksquare$

Следствие 4.2.2. Если функция $f \in C[a,b]$, то существует F на $[a,b]$ такая, что F дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ при $x \in [a,b]$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_a^x f$. Так как f непрерывна на $[a,b]$, то $F'(x) = f(x)$ на $[a,b]$. $\blacksquare$

Соглашение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $a < b$. Будем обозначать

$$\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f, \qquad F\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Утверждение 4.2.3 (формула Ньютона–Лейбница). Пусть $f \in C[a,b]$. Для любой функции F — первообразной f, верно

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть F — первообразная f, $G(x) = \int_a^x f$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда G — первообразная f, а значит существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in [a, b]$ верно $G(x) - F(x) = c$. Значит $F\Big|_a^b = G\Big|_a^b = \int_a^b f$. ■

Утверждение 4.2.4. Пусть $u, v \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v.$$

Доказательство. uv — это первообразная для $(uv)' = u'v + uv'$. Значит

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b (u'v + v'u) = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

■

Утверждение 4.2.5. Пусть функция $\varphi \in C^1[a, b]$, функция f непрерывна на $\varphi([a, b])$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Доказательство. Пусть G — первообразная для f, $G(\varphi)' = f(\varphi)\varphi'$. Значит

$$\int_a^b f(\varphi)\varphi' = G(\varphi)\Big|_a^b = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

■

4.3 Формула Тейлора с интегральным остатком и остатком в форме Лагранжа

Теорема 4.3.1 (интегральный остаток). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$. Тогда для любого $x \in [a, b]$ выполнено

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(y)\frac{(x - y)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}y.$$

Соглашение. $\int f(x,y)\,\mathrm{d}y$ — это интеграл функции $g(y) = f(x,y)$ при фиксированном x.

Доказательство. Если $n = 1$, то $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(y)\,\mathrm{d}y$ — формула Ньютона-Лейбница. Будем доказывать по индукции. Пусть $n > 1$ и формула доказана для $n-1$. Обозначим

$$u(y) = f^{(n-1)}(y), \qquad v(y) = -\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-2)!}(x-y)^{n-2}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{n-2}(\dots) + \int\limits_{x_0}^{x} u(y)v'(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(\dots) + u(y)v(y)\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} u'(y)v(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(\dots) + u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} u'(y)v(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{n-1}(\dots) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\,\mathrm{d}y.$$

Последнее равенство выполнено, поскольку

$$v(x) = 0, \qquad u(x_0)v(x_0) = \frac{f^{(n-1)(x_0)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

Теорема 4.3.2 (интегральная теорема о среднем). Пусть $f \in C[a,b]$, $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $g \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда существует $t_0 \in [a,b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(t_0)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t) = \int\limits_a^b (f(x) - f(t))g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad F(t) \in C[a,b].$$

Возьмём $t_{\min} \in [a,b]$ такое, что для любого $t \in [a,b]$ $f(t_{\min}) \leqslant f(t)$. Аналогично возьмём $t_{\max}$. Тогда $F(t_{\min}) \leqslant 0, F(t_{\max}) \geqslant 0$, а значит существует t_0 такое, что $F(t_0) = 0$, а это равносильно равенству

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(t_0)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

Теорема 4.3.3 (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n-1}[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $f^{(n-1)}$ дифференцируема на (a,b). Тогда для любого $x \in (a,b)$

верно

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $\xi \coloneqq \xi(x)\in(a,b)$.

Доказательство. Доказываем по индукции.

База: $n=1$. $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ — это теорема Лагранжа о среднем значении.

Переход. Пусть $n>1$, применим формулу Тейлора с интегральным остатком

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n-1)}(y)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}(\dots)+\int\limits_{x_0}^{x}\left(f^{(n-1)}(y)-f^{(n-1)}(x_0)\right)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y+f^{(n-1)}(x_0)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y$$

Отметим, что

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y=-\left.\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}\right|_{x_0}^{x}=\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\int\limits_{x_0}^{x}\left(f^{(n-1)}(y)-f^{(n-1)}(x_0)\right)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f^{(n-1)}(y)-f^{(n-1)}(x_0)}{y-x_0}\cdot(y-x_0)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y$$

Заметим, что

$$\frac{f^{(n-1)}(y)-f^{(n-1)}(x_0)}{y-x_0}\in C[x_0,x],\quad (y-x_0)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\in\mathcal{R}[a,b],\quad (y-x_0)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\geqslant 0,$$

а значит можем воспользоваться интегральной теоремой о среднем.

Продолжим цепочку равенств

$$\sum_{k=0}^{n-2}(\dots)+\int\limits_{x_0}^{x}\left(f^{(n-1)}(y)-f^{(n-1)}(x_0)\right)\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y+f^{(n-1)}(x_0)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(\dots)+\frac{f^{(n-1)}(t_0)-f^{(n-1)}(x_0)}{t_0-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}(y-x_0)\frac{(x-y^{n-2})}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y.$$

Посчитаем отдельно интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x}(y-x_0)\frac{(x-y^{n-2})}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y=(x-x_0)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-2)!}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!} - \frac{(x-x_0)^n}{(n-2)!\cdot n} = \frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Ещё раз вернёмся к нашей цепочке равенств

$$\ldots = \sum_{k=0}^{n-1}(\ldots) + \frac{f^{(n-1)}(t_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{t_0 - x_0} \cdot \frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

При этом

$$\frac{f^{(n-1)}(t_0) - f^{(n-1)}(x_0)}{t_0 - x_0} = f^{(n)}(\xi),\ \ \xi \in (t_0, x_0). \qquad \blacksquare$$

4.4 Равномерная сходимость и перестановка пределов

Определение. Говорят, что f_n *сходятся поточечно* к f на множестве E, и пишут $f_n \to f$, если для любого $x \in E$ существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. На $\varepsilon - \delta$ языке:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in E\ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon, x)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение. Говорят, что f_n *сходятся равномерно* к f на множестве E и пишут $f_n \rightrightarrows f$, если существует $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$. На ε-δ языке:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 4.4.1. Возьмём функцию $f(x)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ такую, что $f(1) = 1$, а на $[0,1)$ f равняется нулю. Последовательность функций $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно к f на отрезке $[0,1]$, но не равномерно.

Теорема 4.4.1 (критерий Коши). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $f_n\colon E \to \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

1. $f_n \rightrightarrows f$ для некоторой $f\colon E \to \mathbb{R}$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon)\ \forall x \in E$.

Доказательство. Докажем, что из первого условия следует второре. Возьмём $N(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall n > N(\varepsilon/2)\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

Тогда при $n, m > N(\frac{\varepsilon}{2})$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Докажем, что второе условие влечёт первое. Для всякого $x \in E$ $f_n(x)$ — последовательность Коши, а значит существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, обозначим его за $f(x)$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$, а также $N(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall n, m > N(\varepsilon/2)\ \forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Зафиксируем $n > N(\varepsilon/2)$ и перейдём к пределу по $m \to \infty$, получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall x \in E. \qquad \blacksquare$$

Определение. Ряд $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ сходится *поточечно* на E, если для любого $x \in E$ существует $\lim_{N\to\infty} S_N(x)$, где $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$.

Ряд $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ сходится *равномерно* на E, если $\{S_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно на E.

Утверждение 4.4.2 (критерий сходимости Коши). Пусть $f_n\colon E \to \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

1. $\sum f_n(x)$ сходится равномерно на E.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall N_1, N_2 > N(\varepsilon)\ \sum_{k=N_1}^{N_2} f_k(x) < \varepsilon,\ \forall x \in E.$

Утверждение 4.4.3 (признак Вейерштрасса). Пусть функции $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ такие, что для любого x верно, что $f_n(x) < a_n$, и $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ сходится. Тогда $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. $\sum a_n$ сходится, значит

$$\forall \varepsilon\ \exists N(\varepsilon) : \forall m \geqslant n > N(\varepsilon)\ \sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon,$$

тогда

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon.$$

Осталось применить критерий Коши. $\blacksquare$

Теорема 4.4.4 (Стокса-Зейделя). Пусть функции $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim_{t\to a} f_n(t)$, где a — предельная точка множества E. Если $f_n \rightrightarrows f$, то существуют $\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to a} f_n(t)$ и $\lim_{t\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, и они равны между собой.

Доказательство. Положим $A_n = \lim_{t\to a} f_n(t)$.

$$|A_n - A_m| \leqslant |A_n - f_n(t)| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - A_m|.$$

Выберем N_1 такое, что

$$\forall n, m \geqslant N_1\ |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon/3,\ \forall t \in E.$$

Возьмём $t \in E$ такое, что $|A_n - f_n(t)| < \varepsilon/3, |A_m - f_m(t)| < \varepsilon/3$. Тогда $|A_n - A_m| < \varepsilon$ Для всех $n, m \geqslant N_1$, значит $\{A_n\}$ — последовательность Коши и существует $\lim_{n\to\infty} A_n = A = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to a} f_n(t)$.

Надо показать, что существует $\lim_{t\to a} f(t) = A$.

$$|f(t) - A| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|.$$

Возьмём N_1 так, что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ для каждого $t \in E$. Выберем $N_2 \geqslant N_1$ так, что для любого $n \geqslant N_2$ верно, что $|A - A_n| < \varepsilon/3$. Также выберем $\delta > 0$ так, чтобы было верно $|f_{N_2}(t) - A_{N_2}| < \varepsilon/3$, для всех $t \in \dot{U}_\delta(a)$. Тогда для любого $t \in \dot{U}_\delta(a)$ выполнено $|f(t) - A| < \varepsilon$, а значит $\lim_{t\to a} f(t) = A$. ■

Следствие 4.4.5. Пусть функции $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in E$, $f_n \rightrightarrows f$ на E. Тогда f непрерывна в точке a.

Доказательство. Если a — изолированная точка, то f в ней непрерывна, это очевидно. Если же a — предельная, то по непрерывности существует $\lim_{t\to a} f_n(t) = f_n(a)$. По теореме Стокса-Зейделя существует

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to a} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

■

Следствие 4.4.6. Пусть функции f_n непрерывны на E, $f_n \rightrightarrows f$. Тогда f непрерывна на E.

Следствие 4.4.7. Пусть $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$. Тогда $f \in \mathcal{R}[a,b]$, при этом

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f.$$

Доказательство. Пусть F_n — множество разрывов f_n, F — множество разрывов f. $F \subset \bigcup F_n$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество F_n имеют меру ноль, а значит $\bigcup F_n$ имеет меру ноль, получается $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leqslant \int_a^b |f - f_n| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f - f_n| = (b-a)\delta_n,$$

$\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит существует

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$ ■

Утверждение 4.4.8. Пусть функции $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$, f_n дифференцируема на $[a,b]$, $f_n' \in C[a,b]$, $f_n' \rightrightarrows g$. Тогда $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$.

Доказательство. Сразу отметим, что $g \in C[a,b]$. $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'$, перейдём к пределу по $n \to \infty$, получим $f(x) - f(a) = \int_a^x g$, а значит для любого $x \in [a,b]$ существует $f'(x) = g(x)$. ■

Пример 4.4.2 (Ван дер Варден). Существует функция $f \in C(\mathbb{R})$ такая, что она не дифференцируемая ни в какой точке прямой.

Доказательство. Рассмотрим 1-периодическую функцию u_0, определённую на интервале $[-1/2, 1/2)$ по правилу

$$u_0(x) = |x|, \qquad x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) ;$$

и семейство функций u_k, выражающихся через u_0:

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}, \qquad k \geqslant 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

$\sum_{k\geqslant 0} u_k(x)$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса, так как $u_k(x) \leqslant \frac{1}{4^k}$, а ряд $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{4^k}$ сходится. Обозначим $f(x) = \sum_{k\geqslant 0} u_k(x)$, тогда $f \in C(\mathbb{R})$, так как это равномерный предел непрерывных функций.

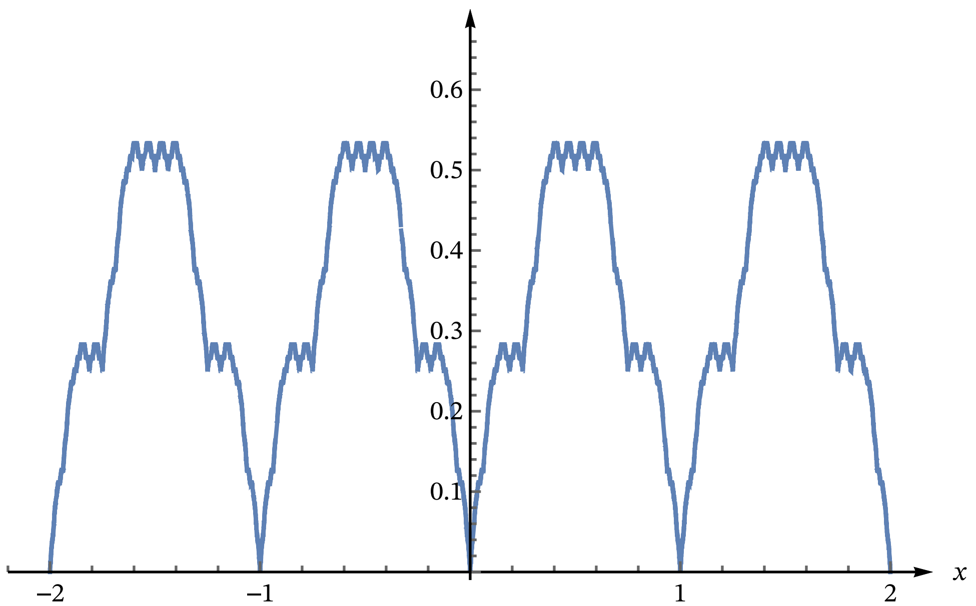

Рис. 4.1: График функции $\sum_{k\geqslant 0} u_k(x)$

Рассмотрим $x_0 \in \mathbb{R}$, построим последовательность целых чисел $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ так, что

$$\frac{S_n}{2\cdot 4^n} \leqslant x_0 < \frac{S_n+1}{2\cdot 4^n}.$$

Обозначим

$$\Delta_n = \left[\frac{S_n}{2\cdot 4^n}, \frac{S_n+1}{2\cdot 4^n}\right].$$

Для каждого n найдём $t_n \in \Delta_n$ такое, что

$$|t_n - x_0| = \frac{|\Delta_n|}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 4^k} = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Рассмотрим

$$\frac{f(t_n) - f(x_0)}{t_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t_n) - u_k(x_0)}{t_n - x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(t_n) - u_k(x_0)}{t_n - x_0},$$

последний переход верен из-за того, что u_k периодична с периодом $\frac{1}{4^k}$. Из строения u_k видно, что при $x, y \in \Delta_k$ $\frac{u_k(x)-u_k(y)}{x-y} \in \{0, 1\}$. Заметим, что при $k \leqslant n$ $\Delta_n \subset \Delta_k$, а значит

$$\frac{u_k(t_n) - u_k(x_0)}{t_n - x_0} \in \{0, 1\}.$$

Предположим, что f дифференцируема в точке x_0, тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(t_n) - u_k(x_0)}{t_n - x_0},$$

а значит существует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{u_k(t_{2n}) - u_k(x_0)}{t_{2n} - x_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{u_k(t_{2n+1}) - u_k(x_0)}{t_{2n+1} - x_0}.$$

При этом эти два предела — нечётное и чётное число соответственно. То есть, мы пришли к противоречию, значит производной в x_0 не существует. ■

Глава 5

Элементарные функции

5.1 Комплексные числа

Определение. Поле *комплексных чисел* $\mathbb{C}$ — это множество $\mathbb{R}^2$ с бинарными операциями

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Теорема 5.1.1. $\mathbb{C}$ — поле.

Доказательство. $0_{\mathbb{C}} := (0,0)$, $-(x,y) := (-x,-y)$, $1_{\mathbb{C}} := (1,0)$, $(x,y)^{-1} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Остальные свойства проверяются тривиально. ∎

Соглашение. Мы будем отождествлять $x \in \mathbb{R}$ и $(x,0) \in \mathbb{C}$. Тогда $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, и сложение, умножение на $\mathbb{R}$, как на подмножестве $\mathbb{C}$, совпадают со стандартными.

Определение. $i := (0,1)$ — *мнимая единица*.

Утверждение 5.1.2. Для любого $z \in \mathbb{C}$ существуют единственные $x, y \in \mathbb{R}$ такие, что $z = x + iy$.

Доказательство. $z \in \mathbb{C}$, а значит $z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x + iy$. ∎

Определение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $\mathrm{Re}(z) := x$ — *вещественная часть* z, $\mathrm{Im}(z) := y$ — *мнимая часть* z, $\overline{z} := x - iy$ — *сопряжённое* к z комплексное число.

Утверждение 5.1.3. Для всякого $z \in \mathbb{C}$ верно

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Определение. $|z| := \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$ — *модуль* z.

Примеры 5.1.1.

1. $|z| \geqslant 0$. $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

2. $|z| = |\overline{z}|$.

3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

4. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$, так как

$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + |z_2|^2.$$

5. $|z_1||z_2| = |z_1z_2|$.

6. $|z| = |-z|$.

7. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1|. + |z_2|$, так как

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1z_2| \geqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1z_2) = |z_1 + z_2|^2.$$

8. $|z_1 - z_3| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$.

Следствие 5.1.4. Определим расстояние между z_1 и z_2 как $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, это расстояние является метрикой благодаря свойствам 1, 6, 8.

Определение. Определим стандартную топологию на $\mathbb{C}$ — $T_{\mathbb{C}}$. Множество $E \subset \mathbb{C}$ будет открытым в этой топологии, если

$$\forall z \in E\ \exists \varepsilon > 0 : B(z, \varepsilon) \subset E,$$

где $B(z, \varepsilon) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |z - \xi| < \varepsilon\}$.

Замечание. Топологическое пространство $(\mathbb{C}, T_{\mathbb{C}})$ хаусдорфово.

Определение. Пусть $z_n \in \mathbb{C}$. $\{z_n\}$ — последовательность Коши в $\mathbb{C}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N\ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Утверждение 5.1.5. Пусть $z_n \in \mathbb{C}$. Последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\{z_n\}$ является последовательностью Коши.

Доказательство. Для всяких $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ верно

$$\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

а значит $\{z_n\}$ — последовательность Коши в $\mathbb{C} \Longleftrightarrow \{\operatorname{Re}(z_n)\}, \{\operatorname{Im}(z_n)\}$ — последовательности Коши в $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \{\operatorname{Re}(z_n)\}, \{\operatorname{Im}(z_n)\}$ сходятся в $\mathbb{R}$. Если $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, то $z_n \to x + iy$ при $n \to \infty$. Дополнительно можно заметить, что в $\mathbb{C}$ верны все арифметические свойства пределов. ∎

5.2 Степенные ряды

Определение. *Степенной ряд* с центром в $z_0 \in \mathbb{C}$ — это

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n,$$

где $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$.

Определение. *Радиус сходимости* ряда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)}.$$

В частности, $R = +\infty$, если $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right) = 0$.

Определение. Ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n$ *абсолютно сходится в точке* z, если сходится ряд

$$\sum_{n\geqslant 0} |c_n(z-z_0)^n|.$$

Лемма 5.2.1 (признак Коши сходимости рядов). Пусть $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$, $q = \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right)$. Тогда, если $q < 1$, то ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ сходится абсолютно, если $q > 1$, то расходится.

Доказательство. Если $q < 1$, то существует $\overline{q}$ такое, что $q < \overline{q} < 1$ и

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \overline{q},\ \forall n > N,$$

а значит $c_n \leqslant \overline{q}^n$, а значит $\sum_{n\geqslant 0} |c_n|$ сходится по признаку Вейерштрасса.

Если $q > 1$, то существует подпоследовательность $\{c_{n_k}\}_{k\geqslant 0} \subset \{c_n\}_{c\geqslant 0}$ такая, что $\sqrt[n]{|c_{n_k}|} \geqslant 1$, а значит $|c_{n_k}| \nrightarrow 0$, то есть ряд расходится. ■

Теорема 5.2.2 (формула Коши–Адамара). Пусть R — радиус сходимости ряда

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n$$

, тогда этот ряд сходится абсолютно для любого z такого, что $|z-z_0| < R$, и расходится, если $|z-z_0| > R$.

Доказательство. Если $|z-z_0| < R$, то посмотрим на ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n$.

$$\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|c_n(z-z_0)^n|}\right) = |z-z_0| \cdot \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|c_n|}\right) = \frac{|z-z_0|}{R} < 1.$$

Значит ряд сходится абсолютно по признаку Коши.

Если $|z-z_0| > R$, то $|c_n(z-z_0)^n| \nrightarrow 0$, а значит ряд не сходится. ■

Теорема 5.2.3. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}, \varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция. Если $\sum_{n>1} |a_n|$ сходится, то $\sum_{n>0} |a_{\varphi(n)}|$ сходится, а так же $\sum a_n = \sum a_{\varphi(n)}$.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$, выберем $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, что $\sum_{n>N} |a_n| < \varepsilon$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что среди $a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(k)}$ содержатся все члены $a_1, \ldots, a_N$. Тогда для любого $m \geqslant k$ верно

$$\left|\sum_{i=0}^{m} a_{\varphi(i)} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{m} a_{\varphi(i)} - \sum_{i=0}^{N} a_i\right| + \left|\sum_{i=0}^{N} a_i - \sum_{i=0}^{\infty} a_i\right| < 2\varepsilon,$$

значит $\sum a_{\varphi(n)}$ сходится к $\sum a_n$.

То же рассуждение верно для модулей. ■

Утверждение 5.2.4. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ — два абсолютно сходящихся ряда,

$$\Phi(i,j) = a_i \cdot b_j \quad (\forall i, j \in \mathbb{Z}_+),$$

$\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ — биекция. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\varphi(n))$ сходится абсолютно, и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\varphi(n)) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Доказательство. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Выберем $K \in \mathbb{N}$ так, что $K \geqslant \max(i,j)$ для всех таких i, j, что $\varphi(n) = (i,j)$ для некоторого $n \leqslant N$. Тогда:

$$\sum_{n=0}^{N} |\Phi(\varphi(n))| \leqslant \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant K} |a_i| \cdot |b_j| = \left(\sum_{i=0}^{K} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{K} b_j\right) < C.$$

Найдём такую биекцию $\psi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, что $\varphi(\psi)$ — квадратная нумерация $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\varphi(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\varphi(\psi(n))) = \lim_{s\to\infty} \sum_{n=0}^{N_s} \Phi(\varphi(\psi(n))),$$

где $\{N_s\}$ — такая последовательность целых неотрицательных чисел, что $\varphi(\psi(N_s)) = (0, s)$. Значит,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} \sum_{n=0}^{N_s} \Phi(\varphi(\psi(n))) &= \lim_{s\to\infty} \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant s} a_i \cdot b_j = \lim_{s\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{s} a_i \cdot \sum_{j=0}^{s} b_j\right) \\ &= \lim_{s\to\infty} \sum_{i=0}^{s} a_i \cdot \lim_{s\to\infty} \sum_{j=0}^{s} b_j = \left(\sum_{0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{0}^{\infty} b_k\right),\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Теорема 5.2.5. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$. Тогда функция

$$f(z)\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

дифференцируема в открытом круге с центром z_0 и радиусом R, и, более того,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (z - z_0)^{n-1},$$

причём радиус сходимости функции $f'(z)$ равен R.

Замечание. Функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке w, если существует предел

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Доказательство.

Лемма 5.2.6. Существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Доказательство. Мы знаем, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $q > 1$ выполнено $n^k = o(q^n)$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : n < (1+\varepsilon)^n,$$

откуда $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ при $n > N$. В то же время $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а потому

$$1 \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

то есть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, что и требовалось. ∎

Следствие 5.2.7. Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n (z - z_0)^{n-1}$$

совпадают.

Доказательство. Действительно, радиусы сходимости этих рядов равны

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{nc_n}},$$

соответственно, а по предыдущей лемме

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{nc_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{c_n}.$$

Значит, радиусы сходимости равны. ∎

Наконец, доказываем теорему 5.2.5. Представим $f(z) = g(z - z_0)$ и рассмотрим $g(z)$. Докажем, что функция $g\colon z \mapsto \sum_0^\infty c_n z^n$ дифференцируема в круге с центром в нуле и радиусом R. Для произвольного $R_1 < R$ рассмотрим такие w, z, что $|w|, |z| < R_1$. Тогда

$$\frac{g(z) - g(w)}{z - w} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n - w^n}{z - w} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot R_1^{n-1} < \infty.$$

Поясним последний переход: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1}$ имеет радиус сходимости R по следствию из леммы 5.2.7, $R_1 < R$, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot R_1^{n-1}$ сходится абсолютно. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}$$

сходится равномерно. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} \lim_{z\to w} \frac{g(z)-g(w)}{z-w} &= \lim_{z\to w} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \\ [\text{Теорема Стокса–Зейделя}] &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \lim_{z\to w} \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot w^{n-1}. \end{aligned}$$

Значит, функция g дифференцируема в точке w, и $g'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot w^{n-1}$. ■

5.3 Экспонента, логарифм и степень

Определение. *Экспонентой* называется функция

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Утверждение 5.3.1. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ бесконечен.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = +\infty \iff \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Оценим:

$$n! = \left(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot n\right) \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \geqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty,$$

что и требовалось. ■

Утверждение 5.3.2. Функция $\exp z$ дифференцируема, и

$$(\exp z)' = \exp z \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. По теореме 5.2.5:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$ ■

Утверждение 5.3.3. $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.

Доказательство. Нетрудно показать[1], что для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k},$$

где $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент.

Рассмотрим диагональную нумерацию $\varphi_d \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ и функцию

$$\Phi\colon (k, j) \mapsto \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^j}{j!}.$$

Тогда

$$\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^j}{j!} = \lim_{s\to\infty} \sum_{n=0}^{N_s} \Phi(\varphi_d(n)),$$

где $\varphi_d(N_s) = (0, s)$. При этом

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} \sum_{n=0}^{N_s} \Phi(\varphi_d(n)) &= \lim_{s\to\infty} \sum_{k,j=0}^{k+j\leqslant s} \frac{z_1^k \cdot z_2^j}{k!j!} = \lim_{s\to\infty} \sum_{m=0}^{s} \sum_{k+j=m} \frac{z_1^k \cdot z_2^j}{k!j!} \\
&= \lim_{s\to\infty} \sum_{m=0}^{s} \frac{1}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z_1^k \cdot z_2^{m-k} \\
&= \lim_{s\to\infty} \sum_{m=0}^{s} \frac{(z_1+z_2)^m}{m!} = \exp(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Утверждение 5.3.4. Функция $\exp(z) \neq 0$ на всём $\mathbb{C}$, причём $\exp(0) = 1$.

Доказательство. Значение $\exp(0)$ вычисляется по определению:

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

[1] Оставляем это читателю в качестве упражнения.

Осталось заметить, что $1 = \exp(0) = \exp(z - z)$, и по утверждению 5.3.3

$$1 = \exp(z - z) = \exp(z) \cdot \exp(-z),$$

откуда $\exp(z) \neq 0$. ■

Определение. *Число* e определяется как значение экспоненты в точке 1:

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in \mathbb{R}.$$

Утверждение 5.3.5. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \exp(n) &= e^n \qquad &\forall n \in \mathbb{Z}_+, \\ \exp(\tfrac{1}{k}) &= \sqrt[k]{e}, \qquad &\forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Доказательство. По утверждению 5.3.3

$$\begin{aligned} &\exp(n) = \exp(1 + \cdots + 1) = (\exp(1))^n = e^n, \\ &\left(\exp(\tfrac{1}{k})\right)^k = \exp\left(\frac{1}{k} \cdot k\right) = \exp(1) = e. \end{aligned}$$

Что и требовалось. ■

Утверждение 5.3.6. Функция $\exp(x)$ является возрастающей биекцией из $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$.

Доказательство. Заметим, что:

- $\exp(x) > 0$ на $[0, +\infty)$, так как

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant 1 \qquad \forall x \geqslant 0;$$

- $\exp(x) > 0$ на всём $\mathbb{R}$, поскольку

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0 \qquad \forall x > 0;$$

- $\exp(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$, потому что $(\exp x)' = \exp(x) > 0$ на $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, так как $\exp(x) > x$ при $x \geqslant 0$;
- наконец, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, поскольку $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Отсюда легко понять, что $\exp(x)$ — биекция из $\mathbb{R}$ на $[0, +\infty)$. ■

Определение. *Логарифм* $\log$ определяется как обратная к $\exp|_{\mathbb{R}}$ функция. Таким образом, $\log$ определён на луче $(0, \infty)$ и принимает значения в $\mathbb{R}$.

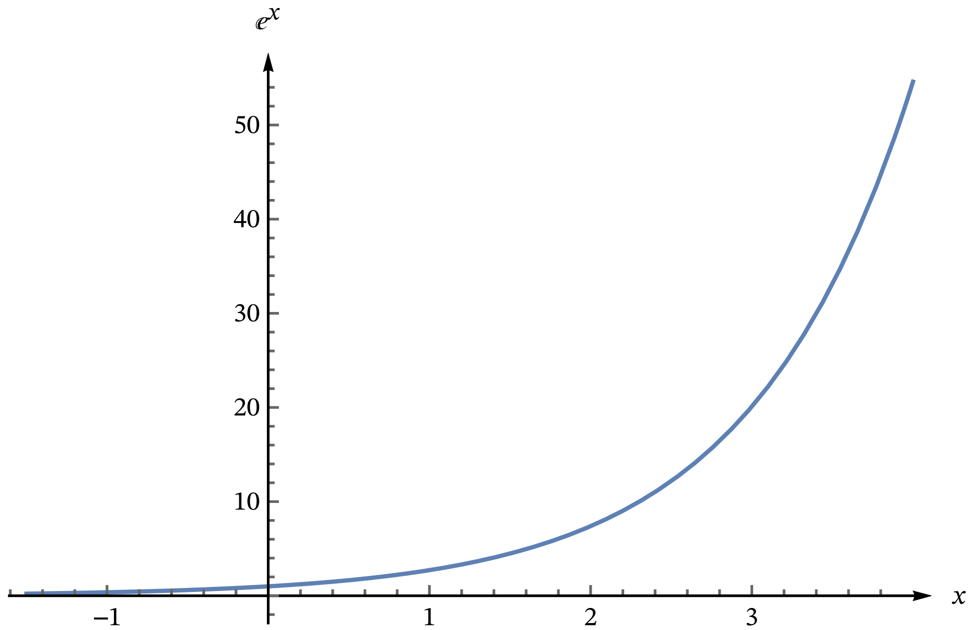

Рис. 5.1: График экспоненты

Определение. Для любого $a > 0$ *комплексная степень* определяется по правилу

$$a^z := \exp(z \log(a)) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Утверждение 5.3.7. Выполнены равенства

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1} \cdot a^{z_2},$$
$$e^z = \exp z.$$

Доказательство.

- По определению $a^{z_1+z_2} = \exp((z_1+z_2)\log(a))$, а по основному свойству экспоненты 5.3.3

$$\exp((z_1+z_2)\log(a)) = \exp(z_1 \log(a)) \cdot \exp(z_2 \log(a)) = a^{z_1} \cdot a^{z_2}.$$

- Так как $e = \exp(1)$, $\log e = 1$, а потому

$$e^z = \exp(z \log(e)) = \exp z. \qquad \blacksquare$$

Утверждение 5.3.8. $\log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$.

Доказательство. Так как exp — биекция,

$$\begin{aligned} \log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) + \log(x_2) &\iff \exp(\log(x_1 \cdot x_2)) = \exp(\log(x_1) + \log(x_2)) \\ &\iff x_1 \cdot x_2 = \exp(\log(x_1)) \cdot \exp(\log(x_2)), \end{aligned}$$

а последнее верно по определению. ■

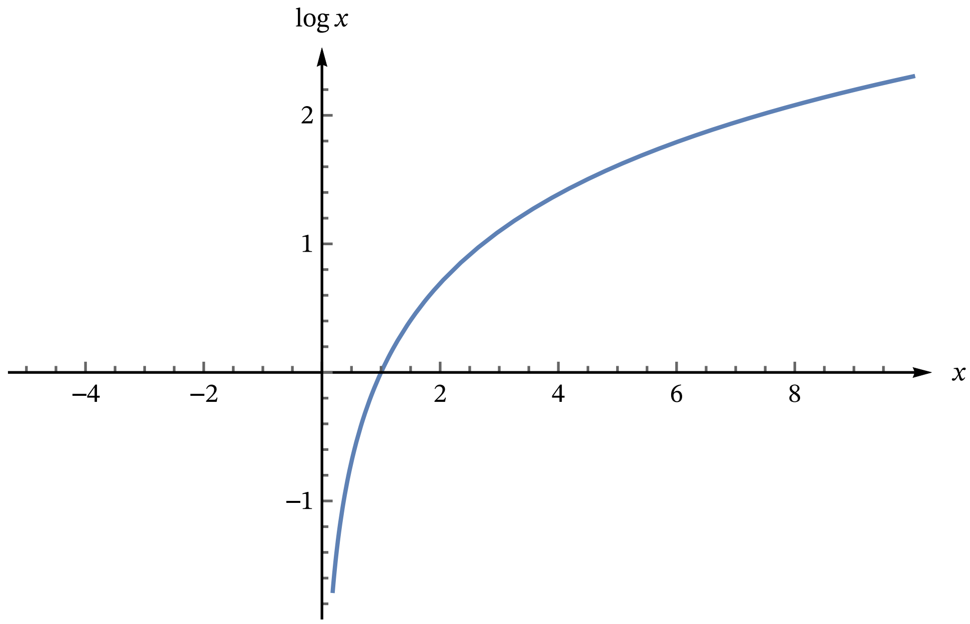

Рис. 5.2: График логарифма

Утверждение 5.3.9. log — дифференцируемая функция, причём $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Доказательство. Так как e^x — биекция из $[a, b]$ на $[e^a, e^b]$, и $(e^x)' \neq 0$, то на $[e^a, e^b]$ существует производная $(\log y)'$, и по правилу дифференцирования обратной функции

$$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)'}\bigg|_{x=\log(y)} = \frac{1}{y}. \qquad \blacksquare$$

Теорема 5.3.10. Для всех вещественных α выполняется:

(1) $x^\alpha = o(e^x)$ при $x \to \infty$,

(2) $\log x = o(x^\alpha)$ при $x \to \infty$,

(3) Существует предел $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$,

(4) Существует предел $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Доказательство.

(1) Достаточно показать, что $x^k = o(e^x)$ для натурального k (тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ будет доказано более сильное утверждение, а именно при k, равном $\lceil\alpha\rceil + 1$). Итак, пусть $k \in \mathbb{N}$, имеем:

$$x^k = o(e^x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.$$

При $x \geqslant 0$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geqslant \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

а потому
$$\frac{x^k}{e^x} \leqslant \frac{(k+1)!}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(2) По определению o малого,
$$\log x = o(x^\alpha) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \iff \lim_{x\to\infty} \frac{\log x^\alpha}{\alpha x^\alpha} = 0.$$
Обозначим $t := x^\alpha$. Хотим доказать, что $\lim_{t\to\infty} \log t/t = 0$. Так как exp — возрастающая биекция, это равносильно равенству
$$\lim_{s\to\infty} \frac{\log e^s}{e^s} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^s} = 0,$$
то есть отношению $s = o(e^s)$ — а это первое утверждение теоремы.

(3) Заметим, что
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0 \iff \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \log x^\alpha}{\alpha} = 0.$$
Сделав замену $t := x^\alpha$, получим $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\alpha} \cdot t \log t = 0$, что равносильно равенству $\lim_{t\to 0} t \log t = 0$. Поскольку $\log t = -\log \frac{1}{t}$ по утверждению 5.3.8, это можно переписать как $\lim_{t\to 0} -t \log \frac{1}{t} = 0$. Обозначим $y := \frac{1}{t}$. Таким образом, требуется доказать, что $\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y} = 0$, или, что то же самое, что $\log y = o(y)$ — мы получили второе утверждение теоремы.

(4) По определению степени,
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \log(1+\frac{1}{x})}.$$
Воспользуемся формулой Тейлора:
$$\log(1+t) = \log 1 + t \cdot (\log(1+t))' \,|_{t=0} + o(t) = t + o(t) \quad \text{при } t \to 0.$$
Значит,
$$x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + o(1) \quad \text{при } x \to \infty.$$
Таким образом,
$$\lim_{x\to\infty} e^{x\log(1+\frac{1}{x})} = e,$$
что и требовалось. ■

5.4 Тригонометрические функции

Определение. *Синусом* и *косинусом* называются функции, определённые формулами
$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

соответственно.

Утверждение 5.4.1 (простейшие свойства тригонометрических функций).

(1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ для всех $x \in \mathbb{C}$.

(2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (*основное тригонометрическое тождество*).

(3) $\sin z, \cos z$ — бесконечно-дифференцируемые функции, причём

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(4) *Формулы синуса и косинуса суммы*:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.\end{aligned}$$

(5) *Синус и косинус двойного угла*:

$$\begin{aligned}&\sin(2z) = 2\sin z \cdot \cos z,\\ &\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z.\end{aligned}$$

(6) Синус и косинус принимают вещественные значения на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

(1) Очевидно.

(2) Элементарные вычисления:

$$\frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{4} = \frac{4e^{iz}\cdot e^{-iz}}{4} = 1.$$

(3) Достаточно воспользоваться простейшими правилами дифференцирования:

$$\begin{aligned}(\sin z)' &= \frac{(e^{iz}-e^{-iz})'}{2i} = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z,\\ (\cos z)' &= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})'}{2} = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\sin z.\end{aligned}$$

(4) Возьмём правую часть и преобразуем её:

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\cdot\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} + \frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\cdot\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} =\\ = \frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i} &+ \frac{e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}}{4i} + \frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\beta-\alpha)}}{4i} + \frac{e^{i(\beta-\alpha)}-e^{-i(\beta-\alpha)}}{4i} =\\ &= \sin(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

Формулу для косинуса можно вывести, например, так:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= (\sin(\alpha+\beta))'\,|_\alpha = (\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha)'\,|_\alpha \\ &= \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot(-\sin\alpha) \\ &= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}$$

(5) Формулы двойного угла легко выводятся из формул для суммы (пункта 4), так как $\sin 2x = \sin(x+x)$ и $\cos 2x = \cos(x+x)$.

(6) Действительно,

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix}-\overline{e^{ix}}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{ix}) \in \mathbb{R},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix}+\overline{e^{ix}}}{2} = \operatorname{Re}(e^{ix}) \in \mathbb{R},$$

что и требовалось. ■

Утверждение 5.4.2. Существует такое $x_0 > 0$, что $\cos x_0 = 0$ и $\cos x \neq 0$ на интервале $[0, x_0)$.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда $\cos x$ положителен на $\mathbb{R}_+$, следовательно, $\sin x$ строго возрастает на $\mathbb{R}_+$ так как $\sin' x = \cos x$. В частности, $\sin 1 > \sin 0 = 0$. По интегральной теореме о среднем значении 4.3.2, для любого $y \in [1, +\infty)$ существует такое $\xi \in [1, y]$, что

$$\int_1^y \sin x\,\mathrm{d}x = (y-1)\sin\xi.$$

Так как $\sin x$ строго возрастает на $\mathbb{R}_+$, имеем оценку

$$(y-1)\sin\xi \geqslant (y-1)\sin 1.$$

Наконец,

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1 \implies |\cos x| \leqslant 1 \implies \left|\int_1^y \sin x\,\mathrm{d}x\right| = \big(|-\cos x|\big)\Big|_1^y \leqslant 2$$

Таким образом,

$$(y-1)\sin 1 \leqslant 2 \qquad (\forall y \geqslant 1),$$

что, очевидно, неверно. Противоречие.

Значит, множество $E := \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\}$ непусто. Функция $\cos x$ непрерывна, поэтому E замкнуто, и, следовательно, множество $E \cap [0, \infty)$ тоже замкнуто, в частности, оно содержит минимум. Этот минимум и есть искомое x_0. ■

Определение. *Числом π* называют удвоенное значение x_0 из предыдущего утверждения:

$$\pi := 2x_0.$$

Утверждение 5.4.3. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Доказательство. Равенство $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ выполнено по определению числа π. По основному тригонометрическому тождеству $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. Далее, $\cos x \neq 0$ на интервале $[0, \frac{\pi}{2})$ по определению π, в точках 0 и $\frac{\pi}{2}$ косинус неотрицателен. Поскольку косинус — непрерывная функция, отсюда следует, что $\cos x > 0$ на $[0, \frac{\pi}{2})$. Так как $\cos x$ — производная $\sin x$, то $\sin x$ возрастает на $[0, \frac{\pi}{2})$, поэтому $\sin\frac{\pi}{2} \geqslant 0$. Таким образом, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, что и требовалось. ∎

Из предыдущего утверждения и формул двойного угла получаем:

$$\sin\pi = 2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin 2\pi = 0,$$
$$\cos\pi = 2\cos^2\frac{\pi}{2} - 1 = -1, \qquad \cos 2\pi = 0.$$

Утверждение 5.4.4. $e^{z_1} = e^{z_2}$ тогда и только тогда, когда $z_1 - z_2 = i(2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Ясно, что $e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{z_1 - z_2} = 1$. Таким образом, достаточно показать, что

$$e^z = 1 \iff z = 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $z = 2\pi i k$. Если k неотрицательное, имеем

$$e^z = e^{2\pi i k} = (\cos 2\pi + i\sin 2\pi)^k = 1.$$

Иначе получаем, что

$$e^{2\pi i k} = \overline{e^{-2\pi i k}} = \overline{1} = 1,$$

что и требовалось.

Наоборот, предположим, что $e^z = 1$. Тогда

$$|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z}| = 1, \quad \text{то есть} \quad |e^{\operatorname{Re} z}| = 1, \operatorname{Re} z = 0.$$

Таким образом, z имеет вид

$$z = ix, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мы уже выяснили, что $e^{2\pi i k} = 1$ для всех целых k, откуда следует, что функция e^{ix} 2π-периодична. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $x \in [0, 2\pi)$. Если $x = 0$, то утверждение доказано. Предположим, что $0 < x < 2\pi$. Положим $y := \frac{x}{4}$, $e^{iy} := t_1 + i\cdot t_2$. Так как $0 < y < \frac{\pi}{2}$, то

$$t_1 = \cos y \neq 0, 1, \quad t_2 = \sin y \neq 0, 1.$$

В то же время

$$1 = e^{ix} = (e^{iy})^4 = (t_1 + i\cdot t_2)^4 = t_1^4 + t_2^4 - 6t_1^2t_2^2 + i\cdot 4t_1t_2(t_1^2 - t_2^2) \implies 4t_1t_2(t_1^2 - t_2^2) = 0.$$

Так как $t_1, t_2 \neq 0$, то из последнего равенства следует, что

$$t_1^2 = t_2^2 \implies 1 = 2t_1^4 - 6t_1^4 = -4t_1^4 \implies t_1^4 < 0.$$

Таких $t_1 \in \mathbb{R}$, для которых последнее неравенство верно, не существует. Противоречие. Значит, $x = 0$, что и требовалось. ■

Утверждение 5.4.5. Синус и косинус 2π-периодичны, причём 2π — наименьший период, то есть

$$\begin{aligned} \cos(x+T) = \cos x \ \ \forall x \in \mathbb{R} &\iff T = 2\pi k, \\ \sin(x+T) = \sin x \ \ \forall x \in \mathbb{R} &\iff T = 2\pi k, \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $T = 2\pi k$. По утверждению 5.4.4 верно $e^x = e^{x+T}$, откуда следует, что

$$\operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{i(x+T)}), \quad \operatorname{Im}(e^{ix}) = \operatorname{Im}(e^{i(x+T)}) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

то есть

$$\cos x = \cos(x+T), \quad \sin x = \sin(x+T).$$

Если же $\cos x = \cos(x+T)$, то можно продифференцировать это равенство:

$$-\sin x = -\sin(x+T).$$

Следовательно,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x = \cos(x+T) + i\sin(x+T) = e^{i(x+T)}.$$

Тогда по утверждению 5.4.4 получаем $T = 2\pi k$. ■

Утверждение 5.4.6. $\cos x, \sin x$ — биекции из $[0, \frac{\pi}{2}]$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Эти функции строго монотонны, непрерывны, и

$$\begin{aligned} \cos 0 = 1, &\quad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0; \\ \sin 0 = 0, &\quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Значит, они биективны. ■

Утверждение 5.4.7. e^{ix} — биекция полуинтервала $[0, 2\pi)$ на окружность

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \mathbb{T}.$$

Доказательство.

- Все значения, которые принимает функция e^{ix} на множестве $[0, 2\pi)$, лежат на единичной окружности $\mathbb{T}$.

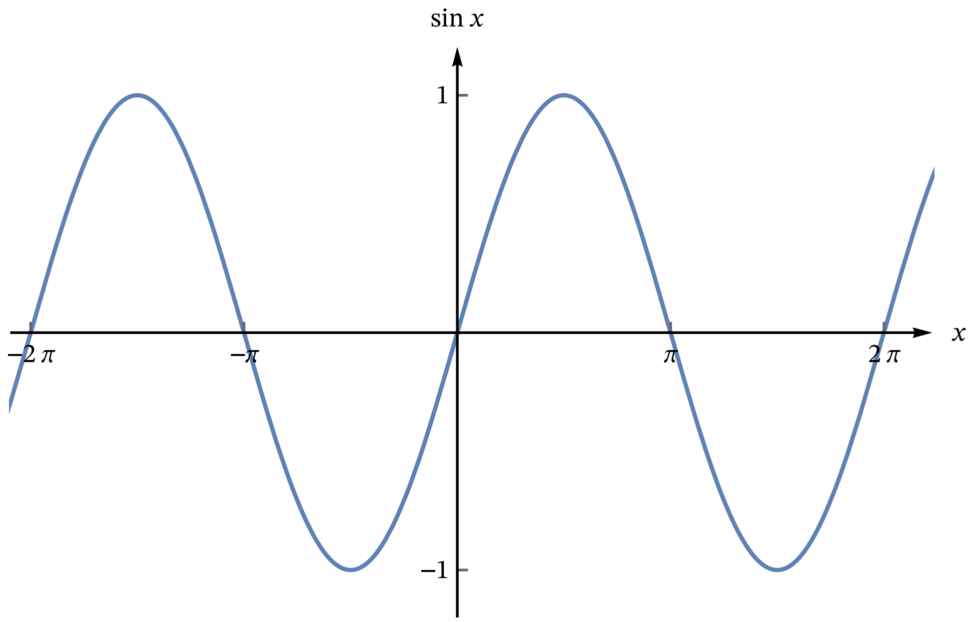

Рис. 5.3: График синуса

- Пусть для каких-то $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$ имеет место равенство $e^{ix_1} = e^{ix_2}$. По утверждению 5.4.4 отсюда следует, что $(x_1 - x_2) = 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Так как $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$, то имеем $x_1 = x_2$, то есть e^{ix} — инъекция.

- Рассмотрим первую четверть единичной окружности

$$\mathbb{T}_{\frac{1}{4}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Для произвольного $z \in \mathbb{T}_{\frac{1}{4}}$ посмотрим на $x := \operatorname{Re} z, y := \operatorname{Im} z$. Так как $z \in \mathbb{T}$, то есть $|z| = 1$, то $x^2 + y^2 = 1$, причём $x > 0, y > 0$, а значит $0 < x < 1$. Далее, $\cos x$ — биекция $[0, \frac{\pi}{2})$ на $[0, 1)$ по утверждению 5.4.6, в частности,

$$\exists \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}) : \cos\varphi = x.$$

Итак,

$$\begin{cases} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ \cos\varphi = x. \end{cases}$$

Отсюда легко понять, что $y = \pm\sin\varphi$. Кроме того, $\sin\varphi > 0$, так как $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ и $y > 0$. Таким образом, $y = \sin\varphi$, поэтому

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Таким образом, $\mathbb{T}_{\frac{1}{4}}$ содержится в образе e^{ix}. Из аналогичных рассуждений для остальных четвертей окружности получаем, что e^{ix} — сюръекция на $\mathbb{T}$. ■

Определение. Пусть даны функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и такие $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, что $a < a_1 <$

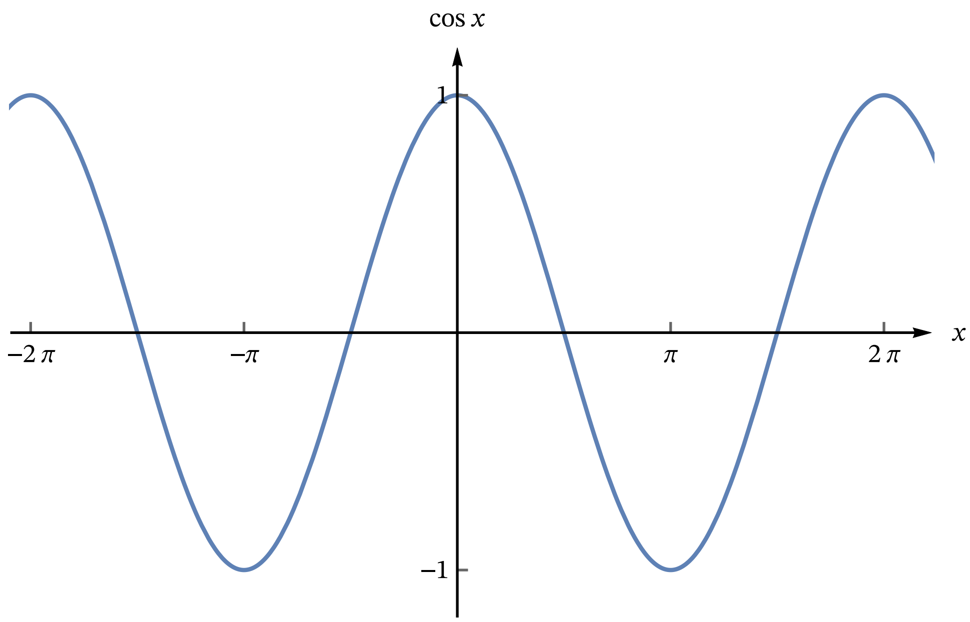

Рис. 5.4: График косинуса

$b_1 < b$. *Секущая* графика функции f в точках $(a_1, f(a_1))$, $(b_1, f(b_1))$ — это отображение

$$y\colon x \mapsto f(a_1) \cdot \frac{x - b_1}{a_1 - b_1} + f(b_1) \cdot \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}.$$

Определение. Пусть имеются функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in [a,b]$. *Касательная* к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ — такое отображение

$$y\colon x \mapsto kx + b,$$

что

$$y(x_0) = f(x_0), \quad y(x) - f(x) = o(|x - x_0|) \quad \text{при } x \to x_0,$$

если оно существует.

Утверждение 5.4.8. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, график f имеет касательную y в точке $(x_0, f(x_0))$. Тогда функция f дифференцируема в точке x_0, и касательная имеет вид

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Наоборот, если функция f дифференцируема в точке x_0, то она имеет касательную в точке $(x_0, f(x_0))$.

Доказательство. Прямая $y(x)$ является касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ тогда и только тогда, когда y имеет вид

$$y(x) = k(x - x_0) + f(x_0), \quad \text{и} \;\; y(x) - f(x) = o(|x - x_0|) \;\; \text{при } x \to x_0.$$

Другими словами,

$$\exists k \in \mathbb{R} : f(x_0) + k(x - x_0) - f(x) = o(|x - x_0|) \;\; \text{при } x \to x_0$$

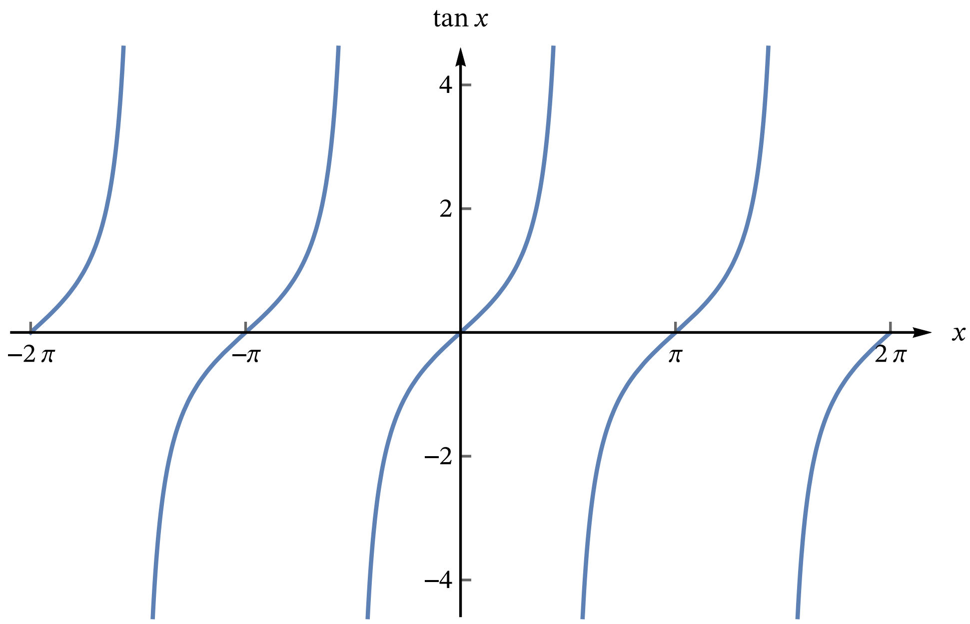

Рис. 5.5: График тангенса

$$\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + o(1), \quad x \to x_0.$$

Значит, функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = k$. ■

Утверждение 5.4.9. Если функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ выпукла, $\varphi \in C^1[a,b]$, то

$$\varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) \leqslant^{(1)} \varphi(x) \leqslant^{(2)} \varphi(a)\frac{x-b}{a-b} + \varphi(b)\frac{x-a}{b-a}$$

для всех $x, x_0 \in [a,b]$.

Доказательство.

(1) Утверждение равносильно тому, что $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \geqslant \varphi'(x_0)$.

(2) По определению выпуклости для всех таких $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, справедливо неравенство

$$\varphi(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \leqslant \lambda_1\varphi(a) + \lambda_2\varphi(b).$$

Подставив $\lambda_1 := \frac{x-b}{a-b}$, $\lambda_2 := \frac{x-a}{b-a}$, получим требуемое неравенство. ■

Утверждение 5.4.10.

- $\sin x \leqslant x$ для всех $x \geqslant 0$;
- $e^x \geqslant x + 1$ на всём $\mathbb{R}$;
- $\log(1+x) \leqslant x$ при $x > -1$;
- $\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}$, если $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Доказательство.

- x — касательная к $\sin x$ в точке $(0,0)$, $\sin x$ — вогнутая функция на отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$, тогда неравенство выполнено на отрезке $[0,\pi/2]$, на интервале $[\pi/2,+\infty]$ оно выполнено, потому что на нём
$$x \geqslant \pi/2 > 1 \geqslant \sin x;$$
- $1+x$ — касательная к e^x в точке $(0,1)$, e^x — выпуклая функция;
- x — касательная к $\log(1+x)$ в точке 0, а $\log(1+x)$ — вогнутая функция на интервале $(-1,0)$;
- $\frac{2x}{\pi}$ — секущая $\sin x$ в точках $(0,0)$ и $(\frac{\pi}{2},1)$. ■

5.5 Ряды Тейлора некоторых функций

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $a \in E$, $f \in C^\infty(E)$. *Рядом Тейлора* f в точке a называется ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Утверждение 5.5.1. Пусть $\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$ — степенной ряд с радиусом сходимости R. Тогда ряд Тейлора функции $f(z)=\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n$ в точке a совпадает с самим рядом.

Доказательство. Обозначим $B(a,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ — открытый шар с центром в точке a и радиусом R. Тогда f бесконечно дифференцируема в $B(a,R)$, а также верно, что
$$f^{(k)}(z) = k! \cdot c_k + (k+1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot c_{k+1}(z-a) + \ldots \implies$$
$$f^{(k)}(a) = k! \cdot c_k \implies c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$
что и требовалось. ■

Утверждение 5.5.2. Справедливы следующие равенства:

1. $e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$,
2. $\sin z = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
3. $\cos z = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Доказательство.

1. Выполняется по определению.

2. Действительно,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(iz)^n}{n!} - \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-i^{2n+2}z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. Аналогично,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(iz)^n}{n!} + \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$ ■

Утверждение 5.5.3. Для всех действительных x, по модулю меньших единицы, верно

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Доказательство. Заметим, что для любого $\delta < 1$ ряд $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ сходится равномерно на отрезке $[-\delta, \delta]$ по признаку Вейерштрасса. В самом деле,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\delta^n.$$

Аналогично, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}$ сходится равномерно на отрезке $[-\delta, \delta]$. Применим к f теорему 5.2.5:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

Таким образом, функция f непрерывно-дифференцируема на интервале $(-1, 1)$, и

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (\log(x))'.$$

Более того,

$$f(0) = 1 = \log(0).$$

Следовательно, $\log x = f(x)$ на всём интервале $(-1, 1)$. ■

Пример 5.5.1. Рассмотрим функцию $f\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R},$. Понятно, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Тем не менее, радиус сходимости этого ряда равен 1, хотя функция непрерывна на всей вещественной оси.

Пример 5.5.2. Рассмотрим такую функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Утверждение 5.5.4. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, ряд Тейлора функции сходится всюду, но не к f, за исключением точки $x = 0$.

Доказательство. $\frac{1}{x^2}, e^{-x}$ дифференцируемы при $x \neq 0$, поэтому $f(x)$ дифференцируема при $x \neq 0$ как композиция дифференцируемых. $f'(0) = 0$, поскольку

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = 0 \iff \lim_{t\to\infty} e^{-t^2} t = 0 \iff \sqrt{t} = o(e^t),$$

а последнее справедливо по утверждению 5.3.10. Аналогично, для всех натуральных k существует $f^{(k)}(0) = 0$, следовательно, ряд Тейлора f в нуле равен нулю. ■

5.6 Алгебраическая замкнутость $\mathbb{C}$

Теорема 5.6.1. Пусть p — многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ степени хотя бы 1. Тогда существует такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $p(z_0) = 0$.

Доказательство.

Лемма 5.6.2 (формула Муавра). Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существуют и единственны такие $r \in (0, +\infty]$, и $\varphi \in [0, 2\pi)$, что выполнено $z = re^{i\varphi}$, и, более того, выполнено равенство

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Доказательство. Так как $z \neq 0$, то $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$. Тогда в качестве r возьмём $|z|$. Далее,

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1, \implies \exists!\, \varphi \in [0, 2\pi) : \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}.$$

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Единственность проверяется тривиально. ■

Лемма 5.6.3. Пусть p — многочлен. Тогда существует такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что для любого $z \in \mathbb{C}$

$$|P(z_0)| \leqslant |P(z)|$$

Доказательство. Рассмотрим $M := \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$ и такую последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $|p(z_k)| \to M$ при $k \to \infty$. Заметим, что $\{z_k\}$ ограничена, так как иначе выберем подпоследовательность $\{z_{k_n}\}$ такую , что $z_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, и представим многочлен в виде $p(z) = \sum_{t=0}^{s} c_t z^t$, где $c_s \neq 0$. Тогда при $|z_{k_n}| > 1$

$$|p(z_{k_n})| \geqslant |c_s||z_{k_n}^s| - \sum_{t=0}^{s-1} |c||z_{k_n}^t| \geqslant |c_s||z_{k_n}^s| - \left(\sum_{t=0}^{s-1} |c_t|\right) \cdot |z_{k_n}|^{s-1}$$
$$= |z_{k_n}|^{s-1} \cdot \left(|c_s||z_{k_n}| - \sum_{t=0}^{s-1} |c_t|\right) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Но с другой стороны последовательность $|p(z_{n_k})|$ ограничена, так как сходится к M. Так как $\{z_k\}$ ограничена, $x_k := \operatorname{Re} z_k, y_k := \operatorname{Im} z$ ограничены, то у них есть сходящиеся подпоследовательности. Последовательности $\{x_{k_n}\}, \{y_{k_n}\}$ сходятся, следовательно, $z_{k_n} \to z_0$ при $n \to \infty$ для некоторого z_0. $p(z_{k_n}) \to p(z_0)$, с другой стороны, $p(z_{k_n}) \to M$, откуда следует, что $p(z_0) = M$, что и требовалось. ■

Доказываем теорему 5.6.1. Пусть p — многочлен, точка $z_0 \in \mathbb{C}$ такая, что

$$|p(z_0)| \leqslant |p(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Предположим, $p(z_0) \neq 0$. Тогда рассмотрим многочлен

$$q(z) := \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}.$$

Легко видеть, что q имеет корень тогда и только тогда, когда p имеет корень. Более того,

$$q(0) = 1, \ |q(z)| \geqslant 1 \quad (\forall z \in \mathbb{C}). \tag{$\star$}$$

Пусть многочлен q записывается как $q(z) = 1 + a_k z^k + \ldots + a_n z^n$, причём $k \geqslant 1$ и $a_k \neq 0$. Также найдём такие $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ и $\rho_k > 0$, что $a_k = \rho_k \cdot e^{i\varphi_k}$. Наконец, выберем $\varphi \in \mathbb{R}$ так, что $\varphi_k + k\varphi = \pi$ и рассмотрим многочлен

$$g(r) := q(r \cdot e^{i\varphi}) = 1 + \rho_k \cdot r^k \cdot e^{i(\varphi_k + k\varphi)} + r^{k+1}\widetilde{g}(r).$$

Из условия $\varphi_k + k\varphi = \pi$ следует, что

$$g(r) = 1 + \rho_k r^k e^{i\pi} + r^{k+1}\widetilde{g}(r) = 1 - \rho_k r^k + r^{k+1}\widetilde{g}(r) = 1 - r^k(\rho_k - r\widetilde{g}(r)).$$

Обозначим

$$\widetilde{M} := \max_{0 \leqslant r \leqslant 1} |\widetilde{g}(r)|,$$

и найдём такое $r' \in (0,1)$, что $\rho_k - r'\widetilde{g}(r') > \frac{\rho_k}{2}$ (например, возьмём $r' := \frac{\rho_k}{2\widetilde{M}}$, если $\widetilde{M} \neq 0$; иначе подойдёт $r' := \frac{1}{2}$). Тогда

$$|q(r'e^{i\varphi})| = |1 - r^k(\rho_k - r\widetilde{g}(r))| \leqslant 1 - r'^k(\rho_k - r'\widetilde{M}) < 1.$$

Значит, $|q(r'e^{i\varphi})| < 1$, что противоречит ($\star$). ■

Следствие 5.6.4. Для любого многочлена p с коэффициентами из $\mathbb{C}$ степени $n \geqslant 1$ существуют такие комплексные $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, c$, что

$$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n).$$

Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ тривиальна. Далее, пусть $n > 1$, тогда

$$p(z) = \frac{p(z) - p(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0),$$

где z_0 — корень p, существующий по теореме 5.6.1. А $\frac{p(z)-p(z_0)}{z-z_0}$ — многочлен степени $n - 1$, так как является линейной комбинацией слагаемых вида $z^k - z_0^k$, которые в свою очередь делятся в на $z - z_0$ как многочлены. Тогда по предположению индукции он раскладывается на произведение линейных многочленов и константу. ∎

Глава 6

Начала многомерного анализа и приложения интеграла

6.1 Функции ограниченной вариации

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $f\colon [a,b] \to X$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. *Вариацией функции* f называется величина

$$\operatorname{var}(f, [a,b]) := \sup_{a \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant b} \sum_{k=1}^{n-1} d(f(t_k), f(t_{k+1})).$$

Определение. Говорят, что f — *функция ограниченной вариации*, если

$$\operatorname{var}(f, [a,b]) < +\infty.$$

Утверждение 6.1.1. Пусть функция $f\colon [a,b] \to X$ имеет ограниченную вариацию. Тогда для всех точек x на отрезке $[a,b]$ имеют место следующие оценки:

1. $\operatorname{var}(f, [a,x]) < +\infty$,

2. $\operatorname{var}(f, [a,x]) \geqslant 0$,

3. $\operatorname{var}(f, [a,b]) = \operatorname{var}(f, [a,x]) + \operatorname{var}(f, [x,b])$.

Доказательство. Очевидно. ∎

Следствие 6.1.2. Если $f\colon [a,b] \to X$ — функция ограниченной вариации, то функция g, определённая по правилу

$$g(x) := \operatorname{var}(f, [a,x])$$

нестрого возрастает и ограничена.

Теорема 6.1.3. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Следующие утверждения равносильны:

1. $\operatorname{var}(f, [a,b]) < +\infty$,

2. Существуют такие возрастающие ограниченные функции f_1, f_2, что $f = f_1 - f_2$.

Доказательство. Можно считать, что $f(0) = 0$.

Представим f в виде вот такой разности:

$$f(x) = \mathrm{var}(f, [a, x]) - \big(\mathrm{var}(f, [a, x]) - f(x)\big).$$

$\mathrm{var}(f, [a, x])$ возрастает по следствию 6.1.2, осталось доказать возрастание функции $\mathrm{var}(f, [a, x]) - f(x)$. Рассмотрим произвольные $x_1, x_2 \in [a, b]$, и пусть $x_1 < x_2$. Имеем:

$$\mathrm{var}(f, [a, x_1]) - f(x_1) \leqslant \mathrm{var}(f, [a, x_2]) - f(x_2) \iff \\ f(x_2) - f(x_1) \leqslant \mathrm{var}(f, [a, x_2]) - \mathrm{var}(f, [a, x_1]) = \mathrm{var}(f, [x_1, x_2]),$$

где последнее неравенство верно по определению вариации.

Достаточно показать, что если f — ограниченная возрастающая функция, то $\mathrm{var}(f, [a, b]) < +\infty$. Действительно, для монотонной функции

$$\mathrm{var}(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$ ■

Следствие 6.1.4. Функции ограниченной вариации имеют не более, чем счётное число разрывов и интегрируемы по Риману.

6.2 Пространство $\mathbb{R}^n$ и векторнозначные функции.

Определение. Рассмотрим стандартное n-мерное евклидово пространство

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Понятно, что $\mathbb{R}^n$ является линейным пространством. Определим на нём следующие операции над векторами:

- *Сумма двух векторов* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор $x + y$, определённый по правилу
$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

- *Умножение вектора* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *на скаляр* $\alpha \in \mathbb{R}$ — такой вектор αx, что
$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

- *Скалярное произведение векторов* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — вещественное число (x, y), удовлетворяющее равенству
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

- *Норма вектора x* — неотрицательное вещественное число $\|x\|$, определённое по формуле
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Утверждение 6.2.1. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, а также $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;
4. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
5. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ — *неравенство Коши–Буняковского–Шварца.*

Доказательство. Свойства 1 – 4 очевидны, докажем свойство 5.

Нужно проверить, что для любых наборов $\{x_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}, \{y_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ выполняется неравенство
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2.$$
Оценим:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k|\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \frac{|y_k|}{|x_k|}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2}\frac{|y_k|}{|x_k|}\right)^2 \cdot \left(\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2\right)^2.$$
Обозначим
$$\lambda_k := \frac{|x_k|^2}{\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2}.$$
Тогда, очевидно, $\lambda_k \in [0,1]$ и $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. Далее, так как x^2 — выпуклая функция, к ней можно применить неравенство Йенсена:
$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{|y_k|}{|x_k|}\right)^2 \cdot \left(\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2\right)^2 &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|\frac{y_k}{x_k}\right|^2\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2} \left|\frac{y_k}{x_k}\right|^2\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{n}|x_m|^2\right)^2 \\ &= \sum_{m=1}^{n}|x_m|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}|y_k|^2.\end{aligned}$$
Что и требовалось доказать. ∎

Следствие 6.2.2. Для нормы выполнено неравенство треугольника:
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. По определению $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y)$, распишем по линейности:

$$(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

■

Следствие 6.2.3. Верно следующее неравенство:

$$\|x-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\|, \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. $x - z = (x-y) + (y-z)$, применим предыдущее следствие. ■

Замечание. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ — метрическое пространство с метрикой

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Топология, порождённая метрикой d называется *стандартной топологией на* $\mathbb{R}^n$. С этой метрикой $\mathbb{R}^n$ является *полным метрическим пространством*[1], то есть выполнен критерий сходимости Коши.

Определение. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E, $a \in E$. Пусть также существует предел

$$f'(a) := \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Тогда вектор $f'(a)$ называется *производной векторнозначной функции* f.

Определение. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, функция раскладывается на координатные функции:

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \qquad \forall t \in [a,b]$$

Здесь все $f_i\colon E \to \mathbb{R}$. Пусть $f_i \in R[a,b]$. Тогда можно определить *интеграл по Риману векторнозначной функции* f следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \left(\int\limits_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \int\limits_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Утверждение 6.2.4 (Формула Ньютона–Лейбница).

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

Доказательство. Покоординатное применение одномерной формулы Ньютона–Лейбница. ■

[1] См. курс топологии.

Теорема 6.2.5 (Основная оценка интеграла). Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ интегрируема по Риману (то есть все $f_i \in R[a,b]$). Тогда

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Обозначим $\alpha_k := \int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t$. Получим:

$$\begin{aligned}
\left\| \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\int\limits_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \int\limits_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(t) \right) \mathrm{d}t \\
[\text{КБШ}] &\leqslant \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n f_k^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2} \cdot \int\limits_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \left\| \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \cdot \int\limits_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

После сокращения на $\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\|$ остаётся неравенство $\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$. ■

Теорема 6.2.6. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$\operatorname{var}(f, [a,b]) = \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Пусть выбрано разбиение $a \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant b$ отрезка $[a,b]$.

Докажем неравенство $\operatorname{var}(f, [a,b]) \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$. Оценим:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m-1} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{m-1} \left\| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| &\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{t_1}^{t_m} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\operatorname{var}(f, [a,b]) \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Осталось доказать неравенство в другую сторону:

$$\operatorname{var}(f,[a,b]) \geqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Найдём δ для ε из определения равномерной непрерывности f' на отрезке $[a,b]$. Тогда если $|t-\widetilde{t}|<\delta$, то для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ выполнено

$$|f_k'(t)-f_k'(\widetilde{t})| \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда по неравенству треугольника верно неравенство

$$\|f'(t)-f'(\widetilde{t})\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k'(t)-f_k'(\widetilde{t})| < n\varepsilon.$$

Если $c,d \in [a,b]$, $c \leqslant d$ и $|d-c|<\delta$, то по интегральной теореме о среднем, так как функция $\|f'(t)\|$ непрерывна на отрезке $[c,d]$, для некоторой точки $t_0 \in [c,d]$ выполнено

$$\int\limits_c^d \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = (d-c)\|f'(t_0)\|$$

В то же время,

$$\begin{aligned}
(d-c)\|f'(t_0)\| &= \|(d-c)f'(t_0)\| \\
&= \left\| \int\limits_c^d f'(t_0)\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leqslant \left\| \int\limits_c^d f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int\limits_c^d (f'(t_0)-f'(t))\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leqslant \left\| \int\limits_c^d f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| + (d-c)n\varepsilon \\
&= \|f(d)-f(c)\| + (d-c)n\varepsilon.
\end{aligned}$$

Значит, для любого набора точек

$$a = t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m = b$$

таких, что для всех $k \in \{2,\ldots,m\}$ верно $|t_k - t_{k-1}| < \delta$, имеем:

$$\int\limits_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \|f(t_k) - f(t_{k+1})\| + \sum_{k=1}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) n\varepsilon \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \|f(t_k) - f(t_{k+1})\| + (b-a) n\varepsilon \\
&\leqslant \operatorname{var}(f, [a,b]) + (b-a) n\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем то, что требовалось:

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t \leqslant \operatorname{var}(f, [a,b]). \qquad \blacksquare$$

6.3 Длина пути в метрическом пространстве

Обозначение. (X, d) — метрическое пространство.

Определение. *Путь* в X — это непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to X$. *Носителем пути* γ называется множество $\gamma([a,b])$.

Пусть называется *простым*, если γ инъективно. Будем называть γ *простым закмнутым путем*, если $\gamma|_{[a,c]}$ — простой путь для любого $c \in [a,b)$, а также $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Определение. *Длиной пути* $L(\gamma)$ определенного на отрезке $[a,b]$ называется его вариация по этому отрезку:

$$L(\gamma) = \operatorname{var}(\gamma, [a,b]).$$

Путь называется *спрямляемым*, если его длина конечна. Путь $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется *гладким*, если он является непрерывно-дифференцируемой функцией на отрезке $[a,b]$

Утверждение 6.3.1. Если γ — гладкий путь из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, то γ — спрямляемый и

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Утверждение 6.3.2. Пусть γ_1, γ_2 — простые пути, $\gamma_1\colon [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2\colon [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^n$, такие, что их носители совпадают. Тогда $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Доказательство. Можно считать, что $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, так как иначе можно рассмотреть путь $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma_1(a_2 - t + a_1)$, у которого длина, очевидно, не поменялась, а концы развернулись. Обозначим носитель через Γ. Так как γ_1 и g_2 — биективные отображения, то $h\colon t \to \gamma_2^{-1}(\gamma_1(t))$ — биекция из $[a_1,b_1]$ в $[a_2,b_2]$. Так как функция h непрерывна, она монотонно возрастает (упражнение). Пусть

$a_1 = t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m = b_1$, тогда $a_2 = h(t_1) \leqslant \ldots h(t_n) = b_2$, и

$$\sum_{k=1}^{m-1} \|\gamma_1(t_k) - \gamma_2(t_{k+1})\| = \sum_{k=1}^{m-1} \|\gamma_2(h(t_k)) - \gamma_2(h(t_{k+1}))\| \leqslant \operatorname{var}(\gamma_2, [a_2, b_2]).$$

Значит, $\operatorname{var}(\gamma_1, [a_1, b_1]) \leqslant \operatorname{var}(\gamma_2, [a_2, b_2])$. Обратное верно в силу симметрии. ∎

Утверждение 6.3.3. Пусть γ — простой путь из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^2$ с носителем

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\}$$

Тогда $L(\gamma) = \pi$.

Доказательство. Можем считать, что $\gamma\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Значит,

$$L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \|-\sin t, \cos t\| = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, \mathrm{d}t = \int_0^\pi 1 \, \mathrm{d}t = \pi.$$ ∎

6.4 Несобственные интегралы

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$, $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, тогда *несобственным интегралом* f по промежутку $[a, b]$ называется

$$\int_a^b f := \lim_{t \to a} \int_t^c f + \lim_{t \to b} \int_c^t f, \qquad c \in (a, b),$$

если оба предела существуют и $f \in \mathcal{R}[a_1, b_1]$ для всех $a < a_1 < b_1 < b$. Из последнего условия легко проверить, что определение не зависит от выбора точки c.

Пример 6.4.1.

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{t \to 1} \int_t^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \bigg|_1^t = 1 - \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} = 1$$

Замечание. Если $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a, c]$ для всех $c < b$, то $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x) \, \mathrm{d}x$.

Определение. Говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f$ *сходится условно*, если существует $\lim \int_a^t f$ при $t \to +\infty$ и *сходится абсолютно*, если существует $\lim \int_a^t |f|$ при $t \to +\infty$, где $f \in \mathcal{R}[a, t]$, для всех $t > a$.

Теорема 6.4.1 (Критерий Коши). Следующие утверждения равносильны:

1. $\int_a^{+\infty} f$ сходится условно.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) > a$ такое, что для любых $s_1, s_2 > M(\varepsilon)$, $s_1 < s_2$ выполнено
$$\left|\int_{s_1}^{s_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим
$$g(s) := \int\limits_a^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Тогда первое условие равносильно тому, что существует конечный предел $g(s)$ при $s \to +\infty$. Но это равносильно критерию Коши для пределов функций, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) > 0$ такое, что если $M(\varepsilon) < s_1 < s_2$, то
$$\left|\int_{s_1}^{s_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |g(s_2) - g(s_1)| < \varepsilon,$$
что и требовалось доказать. ■

Теорема 6.4.2 (Критерий Коши, альтернативный). Пусть $f \in \mathcal{R}[t, 1]$ для всех $t > 0$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $\int_0^1 f$ — сходится условно.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $0 < s_1 < s_2 < M(\varepsilon)$ верно
$$\left|\int_{s_1}^{s_2} f\right| < \varepsilon,$$

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему. ■

Теорема 6.4.3 (Признак Вейерштрасса). Пусть даны функции $f, g\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ со свойством $f, g \in \mathcal{R}[a, t]$ для всех $t > a$. Пусть также $g \geqslant 0$ на $[a, +\infty)$, интеграл $\int_a^{+\infty} g$ сходится, и $|f| \leqslant g$. Тогда $\int_a^{+\infty} f$ сходится абсолютно и условно.

Доказательство. Пусть $e > 0$. Выберем $M(\varepsilon)$ из критерия Коши для интеграла функции g. Пусть $M(\varepsilon) < s_1 < s_2$, тогда
$$\left|\int\limits_{s_1}^{s_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_{s_1}^{s_2} |f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int\limits_{s_1}^{s_2} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon,$$
то есть для функций f и $|f|$ выполняется критерий Коши. ■

Следствие 6.4.4. Абсолютная сходимость влечёт условную сходимость.

Доказательство. Достаточно взять $g = |f|$ в признаке Вейерштрасса. ■

Утверждение 6.4.5. Интеграл $\int_1^\infty x^{-p}\,\mathrm{d}x$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Доказательство. Разберём случаи:

- Если $p > 1$, то

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^t = \frac{1}{t^{p-1}\cdot(1-p)} - \frac{1}{1-p}$$
$$= \frac{1}{1-p}\cdot\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{p-1}.$$

- Если $p = 1$, то

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_1^t \xrightarrow{t\to\infty} \infty,$$

то есть интеграл расходится.

- Если $p < 1$, то

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

из чего следует, что интеграл расходится. ■

Утверждение 6.4.6. $\int_0^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x$ сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$.

Доказательство. Разберём случаи:

- Пусть $p \neq 1$:

$$\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_t^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p},$$

Тогда нужно исследовать на сходимость функцию t^{p-1} при $t \to 0$. Но t^{1-p} стремится к нулю, если $p < 1$ и к бесконечности, если $p > 1$.

- Пусть $p = 1$:

$$\int_t^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x\Big|_t^1 = -\log t = \log(1/t) \xrightarrow{t\to 0} +\infty.$$ ■

Утверждение 6.4.7. Интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p\cdot\log^q x}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$, а q — любое или $p = 1$ и $q > 1$.

Доказательство. Разберём случаи:

- Если $p > 1$, выберем $\widetilde{p}$ такое, что $1 < \widetilde{p} < p$. Тогда существует $c := c(q)$ такое, что

$$\frac{1}{x^p\cdot\log^q x} < \frac{1}{x^{\widetilde{p}}}$$

для любого $x \geqslant c$. Теперь напишем следующую оценку:

$$\int\limits_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p \cdot \log^q x} \leqslant \int\limits_2^c \frac{\mathrm{d}x}{x^p \cdot \log^q x} + \int\limits_c^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

Но тогда первое слагаемое в правой части постоянно, а второе сходится по утверждению 6.4.5.

- Пусть $p = 1$:

$$\int\limits_2^t \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \log^q x} = \int\limits_2^t \frac{(\log x)'}{\log^q x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\log 2}^{\log t} \frac{\mathrm{d}y}{y^q},$$

тогда снова по утверждению 6.4.5 правая часть сходится тогда и только тогда, когда $q > 1$.

- Пусть $p < 1$, а q — любое. Тогда аналогично первому случаю существует c такое, что

$$\frac{1}{x^p \cdot \log^q x} \geqslant \frac{1}{x}, \qquad \forall x \geqslant c.$$

Но тогда хвост рассматриваемого интеграла растёт быстрее, чем хвост расходящегося интеграла, что означает его расходимость.

■

Теорема 6.4.8 (Интегральный признак сходимости). Пусть $f\colon [1,+\infty] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[1,t]$, для всех $t > 1$, также существует число M такое, что

$$\operatorname{var}(f,[1,t]) < M, \qquad \forall t > 1$$

Тогда ряд $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ сходится условно тогда и только тогда, когда $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится условно.

Доказательство. Нужно показать, что пределы $\lim \int_1^n f$ и $\lim \sum_{k=1}^n f(k)$ существуют и конечны одновременно. Рассмотрим

$$\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} (f(x) - f(k))\,\mathrm{d}x.$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1} (f(x) - f(k))\,\mathrm{d}x$ сходится абсолютно, так как

$$\sum_{k=1}^\infty \left| \int\limits_k^{k+1} (f(x) - f(k))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{k=1}^\infty \int\limits_k^{k+1} \sup_{x\in[k,k_1]} |f(x) - f(k)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^\infty 2 \cdot |f(x_k) - f(k)|$$

где $x_k \in [k, k+1]$ выбраны таким образом, что

$$\sup_{[k,k+1]} |f(x) - f(k)| \leqslant 2 \cdot |f(x_k) - f(k)|.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(k)|$ сходится, так как для любого $N \in \mathbb{N}$ верно

$$\sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - f(k)| \leqslant \operatorname{var}(f, [1, N]) < M \implies \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{k}^{k+1} (f(x) - f(k))\, \mathrm{d}x \right) \leqslant M,$$

то есть правая часть сходится условно. Значит, существует $\lim \left(\int_1^n f - \sum_1^{n+1} f(k) \right)$ Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится условно в том и только в том случае, когда существует предел $\lim \int_1^n f(x)\, \mathrm{d}x$.

Покажем теперь, что в условиях теоремы равносильны существования пределов $\lim \int_1^n f(x)\, \mathrm{d}x$, где $n \in \mathbb{N}$, и $\lim \int_0^t f(x)\, \mathrm{d}x$ при $t \to \infty$. Для этого рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, стремящуюся к бесконечности и докажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_{[x_k]}^{x_k} f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Если это не выполнено, то для некоторого $\varepsilon > 0$ существует подпоследовательность $\{x_{k_m}\}$ такая, что

$$\left| \int_{[x_{k_m}]}^{x_{k_{m+1}}} f \right| > \varepsilon, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

однако

$$\left| \int_{[x_{k_m}]}^{[x_{k_m}]+1} f \right| \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

Значит, существуют числа $y_{k_m} \in ([x_{k_m}], x_{k_m})$ такие, что $|f(y_{k_m})| > \varepsilon$, а также для любого $\widetilde{\varepsilon} > 0$ существуют числа $\widetilde{y}_{k_m} \in ([x_{k_m}], [x_{k_m}] + 1)$ такие, что $|f(\widetilde{y}_{k_m})| < \widetilde{\varepsilon}$, значит

$$\operatorname{var}(f, [x_{k_N} - 1, x_{k_{\widetilde{N}}} + 1]) \geqslant \sum_{m=N}^{\widetilde{N}} |f(y_{k_m}) - f(\widetilde{y_{k_m}})| \geqslant \sum_{N}^{\widetilde{N}} (\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}) = (\widetilde{N} - N)(\varepsilon - \widetilde{\varepsilon}),$$

Но так как $\operatorname{var}(f, [1, +\infty]) < M$, выбирая $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$, приходим к противоречию. ∎

Следствие 6.4.9. Если f — неотрицательная убывающая функция на $[1, +\infty)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int_1^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Доказательство. Вариация функции f, конечно же, ограничена числом $f(1)$, а потому к функции f можно применить предыдущую теорему. ∎

Следствие 6.4.10. Если $\int_1^{\infty} |f'(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$, то $\sum_1^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда $\int_1^{\infty} f(x)$ сходится.

Доказательство. По теореме 6.2.6

$$\operatorname{var}(f,[1,\infty]) = \int\limits_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Но тогда мы можем применить интегральный признак сходимости. ∎

Следствие 6.4.11. Ряд

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^p\cdot \log^q n}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p>1$, q — любое или $p=1$ и $q>1$.

Теорема 6.4.12 (Признак сходимости Абеля–Дирихле). Пусть $f,g\in C^1[1,\infty)$, $f=F'$. Также выполнено условие, что $|F(x)|<M$ для любого $x\geqslant 1$, а $g(x)$ монотонно убывает к нулю. Тогда $\int_1^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ — сходится.

Доказательство. Запишем равенство

$$\int\limits_1^t f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^t (F(x))'g(x)\,\mathrm{d}x = F(t)g(t)-F(1)g(1)-\int\limits_1^t F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (\dagger)$$

Заметим, что $F(t)g(t)\to 0$ при $t\to\infty$, так как F ограничено, а g убывает к нулю. Также

$$\int\limits_1^t |F(x)g'(x)|\,\mathrm{d}x < M\int\limits_1^t (g'(x))\,\mathrm{d}x = -M(g(t)-g(1)) \xrightarrow{t\to\infty} Mg(1).$$

Значит, $\int_1^\infty g'F$– сходится абсолютно, но тогда сходится и условно. Следовательно наш интегал является суммой двух сходящихся слагаемых из правой части ($\dagger$), стало быть, он и сам сходится. ∎

Пример 6.4.2. Интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

сходится условно, но не абсолютно.

Доказательство. Так как $\sin x/x$ — непрерывная функция, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится тогда и только тогда, когда интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ сходится.

Возьмём $f=\sin x$, $g=1/x$. Тогда производная $\sin x$, очевидно, ограничена, а $1/x$ убывает к нулю на бесконечности. То есть, в данном случае применим признак Абеля–Дирихле. Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_1^t \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = +\infty.$$

Действительно, запишем неравенства:

$$\int\limits_1^t \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geqslant \int\limits_1^t \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^t \frac{1-\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_1^t \frac{\mathrm{d}x}{2x} - \int\limits_1^t \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Тогда очевидно, что этот интеграл расходится, поскольку расходится $\int \mathrm{d}x/2x$, а $\int \cos 2x/2x\,\mathrm{d}x$ сходится по признаку Абеля–Дирихле. ■

Утверждение 6.4.13. Пусть (a,b) — промежуток, $f, g \in C^1(a,b)$. Предположим, что интеграл $\int_a^b f'g$ сходится условно и существуют пределы

$$\lim_{t\to a} f(t)g(t) \qquad \text{и} \qquad \lim_{t\to b} f(t)g(t).$$

Тогда интеграл $\int_a^b fg'$ сходится и, более того, верно

$$\int_a^b f'g = fg\big|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Доказательство. Запишем равенство

$$\int\limits_{a+t_1}^{b-t_2} f'g - fg\big|_{a+t_1}^{b-t_2} = -\int\limits_{a+t_1}^{b-t_2} fg'$$

Так как оба слагаемые в левой части сходятся при $t_1 \to 0$ и $t_2 \to 0$, то существует такой же предел в правой части, что и требовалось доказать. ■

Утверждение 6.4.14. Пусть ϕ — монотонная биекция из (a,b) в (c,d), $\phi \in C^1(a,b)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^d f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему. ■

6.5 Некоторые асимптотические формулы

Теорема 6.5.1 (Формула Сонина). Пусть $f \in C^1[1,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int\limits_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(n)+f(1)}{2} + \int\limits_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $\{t\} = t - [t]$.

Доказательство. Запишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_k^{k+1}(t-k)'f(t)\,\mathrm{d}t \\
[\text{интегрируем по частям}] &= \sum_{k=1}^{n-1}\left((t-k)f(t)\big|_k^{k+1} - \int\limits_k^{k+1}(t-k)f'(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k+1) - \int\limits_k^{k+1} f'(t)(t-k)\,\mathrm{d}t\right) \\
[\text{поскольку } t-k=\{t\}] &= \sum_{k=2}^{n} f(k) - \int\limits_1^n \{t\}f'(t)\,\mathrm{d}t \\
\left[\pm f(1) + \frac{1}{2}\int_1^n f'\right] &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) - \int\limits_1^n\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\limits_1^n f'(t)\,\mathrm{d}t \\
[\text{ф. Ньютона–Лейбница}] &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) - \int\limits_1^n\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(n)-f(1)}{2}.
\end{aligned}$$

Отсюда легко следует то, что мы хотели доказать. ■

Утверждение 6.5.2. Существует число $\gamma > 0$ (константа Эйлера–Маскерони) такое, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Сонина:

$$\begin{aligned}
\sum\frac{1}{k} &= \int\limits_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{\frac{1}{n}+1}{2} - \int\limits_1^n\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \log n + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int\limits_1^n\frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + \log n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)\bigg|_1^n - \left(\int\limits_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int\limits_n^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \log n + \frac{1}{2} - \int\limits_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int\limits_n^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \gamma + \log n + \int\limits_n^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Осталось доказать, что $\int_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n}\right)$, тогда получится, что

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \int\limits_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t \approx 0.57.$$

Действительно, оценим интеграл:

$$0 \leqslant \int\limits_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_n^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t}\bigg|_n^\infty = \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad \blacksquare$$

Теорема 6.5.3 (Формула Стирлинга). Существует константа $c > 0$ такая, что верно

$$n! = \sqrt{c \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Сонина:

$$\log n! = \sum_{k=1}^n \log k = \int\limits_1^n \log t\,\mathrm{d}t + \frac{\log n}{2} + \int\limits_1^n \left(\frac{\{t\} - 1/2}{t}\right)\,\mathrm{d}t. \tag{$\star$}$$

Покажем, что интеграл $\int_1^\infty (\{t\} - \frac{1}{2})/t\,\mathrm{d}t$ сходится. По критерию Коши для любого ε существует M такое, что для любых $M < m < n$ верно

$$\left|\int\limits_m^n \left(\frac{\{t\} - 1/2}{t}\right)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Так как

$$\max_{[n,n+1]} \left|\frac{\{t\} - 1/2}{t}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

то можно считать, что $n, m \in \mathbb{Z}$. Теперь оценим интеграл по единичному промежутку:

$$\begin{aligned}
\int\limits_k^{k+1} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int\limits_k^{k+1} \left(\frac{t - k - \frac{1}{2}}{t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \log\frac{k+1}{k} \\
&= 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
&= 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{c_k}{k^2},
\end{aligned}$$

где $c_k = O(1)$, то есть $c_k < c$ для любого $k \in N$. Теперь вернёмся к критерию Коши:

$$\left|\int\limits_m^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| = \left|\sum_m^{n-1} \frac{c_k}{k^2}\right| \leqslant c \cdot \sum_m^{n-1} \frac{1}{k^2} \leqslant c \cdot \sum_m^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Положим $\widetilde{c} = \int_1^\infty (\{t\} - \frac{1}{2})/t \,\mathrm{d}t$, Отметим, что

$$\int\limits_n^\infty \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_n^\infty \int\limits_k^{k+1} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} = O\left(\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где последнее равенство остаётся в качестве упражнения. Также

$$\int\limits_1^n \log t \,\mathrm{d}t = (t \log t)\Big|_1^n = n \log n - n + 1.$$

Теперь вернёмся к равенству ($\star$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \log k &= \int\limits_1^n \log t \,\mathrm{d}t + \frac{\log n}{2} + \widetilde{c} - \int\limits_n^\infty \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= n \log n - n + \frac{\log n}{2} + \widetilde{c_1} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \log n!\end{aligned}$$

Наконец, возьмём exp( ) от обеих частей равенства:

$$\begin{aligned} n! &= \exp\left(n \log n - n + \frac{\log n}{2}\right) \cdot \sqrt{\widetilde{c_2}} \cdot e^{O(1/n)} \\ &= \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{cn} \cdot e^{O(1/n)} \\ &= \sqrt{cn} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

Теорема 6.5.4. Константа c из формулы Стирлинга равна 2π.

Лемма 6.5.5. Обозначим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = I_n,$$

где $n \geqslant 0$. Тогда $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$, и для всех $n \geqslant 2$ справедлива рекуррентная формула

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

Доказательство. Посчитаем I_0:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь вычислим I_1:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Теперь докажем рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}\,\mathrm{d}x = (n-1)\cdot(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Отсюда очевидно следует рекуррентная формула. ■

Обозначение.

$$\begin{cases} n!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot n, & 2 \nmid n; \\ n!! = 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot n, & 2 \mid n. \end{cases}$$

Лемма 6.5.6. При всех $n \geqslant 1$ выполнено

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} d_n, n \geqslant 1,$$

где $d_n = 1$ при нечётных n, и $d_n = \pi/2$ при чётных n.

Доказательство. Предлагается проделать это упражнение самостоятельно, пользуясь рекуррентной формулой и значениями I_1 и I_2. ■

Лемма 6.5.7. Существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$$

Доказательство. Запишем равенство

$$\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Теперь пользуясь тем, что на отрезке $[0, \pi/2]$ верно

$$\sin^{n-2} x \geqslant \sin^{n-1} x \geqslant \sin^n x,$$

мы можем заключить, что

$$I_{n-1} \geqslant I_n \geqslant I_{n+1}.$$

Это означает, по теореме о двух милиционерах, что предел из теоремы существует и равен единице. ■

Лемма 6.5.8. Существует предел

$$\lim \left(\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right) = \pi.$$

Доказательство. Запишем, пользуясь леммой 6.5.6:

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot(2n+1)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+2}}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)^{-1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\pi,$$

что завершает доказательство. ■

Теперь докажем теорему 6.5.4.

Доказательство. Будем пользоваться, что

$$\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \to \pi \tag{†}$$

Перепишем левую часть (†) как

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\cdot\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))^2} &= \frac{2^{4n}}{n}\cdot\frac{(n!)^4}{(2n!)^2}\\ &\sim \frac{2^{4n}}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{c\cdot n}\cdot(n/e)^n\right)^4}{\left(\sqrt{2\cdot c\cdot n}\cdot(2n/e)^{2n}\right)^2}\\ &= \frac{2^{4n}}{2}\cdot\frac{c^2\cdot n^2}{c\cdot n^2\cdot 2^{4n}} = \frac{c}{2}.\end{aligned}$$

Поэтому $\pi = c/2$, то есть $c = 2\pi$. ■

Теорема 6.5.9 (Интеграл Эйлера–Пуассона). Верно следующее равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Вместо исходного интеграла будем считать $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, пользуясь равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Разобьём наш интеграл на 4 части:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} = \int\limits_0^{\sqrt[6]{n}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt[6]{n}}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_0^{\sqrt[6]{n}} e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x + \int\limits_0^{\sqrt[6]{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt[6]{n}}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\limits_0^{\sqrt[6]{n}} e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x + \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx - \int\limits_{\sqrt[6]{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt[6]{n}}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Теперь заметим, что

$$\int\limits_{\sqrt[6]{n}}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Также

$$\int\limits_{\sqrt[6]{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)^n = [\text{ряд Тейлора для логарифма}]$$
$$= \sqrt{n} \cdot \exp(n \cdot (-\sqrt[3]{n}/n + o(1/n)))$$
$$= \sqrt{n} \cdot \exp(-\sqrt[3]{n} + o(1)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Ещё одно слагаемое можно оценить так:

$$\left|\int\limits_0^{\sqrt[6]{n}} e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt[6]{n} \max_{x\in[0,\sqrt[6]{n}]} \left|e^{-x^2} - e^{n\log(1-x^2/n)}\right|$$
$$[\text{ряд Тейлора для логарифма}^2] \leqslant \sqrt[6]{n} \max_{x\in[0,\sqrt[6]{n}]} \left|e^{-x^2} \cdot \left(1 - \exp(-x^2/n + O(x^4/n^2)\cdot n\right)\right|$$
$$\leqslant \sqrt[6]{n} \max_{x\in[0,\sqrt[6]{n}]} \left|e^{-x^2} \left(1 - \exp(O(x^4/n))\right)\right|$$
$$\leqslant \sqrt[6]{n}\left(1 - \exp\left(O\left(\frac{n^{4/6}}{n}\right)\right)\right) = \sqrt[6]{n} \cdot O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right) \to 0.$$

Осталось сосчитать последнее слагаемое:

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = [x = \sqrt{n}\cdot y] = \sqrt{n}\int\limits_0^1 (1 - y^2)^n\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
[y = \cos t] &= \sqrt{n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\cos t)^2)^n \sin t \, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} \, \mathrm{d}t = \sqrt{n} \cdot I_{2n+1} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{1}{2n+2} \\
&\sim \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} \right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. ■