Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и компьютерных наук

Равномерность сходимость

Конспект основан на лекциях
Романа Викторовича Бессонова

2 сентября 2020 г.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Факультет
математики
и компьютерных
наук СПбГУ

Конспект основан на лекциях по темам, связанным с равномерной сходимостью, прочитанных Романом Викторовичем Бессоновым студентам Факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета в весеннем семестре 2018–2019 учебного года.

В конспекте содержится часть материала 2-го семестра курса математического анализа.

Автор:

Михаил Опанасенко

Последняя версия и исходный код:

https://www.overleaf.com/read/kgcybsrcrspc

Сайт СПБГУ: https://spbu.ru.
Сайт факультета МКН: https://math-cs.spbu.ru.

Оглавление

1 Общие теоремы о равномерной сходимости и перестановках предельных переходов

Определение. Метрическое пространство (Z, d) называется *полным*, если любая последовательность Коши из его элементов имеет предел.

Определение. Пусть Y, Z — хаусдорфовы топологические пространства, $B \subset Y$, $\omega_B \in Y$ — предельная точка для B, $f\colon B \to Z$, $L \in Z$. Тогда будем писать, что $f \to L$ при $y \to \omega_B$, если для любой окрестности $U(L) \ni L$ в Z существует окрестность в $U(\omega_B) \ni \omega_B$ в Y такая, что $f\big(\dot{U}(\omega_B) \cap B\big) \subset U(L)$.

Определение. Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, (Z, d) — метрическое пространство, $A \subset X$, $B \subset Y$, ω_A — предельная точка для A, ω_B — предельная точка для B. Пусть $f\colon A \times B \to Z$. Будем писать, что $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to \omega_B$ равномерно по $x \in A$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\omega_B)$ — окрестность ω_B такая, что

$$d\big(f(x,y), \varphi(x)\big) < \varepsilon \quad \forall y \in \dot{U}(\omega_B) \cap B\ \forall x \in A. \tag{1.1}$$

Замечание. В предыдущем семестре изучали случай, когда $Z = \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Замечание. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ — хаусдорфовы топологические пространства (на них естественным образом задается порядковая топология).

Утверждение 1.1 (критерий Коши, общая версия). Пусть Y — хаусдорфово топологическое пространство, (Z, d) — полное метрическое пространство, $B \subset Y$, ω_B — предельная точка для B, $f\colon B \to Z$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\exists \lim\limits_{y \to \omega_B} f(y)$;
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\omega_B)$ — окрестность ω_B такая, что

$$d\big(f(y_1), f(y_2)\big) < \varepsilon \quad \forall y_1, y_2 \in \dot{U}(\omega_B) \cap B. \tag{1.2}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть $f(y) \to L$ при $y \to \omega_B$. Тогда по определению сходимости

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\omega_B) \ni \omega_B : d\big(f(y), L\big) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall y \in \dot{U}(\omega_B) \cap B. \tag{1.3}$$

Значит,

$$\forall y_1, y_2 \in \dot{U}(\omega_B) \cap B : d\big(f(y_1), f(y_2)\big) < d\big(f(y_1), L\big) + d\big(L, f(y_2)\big) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

$\Longleftarrow$ Рассмотрим множество окрестностей

$$\Big\{U_{\frac{1}{n}}(\omega_B)\Big\}_{n \in \mathbb{N}} : d\big(f(y_1), f(y_2)\big) < \frac{1}{n} \quad \forall y_1, y_2 \in \dot{U}_{\frac{1}{n}}(\omega_B) \cap B\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Пусть $\{y_n\}$ — последовательность в B такая, что $y_n \in \dot{U}_{\frac{1}{n}}(\omega_B)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда ясно, что $\{f(y_n)\}$ — последовательность Коши, а значит мы можем воспользоваться полнотой Z:

$$d\big(f(y_n), f(y_m)\big) < \frac{1}{\min(m,n)} \implies \exists L \in Z : f(y_n) \to L. \tag{1.6}$$

Осталось заметить, что

$$\forall y \in \dot{U}_{\frac{1}{n}}(\omega_B) \cap B : d\big(f(y), L\big) \leqslant d\big(f(y), f(y_n)\big) + d\big(f(y_n), L\big) \leqslant \frac{1}{n} + \varepsilon_n, \tag{1.7}$$

где $\varepsilon_n \to 0$. Значит $f(y) \to L$ при $y \to \omega_B$. ■

Утверждение 1.2 (критерий Коши равномерной сходимости, общая версия). Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, (Z, d) — полное метрическое пространство. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$, ω_B — предельная точка для B, $f\colon A \times B \to Z$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to \omega_B$ равномерно по $x \in A$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\omega_B)$ — окрестность ω_B такая, что

$$d\big(f(x,y_1), f(x,y_2)\big) < \varepsilon \quad \forall y_1, y_2 \in \dot{U}(\omega_B) \cap B\ \forall x \in A. \tag{1.8}$$

Доказательство.

$\implies$ По свойству (1) имеем

$$d\big(f(x,y_1), f(x,y_2)\big) \leqslant d\big(f(x,y_1), \varphi(x)\big) + d\big(f(x,y_2), \varphi(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

в $U(\omega_B) \cap B\ \forall x \in A$.

$\impliedby$ Для каждого $x \in A$ к $y \mapsto f(x,y)$ можно применить обычный критерий Коши, а значит $\exists \varphi(x) : f(x,y) \to \varphi(x)$ при $y \to \omega_B\ \forall x \in A$. Но из неравенства (1.8) следует, что $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to \omega_B\ \forall x \in A$, так как можно перейти к пределу $y_2 \to \omega_B$. ■

Теорема 1.3. Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, Z — полное метрическое пространство, $A \subset X$, $B \subset Y$, ω_A — предельная точка для A, ω_B — предельная точка для B, $f\colon A \times B \to Z$. Пусть $f(x,y) \to \varphi(x)$ при $y \to \omega_B\ \forall x \in A$, $f(x,y) \to \psi(y)$ при $x \to \omega_A\ \forall y \in B$, причем хотя одна из этих сходимостей равномерна. Тогда

$$\exists \lim_{x \to \omega_A} \lim_{y \to \omega_B} f(x,y) = \lim_{y \to \omega_B} \lim_{x \to \omega_A} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to \omega_A \\ y \to \omega_B}} f(x,y). \tag{1.9}$$

Доказательство. Не умаляя общности предположим, что $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to \omega_B\ \forall x \in A$. По определению это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\omega_B) : d\big(f(x,y), \varphi(x)\big) < \varepsilon\ \forall y \in \dot{U}(\omega_B) \cap B\ \forall x \in A. \tag{1.10}$$

Тогда если $y_0 \in \dot{U}(\omega_B) \cap B$, то

$$\begin{aligned} d\big(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\big) &\leqslant d\big(\varphi(x_1), f(x_1, y_0)\big) + d\big(f(x_1, y_0), f(x_2, y_0)\big) + d\big(f(x_2, y_0), \varphi(x_2)\big) \\ &\leqslant 2\varepsilon + d\big(f(x_1, y_0), f(x_2, y_0)\big) \quad \forall x_1, x_2 \in A. \end{aligned} \tag{1.11}$$

По критерию Коши для отображения $x \mapsto f(x, y_0)$:

$$\exists U(\omega_A) : d\big(f(x_1, y_0), f(x_2, y_0)\big) < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(\omega_A). \tag{1.12}$$

В сочетании с предыдущим неравенством получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(\omega_A) : d\big(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\big) < 3\varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in \dot{U}(\omega_A). \tag{1.13}$$

Значит мы можем применить критерий Коши к φ: $\exists L \in Z : \varphi(x) \to L$ при $x \to \omega_A$. В частности,

$$\exists \lim_{x \to \omega_A} \lim_{y \to \omega_B} f(x, y) = L. \tag{1.14}$$

Переходя к пределу по $x \to \omega_A$ в неравенстве $d\big(f(x, y), \varphi(x)\big) < \varepsilon$ получаем, что

$$d\big(\psi(y), L\big) \leqslant \varepsilon\ \forall y \in \dot{U}(\omega_B) \cap B \implies \psi(y) \to L \text{ при } y \to \omega_B, \tag{1.15}$$

а значит

$$\exists \lim_{y \to \omega_B} \lim_{x \to \omega_A} f(x, y) = L. \tag{1.16}$$

Кроме того,

$$d\big(f(x, y), L\big) \leqslant d\big(f(x, y), \varphi(x)\big) + d\big(\varphi(x), L\big) < 2\varepsilon, \tag{1.17}$$

если $y \in \dot{U}(\omega_B) \cap B$ и $x \in \dot{U}(\omega_A) \cap A$. Значит $\forall \varepsilon > 0$ окрестность $\dot{U}(\omega_A) \times \dot{U}(\omega_B)$ точки $(\omega_A, \omega_B) \in X \times Y$ такова, что

$$d\big(f(x, y), L\big) \leqslant 2\varepsilon \quad \forall x, y \in (\dot{U}(\omega_A) \times \dot{U}(\omega_B)) \cap (A \times B), \tag{1.18}$$

а значит

$$\exists \lim_{\substack{x \to \omega_A \\ y \to \omega_B}} f(x, y) = L. \tag{1.19}$$

■

Теорема 1.4 (Стокса-Зейделя, общая версия). Пусть X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, Z — полное метрическое пространство, $B \subset Y$, ω_B — предельная точка для B, $x_0 \in X$, $f \colon X \times B \to Z$ такое, что

1. $x \mapsto f(x, y)$ непрерывно $\forall y$ в точке $x_0 \in X$;
2. $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to \omega_B$ $\forall x \in X$.

Тогда φ непрерывно в точке x_0.

Доказательство. φ непрерывно в $x_0 \iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\varphi(x) &= [\text{по условию 2}]\\ &= \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to\omega_B} f(x,y) = [\text{по предыдущей теореме}]\\ &= \lim_{y\to\omega_B}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = [\text{по условию 1}]\\ &= \lim_{y\to\omega_B} f(x_0,y) = [\text{по условию 2}]\\ &= \varphi(x_0).\end{aligned}$$

■

Пример 1.1. Пусть $f_t,\ f \in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_t(x) = 0\ \forall t\in\mathbb{N}$. Пусть также

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)-f_t(x)\right| \to 0 \text{ при } t\to+\infty. \tag{1.20}$$

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Действительно, можно применить предыдущую теорему с параметрами $X = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $Y = [0,+\infty]$, $Z = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x)$.

Теорема 1.5 (дифференцируемость предельной функции). Пусть Y — хаусдорфово топологическое пространство, $X = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{R}$, ω_B — предельная точка $B \subset Y$, $f\colon X\times Y \to Z$ таково, что

1. $x \mapsto f(x,y)$ непрерывно дифференцируемо по $x\ \forall y\in Y$;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y\to\omega_B$;
3. $f(x,y)\to F(x)$ при $y\to\omega_B$, $x\in(a,b)$.

Тогда $F\in C^1(a,b)$ и $F'(x) = \varphi(x)$ при $x\in(a,b)$.

Доказательство. Зафиксируем $x_0\in(a,b)$ и рассмотрим функцию

$$W(x,y) = \frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}, \tag{1.21}$$

где $x\in(a,b)$, $y\in B$. Тогда:

- $W(x,y) \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)$ при $x\to x_0$, $y\in B$ по условию (1).
- $W(x,y) \rightrightarrows \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ при $y\to\omega_B$.

Действительно, поточечная сходимость $W(x,y) \to \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ при $y\to\omega_B$ следует из свойства (3), поэтому надо лишь проверить, что эта сходимость равномерна по $x\in(a,b)$. По теореме Лагранжа, для любых $x\in(a,b)$, $y_1,y_2\in B$ справедливо равенство

$$W(x,y_1)-W(x,y_2) = \frac{\big(f(x,y_1)-f(x,y_2)\big)-\big(f(x_0,y_1)-f(x_0,y_2)\big)}{x-x_0} \tag{1.22}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y_2) \tag{1.23}$$

для некоторой точки θ на отрезке с концами x_0, x. По условию (2), производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ сходятся равномерно при $y \to \omega_B$. Значит, выполнение равномерного критерия Коши для $\frac{\partial f}{\partial x}$ влечет выполнение равномерного критерия Коши для W, то есть $W(x, y) \rightrightarrows \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ при $y \to \omega_B$. Из теоремы о перестановке предельных переходов получаем, что

$$\exists \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to \omega_B} W(x, y) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0), \tag{1.24}$$

причем

$$F'(x_0) = \lim_{y \to \omega_B} \lim_{x \to x_0} W(x, y) = \lim_{y \to \omega_B} \varphi(x_0) = \varphi(x_0), \tag{1.25}$$

что завершает доказательство. ■

2 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение. *Собственным* интегралом называется интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

где $f \in R[a, b]$.

Утверждение 2.1. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $f \in C([a, b] \times [c, d])$, $u \in [c, d]$,

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, u)\Delta_k, \tag{2.2}$$

где $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — разбиение $[a, b]$ на равные отрезки, $\Delta_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. Тогда

$$S_n \rightrightarrows \int\limits_a^b f(x, u)\,\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

равномерно по $u \in [c, d]$ при $n \to \infty$.

Доказательство.

$$\left| S_n(u) - \int\limits_a^b f(x, u)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k, u) - \frac{1}{\Delta_k} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, u)\,\mathrm{d}x \right| \Delta_k =$$

$$= [\text{по интегральной теореме о среднем}] =$$

$$= \sum \left| f(x_k, u) - f(\xi_k, u) \right| \Delta_k \leqslant (b-a) \sup_{|x-y| \leqslant \frac{b-a}{n}} |f(y,u) - f(x,u)|,$$

где $\sup\limits_{|x-y|\leqslant \frac{b-a}{n}} |f(y,u)-f(x,u)|$ равномерно сходится к нулю по $u \in [c,d]$ при $n \to \infty$, так как $f \in C([a,b]\times[c,d])$. ■

Следствие 2.2. Если $f \in C([a,b]\times[c,d])$, то отображение

$$F\colon u \mapsto \int\limits_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

непрерывно на $[c,d]$.

Доказательство. $S_n \in C[c,d]$, $S_n \rightrightarrows F$, а значит по теореме Стокса-Зейделя $F \in C[c,d]$. ■

Следствие 2.3. Пусть $f \in C([a,b]\times[c,d])$, $\forall x \in [a,b]$ отображение $u \mapsto f(x,u)$ непрерывно дифференцируемо на $[c,d]$ и $\partial f/\partial u \in C([a,b]\times[c,d])$. Тогда отображение F из предыдущего следствия лежит в $C^1[c,d]$, причем

$$F'(u) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Доказательство. $S_n(u) \to F(u)$ на $[c,d]$, и

$$S_n' \rightrightarrows \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

равномерно по $u \in [c,d]$, так как $\partial f/\partial u \in C([a,b]\times[c,d])$. Значит $F \in C^1[c,d]$ и

$$F'(u) = \lim_{n\to\infty} S_n'(u) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

■

Следствие 2.4. Если $f \in C\big([a,b]\times[c,d]\big)$, то

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.8}$$

Доказательство. Двойные интегралы существуют, так как по первому следствию $\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ и $\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ — непрерывные функции. Обозначим

$$G(u) = \int\limits_a^u \int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{2.9}$$

$$\widetilde{G}(u) = \int\limits_c^d \int\limits_a^u f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.10}$$

Продифференцируем:

$$G'(u) = \int\limits_c^d f(u, y)\,\mathrm{d}y, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{G}'(u) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^u f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)' \mathrm{d}y = \int\limits_c^d f(u, y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.12}$$

В последнем равенстве мы воспользовались предыдущим следствием для непрерывно дифференцируемой функции $u \mapsto \int\limits_a^u f(x, y)\,\mathrm{d}x$. Значит $(G - \widetilde{G})' = 0$, то есть $G = \widetilde{G} + c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Однако $G(a) = \widetilde{G}(a) = 0$, откуда получаем $c = 0$ и $G = \widetilde{G}$. ■

Утверждение 2.5. Пусть $f \in C([a, b] \times [c, d])$, причем

$$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in C([a, b] \times [c, d]),$$

даны функции $\alpha, \beta \in C^1[c, d]$ такие, что:

- $\alpha(t) \leqslant \beta(t)\ \forall t \in [c, d]$;
- $\alpha([c, d]) \subset [a, b]$, $\beta([c, d]) \subset [a, b]$.

Тогда

$$F(u) = \int\limits_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f(x, u)\,\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

лежит в $C^1[c, d]$ и

$$F'(u) = \beta'(u) f\big(\beta(u), u\big) - \alpha'(u) f\big(\alpha(u), u\big) + \int\limits_{\alpha(u)}^{\beta(u)} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x, t_3)\,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Тогда, как нетрудно заметить, $F(u) = \Phi\big(\alpha(u), \beta(u), u\big)$. Кроме того,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_k} \in C([a, b] \times [a, b] \times [c, d]) \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \tag{2.16}$$

(для t_1 и t_2 это очевидно, а для t_3 следует из условия на непрерывную дифференцируемость по второй координате). Значит $\Phi \in C^1([a,b] \times [a,b] \times [c,d])$ и, соответственно, $F \in C^1[c,d]$. Осталось применить определение производной и цепное правило:

$$F'(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}\big(\alpha(u), \beta(u), u\big) \cdot \alpha'(u) + \frac{\partial \Phi}{\partial t_2}\big(\alpha(u), \beta(u), u\big) \cdot \beta'(u) + \frac{\partial \Phi}{\partial t_3}\big(\alpha(u), \beta(u), u\big)$$
$$= -f\big(\alpha(u), u\big) \cdot \alpha'(u) + f\big(\beta(u), u\big) \cdot \beta(u) + \int\limits_{\alpha(u)}^{\beta(u)} \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x, \tag{2.17}$$

что и требовалось. ■

3 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение. Пусть $[a,\omega)$ — промежуток $\mathbb{R}$, где $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \in R[a,b]$ $\forall b \in \mathbb{R} : [a,b] \subset [a,\omega)$. Если

$$\exists \lim_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

то такой предел называется *несобственным* интегралом функции f по $[a,\omega)$ с особенностью в точке ω.

Определение. Пусть $f = f(x,u) : [a,\omega) \times [c,\widetilde{\omega}) \to \mathbb{R}$ и для каждого $u \in [c,\widetilde{\omega})$ существует несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ с особенностью в точке ω. Будем говорить, что $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно (с особенностью в точке ω) по параметру $u \in [c,\widetilde{\omega})$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathbb{R} : \left| \int\limits_b^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon\ \forall b > B,\ \forall u \in [c,\widetilde{\omega}).$$

Утверждение 3.1 (критерий Коши). Пусть $f\colon [a,\omega) \times [c,\widetilde{\omega}) \to \mathbb{R}$, $\forall u \in [c,\omega)\ \forall a \leqslant b < \omega\ x \mapsto f(x,u) \in R[a,b]$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по $u \in [c,\widetilde{\omega})$;

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a,\omega) : \forall b_1, b_2 \in [B,\omega) \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,u)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon\ \forall u \in [c,\widetilde{\omega})$.

Доказательство. Обозначим

$$F_b\colon u \mapsto \int\limits_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x, \quad u \in [c, \widetilde{\omega}). \tag{3.2}$$

По определению равномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ по u равносильна тому, что F_b сходится равномерно по u при $b \to \omega$. Применяя критерий Коши равномерной сходимости для функции F_b получаем равносильность 1 и 2. ■

Утверждение 3.2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости). Если $|f(x,u)| \leqslant g(x)\ \forall u \in E$ для некоторой функции $g(x)$ такой, что интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по $u \in E \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. $\forall b_1, b_2 \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,\mathrm{d}x$. Осталось применить критерий Коши к g. ■

Утверждение 3.3 (признак Абеля-Дирихле). Определим условия α_1, β_1, α_2, β_2 на функции $f(x,u)$ и $g(x,u)$ следующим образом:

(α_1) $\left|\int\limits_a^x f(t,u)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant c\ \forall u \in E$;

(β_1) $g(t,u)$ монотонно убывает по $t \in [a,\omega)$ при каждом $u \in E$, $g(t,u) \rightrightarrows 0$ при $t \to \omega$ равномерно по $u \in E$;

(α_2) $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по $u \in E$;

(β_2) $g(t,u)$ монотонна по $t \in [a,\omega)$ при каждом $u \in E$ и $|g(t,u)| \leqslant c\ \forall t \in [a,\omega)\ \forall u \in E$.

Тогда если одновременно выполнены α_1 и β_1 или α_2 и β_2, то $\int\limits_a^\omega f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x$ равномерно сходится по u.

Доказательство. Будем доказывать для случая $f(x,u) \in C^1[a,\omega)$, $g(x,u) \in C^1[a,\omega)$ $\forall u \in E$, когда выполнены условия (α_1) и (β_1). Заметим, что для всех $\omega_1 \in [a,\omega)$ и $a_1 \in [a,\omega_1)$ выполнено

$$\int\limits_{a_1}^{\omega_1} f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a_1}^{\omega_1} \left(\int\limits_{a_1}^{x} f(t,u)\,\mathrm{d}t\right)_x' g(x,u)\,\mathrm{d}x = \tag{3.3}$$

$$= \int\limits_{a_1}^{x} f(t,u)\,\mathrm{d}t \cdot g(x,u)\Bigg|_{a_1}^{\omega_1} - \int\limits_{a_1}^{\omega_1}\left(\int\limits_{a_1}^{x} f(t,u)\,\mathrm{d}t\right)\cdot g'(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Поэтому интеграл можно оценить следующим образом (используем условие α_1):

$$\left|\int\limits_{a_1}^{\omega_1} f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2c_1 \cdot \sup_{\substack{t\in[a_1,\omega_1)\\ u\in E}} |g(t,u)| + c\int\limits_{a_1}^{\omega_1}\big(-g'(x,u)\big)\,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Заметим, что:

- $\sup\limits_{\substack{t\in[a_1,\omega_1)\\ u\in E}} \big|g(t,u)\big| \rightrightarrows 0$ при $a_1,\omega_1 \to \omega$ по условию β_1;
- поскольку $g(x,u)$ монотонно убывает, $g'(x,u) \leqslant 0$, а значит
$$\int\limits_{a_1}^{\omega_1} -g'(x,u)\,\mathrm{d}x \geqslant 0; \tag{3.6}$$
- $\int\limits_{a_1}^{\omega_1} -g'(x,u)\,\mathrm{d}x = -\big(g(\omega_1,u) - g(a_1,u)\big) \rightrightarrows 0$ при $a_1,\omega_1 \to \omega$ по предыдущему пункту и условию β_1.

Осталось применить критерий Коши равномерной сходимости.

Доказательство теоремы при выполнении условий (α_2) и (β_2) оставляется читателю в качестве упражнения. Для этого нужно использовать функцию $\int\limits_{x}^{\omega} f(x,u)\,\mathrm{d}x$. ■

Лемма 3.4. Пусть $g \in C([a,\omega)\times[c,\widetilde{\omega}))$. Пусть $\int\limits_{a}^{\omega} g(x,t)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по $t \in [c,\widetilde{\omega})$. Тогда отображение $F\colon t \mapsto \int\limits_{a}^{\omega} g(x,t)\,\mathrm{d}x$ непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_b\colon t \mapsto \int\limits_{a}^{b} g(x,t)\,\mathrm{d}x$. По условию $F_b \rightrightarrows F$ равномерно по $t \in [c,\widetilde{\omega})$ и $F_b \in C[c,\widetilde{\omega})$ по следствию для собственных интегралов. Значит, по теореме Стокса-Зейделя $F \in C[c,\widetilde{\omega})$. ■

Теорема 3.5 (Абеля). Пусть $f \in C[0,+\infty)$, $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится. Тогда

$$\exists \lim_{t\to 0+} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Доказательство. Применим признак Абеля-Дирихле, чтобы показать, что $\int\limits_0^\infty f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по $t \in [0,+\infty)$. Действительно:

(α_2) $\int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится;

(β_2) $0 \leqslant e^{-tx} \leqslant 1\ \forall x, t \in [0,+\infty)$.

По предыдущей теореме, $F\colon t \mapsto \int\limits_0^\infty f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x$ непрерывна на $[0,+\infty)$. В частности, $F(0) = \lim\limits_{t\to 0+} F(t)$, что эквивалентно

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+0}\int\limits_0^\infty f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

■

Теорема 3.6. Пусть $f \in C([a,\omega)\times[c,\widetilde{\omega}))$, причем $\forall x \in [a,\omega)\ \exists\, \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u) \in C[c,\widetilde{\omega})$ и $\int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится $\forall u$, $\int\limits_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по u на $[c,\widetilde{\omega})$. Тогда отображение $F\colon u \mapsto \int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ лежит в $C^1[c,\widetilde{\omega})$ и $F'(u) = \int\limits_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x$.

Доказательство. Для $b \in [a,\omega)$ рассмотрим отображение $F_b\colon u \mapsto \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$. По теореме о дифференцировании собственных интегралов, $F_b \in C^1[c,\widetilde{\omega})$ и

$$F_b'(u) = G_b(u) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{3.9}$$

Так как интеграл $G(u) = \int\limits_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно, то $F_b' \rightrightarrows G$ на $[c,\widetilde{\omega})$ при $b \to \omega$. Значит к $\{F_b\}_{b>a}$ можно применить общую теорему о дифференцируемости предельной функции, а значит $F \in C^1[c,\widetilde{\omega})$, $F'(u) = \lim\limits_{b\to\omega} F_b'(u) = G(u)\ \forall u \in [c,\widetilde{\omega})$. ■

Утверждение 3.7.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi. \tag{3.10}$$

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

1. Этот интеграл сходится по признаку Абеля-Пуассона.

2. Под интегралом стоит четная функция, а потому можно его разбить на две равные части и применить теорему Абеля:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{t\to+0}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Обозначим

$$I(t) := \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

Хотим вычислить его производную. Для этого нужно проверить равномерную сходимость интеграла

$$-\int\limits_0^\infty \sin x e^{-tx}\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} I'(t) \tag{3.13}$$

на любом промежутке вида $[t_0,+\infty)$, $t_0>0$. Это можно сделать по признаку Вейерштрасса:

$$|\sin xe^{-tx}| \leqslant e^{-t_0x} \quad \forall t\geqslant t_0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{3.14}$$

а $\int\limits_0^\infty e^{-t_0x}\,\mathrm{d}x<\infty$.

3. Вычислим $I'(t)$ (интегрируем по частям):

$$-I'(t) = \int\limits_0^\infty \sin xe^{-tx}\,\mathrm{d}x = -\cos xe^{-tx}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \cos x(-t)e^{-tx}\,\mathrm{d}x \tag{3.15}$$

$$= 1+\sin x(-t)e^{-tx}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \sin x(t^2)e^{-tx}\,\mathrm{d}x \tag{3.16}$$

$$= 1+t^2I'(t), \tag{3.17}$$

откуда

$$-I'(t)=\frac{1}{1+t^2},\quad -I(t)=\arctan t+c. \tag{3.18}$$

Осталось вычислить константу. Для этого удобно устремить t к бесконечности: очевидно, что $I(\infty)=0$, а $\arctan(\infty)=\pi/2$, откуда следует, что $c=-\pi/2$. Таким образом,

$$I(t)=\frac{\pi}{2}-\arctan t, \tag{3.19}$$

в частности,

$$I(0)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}, \tag{3.20}$$

откуда следует исходное утверждение.

■

Теорема 3.8. Пусть $f \in C([a,\omega) \times [c,\widetilde{\omega}))$,

$$\int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ сходится равномерно по } y \in [c,\widetilde{\omega}),$$

$$\int\limits_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ сходится равномерно по } x \in [a,\omega).$$

Тогда если сходится один из интегралов $\int\limits_a^\omega \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ или $\int\limits_c^{\widetilde{\omega}} \int\limits_a^\omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, то сходятся оба и

$$\int\limits_a^\omega \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} \int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.21}$$

Доказательство. Не умаляя общности, скажем, что

$$F = \int\limits_a^\omega \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty,$$

и определим

$$F(u) := \int\limits_a^\omega \int\limits_c^u f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{3.22}$$

$$\widetilde{F}(u) := \int\limits_c^u \int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.23}$$

$\widetilde{F}$ определена корректно, так как $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ — непрерывная функция по y, а $[c,u]$ — отрезок. F определена корректно по критерию Коши:

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_c^u f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{3.24}$$

$F \in C^1[c,\widetilde{\omega})$, так как

$$\int\limits_a^\omega \left(\int\limits_c^u f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)'_u \mathrm{d}x = \int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x, \tag{3.25}$$

а последний интеграл сходится равномерно по предположению. Непрерывная дифференцируемость $\widetilde{F}$ очевидна. Получаем

$$F'(u) = \int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x, \tag{3.26}$$

$$\widetilde{F}'(u) = \int\limits_a^\omega f(x,u)\,\mathrm{d}x, \tag{3.27}$$

откуда $F(u) = \widetilde{F}(u) + c_1$. Поскольку $F(c) = \widetilde{F}(c) = 0, c_1 = 0$ и $F(u) = \widetilde{F}(u)\ \forall u \in [c, \widetilde{\omega})$. По условию, $\int\limits_c^u f(x,y)\,\mathrm{d}y \rightrightarrows \int\limits_c^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$, откуда

$$\exists \lim_{u\to\widetilde{\omega}} \int\limits_a^\omega \int\limits_c^u f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^\omega \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\omega} \widetilde{F}(u). \tag{3.28}$$

По равенству F и $\widetilde{F}$ получаем, что

$$\lim_{u\to\omega} \widetilde{F}(u) = \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} \int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^\omega \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{3.29}$$

что и требовалось. ■

Замечание.

$$\int\limits_a^\omega \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

существует по критерию Коши (см. предыдущее доказательство). Далее смотрим обоснование предыдущего перехода в доказательстве теоремы Абеля.

Пример 3.1 (интеграл Эйлера-Пуассона).

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

(последующее доказательство неверно, см. знак вопроса) Пусть $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Тогда

$$I = [x = ty] = t\int\limits_0^\infty e^{-t^2y^2}\,\mathrm{d}y,$$

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty e^{-x^2}\left(x\int_0^\infty e^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty xe^{-x^2y^2-x^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= [?] = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty xe^{-x^2(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2+1}\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Значит $I^2 = \frac{\pi}{4} \implies I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies \int = \sqrt{\pi}$. Осталось проверить [?], что

1. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2(y^2+1)}\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по $[0,+\infty)$.

2. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2(y^2+1)}\,\mathrm{d}y$ сходится равномерно по $x \in [0,+\infty)$.

Докажем:

1. $$\left|xe^{-x^2(y^2+1)}\right| = xe^{-x^2(y^2+1)} \leqslant xe^{-x^2}\ \forall y \in [0,+\infty).$$
$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty \implies$$
по признаку Вейерштрасса.

2. Нужно проверить, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon) : x\int\limits_M^\infty e^{-x^2(y^2+1)}\,\mathrm{d}y < \varepsilon\ \forall x \in [0,+\infty)$.
$$x\int_M^\infty e^{-x^2(y^2+1)}\,\mathrm{d}y \leqslant x\int_M^\infty e^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y = [t = xy] = \int_{Mx}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$
При больших M равномерно по $x \in [0,+\infty)$. Очевидно, это неверно, поэтому переставить интегралы с помощью доказанной ранее теоремы не получится. Тем не менее, результат верен за счет следующей теоремы:

Теорема 3.9 (Фубини). Пусть $f, g \in R[a,b]\ \forall b \in [a,\omega)$ и пусть
$$\exists \int_a^\omega \left(\int_a^\omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Тогда

$$\exists \int\limits_a^\omega \int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^\omega \int\limits_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство. (в следующем семестре) ■

4 Эйлеровы интегралы

Определение. Определим бета-функцию и гамма-функцию:

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \quad x,y > 0, \tag{4.1}$$

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0. \tag{4.2}$$

Утверждение 4.1 (элементарные свойства гамма-функции).

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ \forall x > 0$;
3. $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}_0$;
4. $\Gamma \in C^\infty(0,+\infty)$, причем

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int\limits_0^\infty (\log t)^n t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

5. Γ выпукла на $(0,+\infty)$.

Доказательство.

1. $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$.
2. $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x(e^{-t})'\Big|_0^\infty + x\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + x\Gamma(x)$.
3. Очевидным образом следует из первых двух свойств.

4. $\Gamma \in C(0, +\infty)$, так как интеграл $\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ сходится равномерно на любом промежутке $[x_0, x_0+1]$ $\forall x_0 > 0$. Осталось заметить, что

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int\limits_0^\infty (\log t)^n t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

так как все такие интегралы сходятся равномерно по $x \in [x_0, x_0+1]$.

5. Из предыдущего пункта видно, что $\Gamma'' > 0$ на $(0, +\infty)$, а значит гамма-функция выпукла. ■

Для доказательства более сложного свойства — логарифмической выпуклости, нам понадобятся две следующие леммы:

Лемма 4.2 (неравенство Юнга).

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ \forall a, b \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. Будем считать, что $a, b > 0$. $(\log x)'' < 0$ на $(0, +\infty)$, то есть $\log x$ — вогнутая функция, откуда

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log(ab). \tag{4.5}$$

Осталось взять экспоненту от последнего неравенства. ■

Лемма 4.3 (неравенство Гельдера). Пусть $w \geqslant 0$, $w \in R[a,b]$ $\forall b < \omega$. Тогда если $f, g \in R[a,b]$ $\forall b < \omega$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \geqslant 1$, то

$$\int\limits_a^\omega |fg|w \leqslant \left(\int\limits_a^\omega |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^\omega |g|^q w\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Можно считать, что $f, g, w \in R[a, \omega)$, $\omega < \infty$. Тогда по неравенству Юнга

$$\int\limits_a^\omega |fg|w = \int\limits_a^\omega |\theta f| \cdot \left|\frac{1}{\theta}g\right| w \leqslant \frac{\theta^p}{p}\int\limits_a^\omega |f|^p w + \frac{\theta^q}{q}\int\limits_a^\omega |g|^q w \quad \forall \theta > 0. \tag{4.7}$$

Выберем θ так, что

$$\theta^p \int\limits_a^\omega |f|^p w = \left(\int\limits_a^\omega |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^\omega |g|^q w\right)^{\frac{1}{q}} = AB. \tag{4.8}$$

$\theta^p A^p = AB$, докажем, что $\theta^q B^q = AB \implies \int\limits_a^\omega |fg|w \leqslant \frac{1}{p}AB + \frac{1}{q}AB = AB.$

$$\theta = \left(\frac{AB}{A^p}\right)^{\frac{1}{p}} \implies \theta^q B^q = \frac{(AB)^{\frac{q}{p}}}{A^q} \cdot B^q = A^{\frac{q}{p}-q} B^{\frac{q}{p}+q}. \tag{4.9}$$

■

Утверждение 4.4. $\log\Gamma(x)$ — выпуклая функция, то есть

$$\log\Gamma\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant \alpha \log\Gamma(x) + (1-\alpha)\log\Gamma(y), \tag{4.10}$$

где $0 < \alpha < 1$.

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha x + (1-\alpha)y) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha x + (1-\alpha)y - 1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \tag{4.11}$$

$$\leqslant \left[\text{по нер-ву Гельдера для } w = te^{-t},\ p = \frac{1}{\alpha},\ q = \frac{1}{1-\alpha},\ f = t^{\alpha x}\right] \leqslant \tag{4.12}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^\infty t^x \cdot t^{-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^\alpha \cdot \left(\int\limits_0^\infty t^y \cdot t^{-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\alpha} = \Gamma(x)^\alpha \cdot \Gamma(y)^{1-\alpha}. \tag{4.13}$$

Осталось прологарифмировать последнее неравенство. ■

Теорема 4.5 (Бора-Моллерупа). Пусть $\widetilde{\Gamma}\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такая, что

1. $\widetilde{\Gamma}(1) = 1$,
2. $\widetilde{\Gamma}(x+1) = x\widetilde{\Gamma}(x)$,
3. $\log\widetilde{\Gamma}$ — выпуклая функция на $(0,+\infty)$.

Тогда $\Gamma(x) = \widetilde{\Gamma}(x)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\Gamma(x) = \widetilde{\Gamma}(x)$ $\forall x \in (0,1)$. Зафиксируем $x \in (0,1)$, $g\colon t \to \log\widetilde{\Gamma}(t)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда по выпуклости g имеем

$$\frac{g(n) - g(n-1)}{n - (n-1)} \leqslant \frac{g(n+x) - g(n)}{n + x - n} \leqslant \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n}. \tag{4.14}$$

Значит

$$\log\frac{(n-1)!}{(n-2)!} \leqslant \frac{g(n+x) - g(n)}{x} \leqslant \log\frac{n!}{(n-1)!} \iff \tag{4.15}$$

$$\log(n-1) \leqslant \frac{\log\dfrac{(n+x-1)\cdot \ldots \cdot x\widetilde{\Gamma}(x)}{(n-1)!}}{x} \leqslant \log n \iff \tag{4.16}$$

$$(n-1)^x \leqslant \frac{(n+x-1)\cdot \ldots \cdot x\widetilde{\Gamma}(x)}{(n-1)!} \leqslant n^x \iff \tag{4.17}$$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(n+x-1)\cdot \ldots \cdot x} \leqslant \widetilde{\Gamma}(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{(n+x-1)\cdot \ldots \cdot x}. \tag{4.18}$$

Правая часть не зависит от n, а потому можно подставить $n+1$ вместо n в левую часть.

$$\frac{n^x n!}{(n+x)(n+x-1)\cdot \ldots \cdot x} \leqslant \widetilde{\Gamma}(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{(n+x-1)\cdot \ldots \cdot x}. \tag{4.19}$$

Обозначая правую часть за $f_n(x)$, получаем

$$\frac{n}{n+x} f_n(x) \leqslant \widetilde{\Gamma}(x) \leqslant f_n(x), \tag{4.20}$$

$$\frac{n}{n+x} f_n(x) \leqslant \Gamma(x) \leqslant f_n(x). \tag{4.21}$$

Отсюда нетрудно получить оценку на частное:

$$\frac{n}{n+x} \leqslant \frac{\widetilde{\Gamma}(x)}{\Gamma(x)} \leqslant \frac{n+x}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Устремляя n к бесконечности для каждого фиксированного x, получаем $\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$. ■

Утверждение 4.6 (свойства бета-функции).

1. $B(x,y) = B(y,x)$.
2. $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y} B(x,y)$.
3. $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. В частности,

$$B(n+1,m+1) = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}. \tag{4.23}$$

Доказательство.

1. Достаточно сделать замену в интеграле: $u := 1-t$.
2. Посчитаем $B(x+1,y)$ двумя способами. С одной стороны,

$$B(x+1,y) = \int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \tag{4.24}$$

$$= \int\limits_0^1 t^{x-1}\big((t-1)+1\big)(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \tag{4.25}$$

$$= -B(x,y+1) + B(x,y). \tag{4.26}$$

С другой стороны,

$$B(x+1,y) = \int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \tag{4.27}$$

$$= -\int\limits_0^1 t^x\left(\frac{(1-t)^y}{y}\right)'\,\mathrm{d}t \tag{4.28}$$

$$= -t^x\cdot\frac{(1-t)^y}{y}\bigg|_0^1 + \frac{x}{y}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \tag{4.29}$$

$$= \frac{x}{y}B(x,y+1). \tag{4.30}$$

Таким образом, получаем уравнение

$$B(x+1,y) = -\frac{y}{x}B(x+1,y) + B(x,y) \iff \tag{4.31}$$

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)B(x+1,y) = B(x,y) \iff \tag{4.32}$$

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y). \tag{4.33}$$

3. Достаточно доказать, что

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall x,y\in(1,2). \tag{4.34}$$

Действительно, $B(1,1)=1$, $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$,

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y), \tag{4.35}$$

причем

$$\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)} = \frac{x}{x+y}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{4.36}$$

Осталось заметить, что $B(x,y)=B(y,x)$ и $G(x,y)=G(y,x)$, где

$$G(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Зафиксируем теперь $x,y\in(1,2)$. Хотим показать, что

$$\Gamma(x+y)B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y). \tag{4.37}$$

Посчитаем:

$$\Gamma(x+y)B(x,y) = \int\limits_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \tag{4.38}$$

$$= \left[t := \frac{1}{1+s},\ 1-t = \frac{s}{1+s}\right] \tag{4.39}$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+s)^{x-1+2}}\cdot\frac{s^{y-1}}{(1+s)^{y-1}}\,\mathrm{d}s\right) \tag{4.40}$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int\limits_0^\infty \frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}\,\mathrm{d}s\right) \tag{4.41}$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}}\left(\int\limits_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s. \tag{4.42}$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену t на u, где $t = u(1+s)$:

$$\int\limits_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty u^{x+y-1}\cdot(1+s)^{x+y-1}e^{-u(1+s)}\cdot(1+s)\,\mathrm{d}u,$$

$$= (1+s)^{x+y}\int\limits_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u(1+s)}\,\mathrm{d}u.$$

Продолжим предыдущие равенства:

$$\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\infty s^{y-1}u^{x+y-1}e^{-u(1+s)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s = [?] = \int\limits_0^\infty e^{-u}u^{x+y-1}\left(\int\limits_0^\infty s^{y-1}e^{-us}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u$$

Заменим $v = us$, получаем

$$\int\limits_0^\infty s^{y-1}e^{-us}\,\mathrm{d}s = \int\limits_0^\infty \frac{v^{y-1}}{u^{y-1}}\cdot\frac{e^{-v}\,\mathrm{d}v}{u} = \frac{\Gamma(y)}{u^y}.$$

Тогда получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{u^{x+y-1}}{u^y}\Gamma(y)\,\mathrm{d}u = \Gamma(x)\Gamma(y).$$

Осталось доказать, что

$$\int\limits_0^\infty s^{y-1}u^{x+y-1}e^{-u(1+s)}\,\mathrm{d}u$$

сходится равномерно по $s \in [0,\infty)$, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists M$:

$$\left|\int\limits_M^\infty s^{y-1}u^{x+y-1}e^{-u(1+s)}\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon\ \forall s \in [0,+\infty). \tag{4.43}$$

Выберем $s_0 > 0$:

$$s_0^{y-1} \int\limits_0^\infty u^{x+y-1} e^{-u}\, du < \varepsilon.$$

Тогда $\forall s \in [0, s_0]$ $\forall M > 0$ выполнено (4.43). Если $s \geqslant s_0$, то

$$\int\limits_M^\infty \ldots = [t = us] = \int\limits_{sM}^\infty s^{y-1} \frac{t^{x+y-1}}{s^{x+y-1}} e^{-\frac{t(1+s)}{s}}\, dt \leqslant \int\limits_{sM}^\infty \frac{1}{s^{x+1}} t^{x+y-1} e^{-t}\, dt \leqslant \frac{1}{s_0^{x+1}} \int\limits_{Ms_0}^\infty t^{x+y-1} e^{-t}\, dt < \varepsilon$$

при больших M.

$$\begin{aligned} &\int\limits_M^\infty s^{y-1} u^{x+y-1} e^{-u(1+s)}\, ds = \\ &= u^{x+y-1} e^{-u} \int\limits_M^\infty s^{y-1} e^{-us}\, ds = [t = us] = \\ &= u^{x+y-1} e^{-u} = \int\limits_M^\infty \frac{t^{y-1}}{u^{y-1}} e^{-t} \frac{dt}{u} = \\ &= u^{x-1} e^{-u} \int\limits_{Mu}^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

Поскольку $x > 1$, то при $u \in [0, u_0]$ есть оценка $< \varepsilon$ $\forall M$, а если $u \geqslant u_0$, то $u^{x-1} e^{-u} \leqslant c$ и

$$\int\limits_{Mu}^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt \leqslant \int\limits_{Mu_0} t^{y-1} e^{-t}\, dt < \varepsilon.$$

■

Пример 4.1. Из общей формулы о связи B и Γ-функций следует, что

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2.$$

Воспользуемся этой формулой, чтобы вычислить интеграл Эйлера-Пуассона.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt = [\sqrt{t} = u] = 2\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\, du = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du.$$

Мы уже знаем, что интеграл в правой части равен $\sqrt{\pi}$. Однако его можно вычислить и с помощью B–функции.

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = [u=\sqrt{t}] =$$
$$= 2\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = [u=\sin x] = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})} = \sqrt{\pi},$$

как и ожидалось.

5 Аппроксимация и компактность в $C(K)$

Определение. Семейство функций $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$, $\varphi_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *аппроксимативной единицей* с центром в точке 0, если:

1. $\varphi_n \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$,
2. $\varphi_n \in R[-A,A]\ \forall A>0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
3. $\forall\delta>0\ \int\limits_{-\infty}^{-\delta}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\delta}^{\infty}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ при $n\to\infty$.

Пример 5.1.

1. Аппроксимативная единица Стеклова:

$$\varphi_n(x) = \chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\cdot\frac{n}{2}.$$

   (a) $\varphi_n \geqslant 0$ — очевидно.

   (b)

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\cdot\int\limits_{-1/n}^{1/n} 1\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\cdot\frac{n}{2} = 1.$$

   (c) Если n таково, что $\frac{1}{n}<\delta$, то

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty}\right)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Аппроксимативная единица Пуассона:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y_n}{x^2+y_n^2}, \text{ где } y_n = \frac{1}{n}.$$

   (a) $\varphi_n \geqslant 0$ — очевидно,

   (b)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y_n}{x^2+y_n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{x}{y_n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{y_n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 1.$$

   (c)

$$\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{y_n\,\mathrm{d}x}{x^2+y_n^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{nb}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Теорема 5.1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — аппроксимативная единица с центром в нуле, $f \in C(\mathbb{R})$, f равномерно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$. Пусть

$$f_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$.

Замечание. Определим $T_n\colon f \mapsto f_n$. T_n — линейный оператор на $C(\mathbb{R})$. Тогда теорема утверждает, что $T_n f \to If$ в пространстве $C_b(\mathbb{R})$ — пространстве ограниченных равномерно непрерывных функции на $\mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Здесь I – тождественный (единичный) оператор.

Доказательство. Пусть $f \in C_b(\mathbb{R})$. Заметим, что по (5.1) имеем

$$f_n(t) - f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(f(x)-f(t)\big)\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x \quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{5.2}$$

так как $f(t)$ выносится из-под интеграла, а по свойствам аппроксимативной единицы $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x = 1$. Разобьем последний интеграл в на три части:

$$\int\limits_{-\infty}^{t-\delta} + \int\limits_{t+\delta}^{\infty}\big(f(x)-f(t)\big)\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\big(f(x)-f(t)\big)\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

(очевидно, это можно сделать $\forall\delta>0$). Зафиксируем $\varepsilon>0$, выберем $\delta=\delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x,y : |x-y| < 2\delta$ (по равномерной непрерывности). Тогда выражение в (5.3) можно оценить следующим образом:

$$|f_n(t)-f(t)| \leqslant 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{t-\delta} + \int\limits_{t+\delta}^{\infty}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$+\sup_{\substack{x,t:\\|x-t|<2\delta}}|f(x)-f(t)|\cdot\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

Обозначим $c = 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ (константа),

$$A_n(\delta) = \left(\int\limits_{-\infty}^{t-\delta}+\int\limits_{t+\delta}^{\infty}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x\right), \tag{5.5}$$

$$B(\delta) = \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x, \tag{5.6}$$

$$\iota(2\delta) = \sup_{\substack{x,t:\\|x-t|<2\delta}}|f(x)-f(t)|. \tag{5.7}$$

Заметим, что по свойствам аппроксимативной единицы

$$B(\delta) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{5.8}$$

Кроме того, $\omega(2\delta) < \varepsilon$ (поскольку мы так выбрали δ), и, опять по свойствам АЕ имеем

$$A_n(\delta) = \int\limits_{-\infty}^{t-\delta}+\int\limits_{t+\delta}^{\infty}\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\infty}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{5.9}$$

Применяя эти оценки, продолжим (5.4):

$$|f_n(t)-f(t)| \leqslant c\cdot A_n(\delta)+\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0,\ 0<\delta<\delta(\varepsilon) \implies \tag{5.10}$$

$$|f_n(t)-f(t)| \leqslant (c+1)\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N} : A_n(\delta)<\varepsilon\ \forall t\in\mathbb{R}. \tag{5.11}$$

Мы использовали, что при больших n неравенство $A_n(\delta) < \varepsilon$ выполняется по свойству (3) аппроксимативной единицы. Значит, $f_n \rightrightarrows f$. ■

Теорема 5.2 (Вейерштрасса о равномерной аппроксимации). Пусть $f \in C[0,1]$. Тогда $\exists\{p_n\}_{n\geqslant 1}$, p_n — полином для любого $\forall n : p_n \rightrightarrows f$ на $[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим $Q_n(x) = \left(1-x^2\right)^n\cdot c_n\cdot\chi_{[-1,1]}$, где $c_n > 0$ таково, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{5.12}$$

Предположим, что мы доказали, что Q_n — аппроксимативная единица. Тогда функции

$$p_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)Q_n(x-t)\,\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

сходятся равномерно к f на $\mathbb{R}$ $\forall f \in C[0,1] : f(0) = f(1) = 0$. Действительно, можно продолжить f нулем на множество $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ и воспользоваться предыдущей теоремой. Поймем, что $p_n(t)$ — многочлены на $[0,1]$:

$$p_n(t) = c_n \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\big(1-(x-t)^2\big)^n \chi_{[-1,1]}(x-t)\,\mathrm{d}x. \tag{5.14}$$

Заметим, что $\chi_{[-1,1]}(x-t) = 1\,\forall x \in [0,1]\,\forall t \in [0,1]$, а потому можем продолжить (5.14):

$$\begin{aligned} p_n(t) &= c_n \int\limits_0^1 f(x)\big(1-(x-t)^2\big)^n\,\mathrm{d}x \\ &= c_n \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{2n} h_k(x)t^k\,\mathrm{d}x \\ &= c_n \sum_{k=0}^{2n}\left(\int\limits_0^1 h_k(x)\,\mathrm{d}x\right)t^k. \end{aligned} \tag{5.15}$$

(для некоторых функций $h_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$). Из последнего равенства ясно видно, что $p_n(t)$ — многочлен.

Заметим также, что в рамках данной задачи мы можем считать не умаляя общности, что $f(0) = f(1) = 0$, так как f и $\widetilde{f} = f(x) - (ax+b)$ одновременно можно или нельзя равномерно приблизить многочленами. Если теперь взять $b = f(0),\ a = f(1) - f(0)$, то получается

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}(0) = 0, \\ &\widetilde{f}(1) = f(1) - (a+b) = f(1) - \big(f(1) - f(0) + f(0)\big) = 0. \end{aligned}$$

Осталось показать, что Q_n — аппроксимативная единица.

1. $Q_n \geqslant 0$ — очевидно.
2. $\int\limits_{\mathbb{R}} Q_n = 1$ — по выбору c_n.
3. Оценим c_n:

$$\begin{aligned} &1 = c_n \int\limits_{-1}^{1} \big(1-x^2\big)^n \geqslant c_n \int\limits_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\,\mathrm{d}x = c_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3}{3}\right) = \frac{2c_n}{3\sqrt{n}} \implies \\ &c_n \leqslant \frac{3\sqrt{n}}{2}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Зафиксируем маленькое $\delta > 0$, тогда

$$\int\limits_{-1}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{n} \int\limits_{\delta}^{1} \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \leqslant 3\sqrt{n}\left(1 - \delta^2\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

поскольку $0 < 1 - \delta^2 < 1$.

■

Упражнение. $\forall f \in C[a,b]\ \exists p_n$ — многочлены на $[a,b]$ такие, что $p_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

Следствие 5.3. Существует многочлены $p_n : p_n(0) = 0\ \forall n$ и $p_n \rightrightarrows |x|$ на $[-a,a]$.

Доказательство. Пусть $q_n \rightrightarrows |x|$ на $[-a,a]$, тогда достаточно взять $p_n = q_n - q_n(0)$.

■

Определение. Пусть K — хаусдорфов компакт, $C(K)$ — линейное нормированное пространство, состоящее из вещественных непрерывных функций на K с нормой $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$.

Определение. Множество A называется *алгеброй* над полем K, если A — линейное пространство и задана операция умножения $A \times A \to A$, обладающая свойствами:

$$\begin{aligned} f(\alpha g + \beta h) &= \alpha f g + \beta f h,\\ (\alpha g + \beta h) f &= \alpha g f + \beta h f,\\ (\alpha f)\cdot(\beta g) &= (\alpha\beta)(f g) \end{aligned}$$

для произвольных $f, g, h \in A$ и $\alpha, \beta \in K$.

Пример 5.2. $C(K)$ — алгебра над $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $A \subset C(K)$ — алгебра над $\mathbb{R}$. Тогда A называется *алгеброй Стоуна*, если:

1. $\forall x \in K\ \exists f \in A : f(x) \neq 0$ (“алгебра A не исчезает ни в какой точке”).

2. $\forall x, y\ \exists g \in A : g(x) \neq g(y)$ (“алгебра A разделяет точки”).

Пример 5.3. Многочлены — алгебра Стоуна в $[0,1]$.

Пример 5.4. Многочлены вида $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^{2k}$ — алгебра в $C[-1,1]$, но не алгебра Стоуна (не выполнено второе свойство).

Пример 5.5. Многочлены вида $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^{2k}$ — алгебра Стоуна в $[1,3]$.

Упражнение. Выяснить, при каких $\varepsilon > 0$ $\operatorname{span}\left(\{\cos nx\}_{n\geqslant 0} \cup \{\sin nx\}_{n\geqslant 0}\right)$ — алгебра Стоуна в $C[0,\epsilon]$.

Замечание. Если $\{f_n\} \subset C(K)$, $g \in C(K)$, то

$$f_n \to g \text{ в } C(K) \iff \|f_n - g\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff f_n \rightrightarrows g \text{ на } K.$$

(поскольку $f_n - g \rightrightarrows 0$ на $K \iff \sup_{x\in K} |f_n(x) - g(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$).

Нетрудно понять, что $E \subset C(K)$ *плотно* в $C(K)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall f \in C(K)\ \exists\{f_n\} \subset E : f_n \rightrightarrows f.$$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится следующее утверждение из топологии:

Лемма 5.4 (Урысона). Если X — нормальное топологическое пространство, E_1, E_2 — замкнутые подмножества X, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \neq \varnothing$, $E_2 \neq \varnothing$. Тогда $\exists \varphi \in C(X \to \mathbb{R})$:

$$\varphi(x) = 1\ \forall x \in E_1,$$
$$\varphi(x) = 0\ \forall x \in E_2.$$

Теорема 5.5 (Стоуна-Вейерштрасса). Пусть $A \subset C(K)$ — алгебра. Тогда следующие условия равносильны:

1. A плотно в $C(K)$.
2. A — алгебра Стоуна.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ A не исчезает на K, так как существует последовательность $f_n \in A : f_n \rightrightarrows 1$ на K, а значит для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $|f_n(x) - 1| < \frac{1}{2}\ \forall x \in K$, то есть, в частности, $f_n(x) \neq 0\ \forall x \in K$.

Пусть теперь $x, y \in K : x \neq y$. По лемме Урысона можем найти функцию $g \in C(K) : g(x) = 1,\ g(y) = 0$. Так как A плотно в $C(K)$, то $\exists f \in A : \|f - g\| < \frac{1}{4}$, откуда, в частности, следует, что $|f(x) - 1| < \frac{1}{4}$, $|f(y) - 0| < \frac{1}{4} \implies f(x) \neq f(y)$ по неравенству треугольника.

$\Longleftarrow$ Разобьем доказательство на несколько шагов.
Шаг 1. Покажем, что $\forall x, y \in K,\ \forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists u \in A : u(x) = a,\ u(y) = b$.

Заметим, что утверждение достаточно доказать для $a = 1,\ b = 0$: если

$$u_1 \in A : u_1(x) = 1,\ u_1(y) = 0,$$
$$u_2 \in A : u_2(y) = 1,\ u_2(x) = 0,$$

то можем взять $u = au_1 + bu_2$. Более того, достаточно построить $u \in A$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \neq 0, \quad u(y) \neq u(x), \tag{5.17}$$

поскольку если такая функция построена, то можно определить

$$v = \frac{u^2 - u(y)u}{u^2(x) - u(y)u(x)} \in A, \tag{5.18}$$

причем нетрудно проверить, что $v(y) = 0$, $v(x) = 1$.

Построим теперь u, удовлетворяющую условию (5.17). По условию $\exists f, g \in A$: $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq g(y)$. Можно считать, что

$$f(x) = f(y) \neq 0 \quad (\text{иначе } u = f), \tag{5.19}$$

$$g(x) = 0,\ g(y) \neq 0 \quad (\text{иначе } u = g). \tag{5.20}$$

Покажем, что в этом случае $u = f + g$ — искомая. Действительно,

$$u(x) = f(x) + g(x) = f(x) \neq 0, \tag{5.21}$$

$$u(x) \neq u(y) \iff f(x) + g(x) \neq f(y) + g(y) \iff g(x) \neq g(y). \tag{5.22}$$

Шаг 2. Обозначим $B = \operatorname{Cl} A$. Тогда $f \in B \implies |f| \in B$.

Положим $a = \sup_{x \in K} |f|$. Найдем по следствию 5.3 многолчены p_n, такие, что $p_n(x) \rightrightarrows |x|$ для $x \in [-a, a]$, $p_n(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Значит $p_n(f) \rightrightarrows |f|$ на K. Осталось заметить, что по линейности $p_n(f) \in B$, так как p_n не содержит свободного члена.

Шаг 3. Если $f_1, \ldots, f_n \in B$, то $\min(f_1, \ldots, f_n) \in B$, $\max(f_1, \ldots, f_n) \in B$.

Понятно, что достаточно доказывать для $n = 2$. По предыдущему шагу в B есть модули f_i, а с помощью них них можно линейно выразить максимум и минимум:

$$\max(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{|f_1 - f_2|}{2}, \tag{5.23}$$

$$\min(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{|f_1 - f_2|}{2}. \tag{5.24}$$

Шаг 4. $\forall x \in K$, $\forall f \in C(K)\ \exists g_x \in B : g_x(y) > f(y) - \varepsilon\ \forall y \in K$, $g_x(x) = f(x)$.

Для каждого $y \in K$ построим по первому шагу функцию $h_{x,y} \in B$:

$$h_{x,y}(x) = f(x),$$
$$h_{x,y}(y) = f(y).$$

Положим

$$J_y = \{z \in K : h_{x,y}(z) > f(z) - \varepsilon\}. \tag{5.25}$$

Тогда J_y — прообраз открытого множества $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ при непрерывном отображении $h_{x,y}(z) - f(z) + \varepsilon$, а значит J_y открыто. Кроме того, по построению $h_{x,y}$

имеем $y \in J_y$, а значит

$$\bigcup_{y \in K} J_y = K.$$

K — компакт, поэтому можем выделить конечное подпокрытие $J_{y_1} \cup \ldots \cup J_{y_n} = K$. Тогда понятно, что функция

$$g_x(z) = \max\left(h_{x,y_1}, \ldots, h_{x,y_n}\right) \tag{5.26}$$

будет искомой, причем $g_x \in B$ по шагу 3.

Шаг 5. Пусть $\{g_x\}_{x \in K}$ — семейство функций, построенное на предыдущем шаге для некоторой функции $f \in C(K)$. Тогда $\forall x \in K$ множество точек

$$V_x = \{z \in K : g_x(z) < f(z) + \varepsilon\} \tag{5.27}$$

— непусто (содержит x) и открыто (аналогично предыдущему пункту). Значит $K = \bigcup_{x \in K} V_x$ и мы можем выбрать конечное подпокрытие $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Осталось задать

$$g = \min\left(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}\right). \tag{5.28}$$

Тогда $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$ всюду на K. Значит

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall f \in C(K)\, \exists g \in B : \|g - f\| < \varepsilon, \tag{5.29}$$

то есть A плотно в $C(K)$ по определению.

■

Определение. Пусть $E \subset C(K)$. Будем говорить, что E — *равномерно ограниченное семейство*, если $\|f\| < c\ \forall f \in E \iff |f(x)| < c\ \forall x \in K$.

Определение. Пусть K — метрический компакт с метрикой d, $E \subset C(K)$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall f \in E. \tag{5.30}$$

Лемма 5.6. Пусть K — метрический компакт, $E \subset C(K)$. Тогда $\mathrm{Cl}(E)$ компактно в $C(K)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\forall \{f_n\} \subset E\, \exists \{f_{n_k}\},\ f \in C(K) : \|f_{n_k} - f\| \to 0. \tag{5.31}$$

Доказательство. Следует из одного из утверждений топологии и того, что топология метризуема. ■

Теорема 5.7 (Арцела-Асколи). Пусть K — метрический компакт, $E \subset C(K)$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\mathrm{Cl}(E)$ компактно в $C(K)$.

2. E равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Пример 5.6. $K = [0,1]$, $E = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда $\mathrm{Cl}(E)$ не является компактом в $C[0,1]$.

Действительно, пусть $\{x^{n_k}\}$ — последовательность сходящаяся равномерно к $f \in C[0,1]$, $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1)$. Тогда по непрерывности $f(1) = 0$, но $x^{n_k}(1) = 1$ $\forall k$. Противоречие. Чтобы убедиться, что пример согласуется с теоремой Арцела-Асколи, достаточно рассмотреть пары $x = 1$, $y = 1 - \delta$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ E ограничено, так как в противном случае $\mathrm{Cl}(E)$ не ограничено и из покрытия $\bigcup_{n\geqslant 1} B(0,n)$ нельзя извлечь конечное подпокрытие.

Покажем равностепенную непрерывность. Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим покрытие $\mathrm{Cl}(E)$ шарами $B(f,\varepsilon)$, где $f \in \mathrm{Cl}(E)$. Выделим конечное подпокрытие: $\mathrm{Cl}(E) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(f_k,\varepsilon)$. Для каждого k выберем

$$\delta_k(\varepsilon) : d(x,y) < \delta_k \implies |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon. \tag{5.32}$$

Возьмем $\delta = \min\big(\delta_1(\varepsilon),\ldots,\delta_n(\varepsilon)\big)$. Если $x, y \in K : d(x,y) < \delta$, то

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon \tag{5.33}$$

для некоторого $k : f \in B(f_k,\varepsilon)$. Значит E равностепенно непрерывно.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь E — семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций в $C(K)$. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что в K есть счетное плотное подмножество S.
Для $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим покрытие K шарами

$$B(y,\varepsilon_n) = \{x \in K : d(x,y) < \varepsilon_n\}. \tag{5.34}$$

Ясно, что $K \subset \bigcup\limits_{y\in K} B(y,\varepsilon_n)$. Выберем конечное подпокрытие

$$K = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant N_n} B(y_{n,k},\varepsilon_n). \tag{5.35}$$

Определим $S = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \big\{y_{n,1},\ldots,y_{n,N_n}\big\}$. Нетрудно понять, что $\mathrm{Cl}\,S = K$, при этом S — не более чем счетное множество.

Шаг 2. Покажем, что $\exists\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\} : f_{n_k}$ сходится к точке $x \in S$.
Занумеруем точки S натуральными числами: $S = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Поскольку E равномерно ограничено, $\{f_n(y_1)\}$ — ограниченная последовательность, а значит $\exists\{f_{n_k}(y_1)\} \subset \{f_n(y)\}$ такая, что $f_{n_k}(y_1)$ имеет конечный предел. Обозначим $f_{1,k} = f_{n_k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{f_{1,k}(y_2)\}$ ограничена, значит $\{f_{1,k_j}(y_2)\} \subset$

$\{f_{1,k}(y_2)\}$: $\{f_{1,k_j}(y_2)\}$ имеет конечный предел. Обозначим $f_{2,j} = f_{1,k_j}$. И так далее по индукции $\forall m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_{m,k}\} \subset \{f_n\}$: $f_{m,k}(y_j)$ сходится при $k \to \infty\, \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. По построению, $\forall y \in S\, \exists$ конечный предел $\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(y)$ (мы предполагаем, что $|S|$ бесконечно, так как иначе остановим процесс на номере $|S|$).

Шаг 3. Покажем, что $\{f_{n,n}\}$ равномерно сходится на всем K.
$\forall \varepsilon > 0$ найдем конечный набор точек $x_1, \ldots, x_{N(\varepsilon)} \in S$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} B(x_k, \delta) = K, \tag{5.36}$$

$$\forall x, y \in K,\ n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \delta,\ |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(y)| < \varepsilon. \tag{5.37}$$

Пользуясь равностепенной непрерывностью найдем

$$\delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\, \forall f \in E\, \forall x, y : d(x, y) < \delta. \tag{5.38}$$

Теперь выберем конечное подпокрытие из $\bigcup_{s\in S} B(y, \delta) = K$ и занумеруем центры шаров этого подпокрытия как $x_1, \ldots, x_{N(\varepsilon)}$. $\forall n, m \in \mathbb{N}\, \forall x \in K$ находим такое x_j, $1 \leqslant j \leqslant N(\varepsilon)$, что $d(x, x_j) < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}|f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)| &\leqslant |f_{m,m}(x) - f_{m,m}(x_j)| + |f_{m,m}(x_j) - f_{n,n}(x_j)| + |f_{n,n}(x_j) - f_{n,n}(x)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |f_{m,m}(x_j) - f_{n,n}(x_j)| < 3\varepsilon\ \forall m, n \geqslant N_j, \qquad (5.39) \\ &\text{где } N_j : |f_{m,m}(x_j) - f_{n,n}(x_j)| < \varepsilon\ \forall m, n \geqslant N_j.\end{aligned}$$

(воспользовались сходимостью последовательностей $\{f_{m,m}(x_j)\}$). Значит, если $m, n \geqslant \max(N_1, \ldots, N_{N(\varepsilon)})$, то $|f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)| < 3\varepsilon\ \forall x \in K$. По равномерному общему критерию Коши $\{f_{n,n}\}$ сходится равномерно на K. Более подробно: по обычному критерию Коши последовательность $\{f_{n,n}(x)\}$ сходится $\forall x \in K$, а значит

$$\forall x \in K\ \exists f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n,n}(x).$$

Переходя к пределу в неравенстве (5.39) по $n \to \infty$ получаем, что

$$|f_{m,m}(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon \quad \forall x \in K\ \forall m > \max_{1\leqslant j\leqslant N(\varepsilon)} N_j \implies$$

$f_{m,m} \rightrightarrows f$ на K. ■

Следствие 5.8. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$,

$$c_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(0)\| < \infty,$$

$$c_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ k\in\mathbb{N}}} \|\mathrm{d}_x f_k\| < \infty.$$

Тогда $\exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, $f \in C(\mathbb{R}^n) : f_{n,k} \rightrightarrows f$ на любом компакте $\mathbb{R}^n$.

Доказательство.

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant c_2\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{5.40}$$

(неравенство Лагранжа). В частности, $\forall k\ \forall x \in K\ \|f_n(x)\| \leqslant c_2 \sup_{x\in K} \|x\| + c_1$, поскольку $\|f_n(x)\| \leqslant \|f_n(x) - f_n(0)\| + \|f_n(0)\| \implies \{f_n\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $K \implies$ можно выбрать сходящуюся равномерно на K подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$. Выбирая в качестве K шары

$$\overline{B}_n\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant n\},\ n \in \mathbb{N}$$

и используя диагональный процесс, можно выбрать подпоследовательность $\{f_n\}$, которая равномерно сходится на любом шаре $\overline{B}_n \implies$ сходится на любом компакте $\mathbb{R}^n$. ■

Замечание (дополнение к теореме Стоуна-Вейерштрасса). Пусть $C_{\mathbb{C}}(K)$ — комплексная алгебра непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K. Пусть A — комплексная подалгебра $C_{\mathbb{C}}(K)$:

1. A не исчезает на K,
2. A разделяет точки K,
3. A самосопряженная, то есть $\forall f \in A\ \ \overline{f} \in A$.

Тогда $\operatorname{Cl}(A) = C_{\mathbb{C}}(K)$.

Доказательство. Пусть $B = \{f \in A : f = \overline{f}$ на $K\}$. Тогда B — вещественная подалгебра в вещественной алгебре $C(K)$, кроме того $\forall f \in A\ \ \operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2} \in B$, $\operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2}$, так как A — самосопряженная, а потому B не исчезает в точках K и разделяет точки K. Значит (теорема Стоуна-Вейерштрасса) $\operatorname{Cl} B = C(K)$ и $\operatorname{Cl} A = C_{\mathbb{C}}(K)$. ■

Пример 5.7. Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $A = \operatorname{span}\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Тогда A — алгебра, не исчезающая на K (так как $1 \in A$) и разделяющая точки K ($z \in A$), однако $\operatorname{Cl} A \neq C(K)$ (упражнение, следует из того, что $\int\limits_0^{2\pi} e^{int}e^{-it}\,\mathrm{d}t = 0\ \forall n \geqslant 0 \implies \overline{z}$ не приблизить многочленами из A).

6 Монотонная сходимость и сходимость монотонных функций

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $f_n : E \to \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}$, не убывает, если $\forall x \in E$, $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leqslant n$ выполнено $f_m(x) \leqslant f_n(x)$.

Теорема 6.1 (Дини). Пусть $\{f_n\}$ — неубывающая последовательность равномерно ограниченных непрерывных функций на $[a, b]$ и пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

Доказательство.

$$\forall x \in [a,b]\ \exists N_x \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_x\ 0 \leqslant f(x) - f_n(x) < \varepsilon.$$

Значит, $\exists \delta_x > 0 : 0 \leqslant f(\widetilde{x}) - f_{N_x}(\widetilde{x}) \leqslant \varepsilon$ выполнено $\forall \widetilde{x} \in [a,b] : |x - \widetilde{x}| < \delta$ (по непрерывности функций $f, f_{N_x} \implies 0 \leqslant f(\widetilde{x}) - f_n(x) \leqslant f(\widetilde{x}) - f_{N_x}(\widetilde{x}) < \varepsilon$, так как $f_n(\widetilde{x}) \geqslant f_{N_x}(\widetilde{x})$). Значит $[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} B(x,\delta_x)$. Выберем конечное подпокрытие

$$[a,b] \subset \bigcup_{1\leqslant j\leqslant N_2} B(x_j, \delta_{x_j}).$$

Тогда для $n \geqslant \max\left(N_{x_1}, \ldots, N_{x_{N(\varepsilon)}}\right)$ $\forall x \in [a,b]$ пусть $x_j : |x - x_j| < \delta_{x_j} \implies 0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant f(x) - f_{N_{x_j}}(x) < \varepsilon \implies f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. ■

Следствие 6.2. Пусть $\{u_k\} \subset C[a,b]$, $u_k(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится при каждом $x \in [a,b]$ к $f(x)$, где $f \in C[a,b]$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится равномерно на $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим $f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) : f_n \geqslant 0,\ f_n \in C[a,b]$. Кроме того, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f(x)\ \forall n \geqslant 1$. Поскольку f непрерывна, $\exists c : f(x) \leqslant c\ \forall x \in [a,b]$, то есть можно применить теорему Дини и получить, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, то есть $\sum u_k$ сходится равномерно на $[a,b]$. ■

Следствие 6.3. Пусть $f \in C([a,\omega),[c,d])$, $f(x,t) \geqslant 0\,\forall x \in [a,\omega)\,\forall t \in [c,d]$, $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ сходится к непрерывной функции на $[c,d]$. Тогда этот интеграл сходится равномерно на $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотреть функции $g_n = \int\limits_a^{\omega_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x$, где $\omega_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega$, применить для них теорему Дини и доказать равномерную сходимость $\int\limits_a^{\omega} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ на $[c,d]$ по критерию Коши (упражнение). ■

Теорема 6.4 (Хелли). Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность нестрого возрастающих функций на $[a,b]$, такая, что $\exists c : |f_n(x)| \leqslant c\ \forall x \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ и f — возрастающая на $[a,b]$, такая, что $f_{n_k}(x) \to f(x)\ \forall x \in [a,b]$. Если $f \in C[a,b]$, то $f_{n_k} \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть

$$E = (\mathbb{Q} \cap [a,b]) \cup \{a\} \cup \{b\} \tag{6.1}$$

— счетное плотное подмножество в $[a,b]$. Пользуясь канторовским диагональным процессом, найдем подпоследовательность, сходящуюся в E: занумеруем $E = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\forall k \in \mathbb{N}\ \{f_n(y_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$, поэтому $\exists \{f_{n_j}\} \subset \{f_n\} :$ $f_{n_j}(y_k)$ имеет конечный предел при каждом k и $j \to \infty$. Для $x \in [a,b]$ положим

$$\widetilde{f}(x) = \sup_{\substack{y\in E\\ y\leqslant x}} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(y). \tag{6.2}$$

Свойства $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(x_1) \leqslant \widetilde{f}(x_2)\ \forall x_1 \leqslant x_2, \tag{6.3}$$

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)\ \forall x \in E. \tag{6.4}$$

(оба свойства следуют из того, что f_{n_k} возрастает $\forall k \in \mathbb{N}$).
Покажем, что в каждой точке $x \in [a,b]$ непрерывности функции f имеет место равенство

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x). \tag{6.5}$$

Пусть $\varepsilon > 0,\ \delta = \delta(\varepsilon)$:

$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| < \varepsilon\ \forall y \in [a,b] : |x-y| < \delta.$$

Пусть $s_1, s_2 \in E$ таковы, что $s_1 \leqslant x \leqslant s_2$, $|x - s_1| < \delta$, $|x - s_2| < \delta$. Тогда

$$f_{n_k} - \widetilde{f}(s_1) + \underbrace{\widetilde{f}(s_1) - \widetilde{f}(x)}_{\geqslant -\varepsilon} \leqslant f_{n_k}(x) - \widetilde{f}(x) < f_{n_k}(s_2) - \widetilde{f}(s_2) + \underbrace{\widetilde{f}(s_2) - \widetilde{f}(x)}_{\leqslant \varepsilon}, \tag{6.6}$$

Выберем $K(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} |f_{n_k}(s_1) - \widetilde{f}(s_1)| < \varepsilon \\ |f_{n_k}(s_2) - \widetilde{f}(s_2)| < \varepsilon \end{cases} \forall k \geqslant K(\varepsilon).$$

Тогда $\forall k \geqslant K(\varepsilon)$ имеем $-2\varepsilon \leqslant f_{n_k}(k) - \widetilde{f}(x) \leqslant 2\varepsilon$, то есть $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, а значит, (6.5) выполнено.

Так как $\widetilde{f}$ возрастает, множество точек ее разрыва не более чем счетно. В каждой точке z этого множества последовательность $\{f_{n_k}(z)\}$ ограничена, следовательно, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в z к некоторому пределу. Так как таких точек не более чем счетное число, то можно найти подпоследовательность, сходящуюся всюду на $[a,b]$. Ее предел назовем f. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что $f_{n_k}(x) \to f(x)\ \forall x \in [a,b]$, где $f \in C[a,b]$. Пусть $\varepsilon > 0,\ \delta = \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall x, y : |x-y| < \delta$. Так как E плотно в $[a,b]$, то

$$\exists \{s_k\}_{1\leqslant k\leqslant K(\varepsilon)} \subset E : [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{K(\varepsilon)} \left(s_k - \frac{\delta}{2}, s_k + \frac{\delta}{2}\right),\ |s_k - s_{k+1}| < \delta\ \forall k \in \{1,\dots,K(\varepsilon)-1\},$$

значит $\forall x \in [a,b]\ \exists s_j, s_{j+1} : s_j \leqslant x \leqslant s_{j+1}$ и подставляя s_j, s_{j+1} в (6.6) вместо s_1 и s_2 получаем $|f(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon$ для любого числа k, удовлетворяющего соотношениям $|f_{n_k}(s_2) - f(s_i)| < \varepsilon$ для $i = \{1, 2, \dots, K(\varepsilon)\}$. Это и означает, что функции f_{n_k} сходтся к f равномерно на $[a,b]$. ■

Упражнение. Обобщить первую часть теоремы Хелли на случай функций ограниченной вариации на $[a,b]$.

7 Суммирование рядов и тауберовы теоремы

Определение. *Методом усреднения Чезаро* называется отображение

$$\{c_k\} \mapsto \left\{\frac{c_1 + \cdots + c_k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}. \tag{7.1}$$

Пределом по Чезаро называется предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_1 + \cdots + c_k}{k}, \tag{7.2}$$

если он существует.

Определение. *Методом усреднения Абеля* называется отображение

$$\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \mapsto \left\{(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right\}_{x\in[0,1)} \tag{7.3}$$

из множества $\left\{\{c_k\}_{k=0}^{\infty} : \exists \text{ многочлен } p : |c_k| \leqslant |p(k)|\ \forall k\right\}$ в множество семейств $\{b_x\}_{x\in[0,1)}$. Соответственно, *пределом по Абелю* называется

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ 0<x<1}} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{7.4}$$

если такой предел существует.

Замечание. Так как $|c_k|(k^N+1)$ для всех k, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится в $(-1,1)$ или в круге $\{x\in\mathbb{C} : |x|<1\}$. Действительно, радиус сходимости ряда $\sum c_k x^k$ равен

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \geqslant \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^N+1}} = 1. \tag{7.5}$$

Пример 7.1. Предел по Чезаро последовательности $a_n = \{(-1)^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ равен пределу последовательности $\left\{1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$, то есть равен нулю, хотя сама последовательность не сходится.

Пример 7.2. Предел по Чезаро последовательности $\{1,0,1,0,\ldots\}$ равен пределу последовательности $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \ldots\right\}$. Как нетрудно проверить, он равен $\frac{1}{2}$.

Предел по Абелю этой последовательности:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ 0<x<1}} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}. \tag{7.6}$$

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *суммируем по Чезаро* к c, если

$$\exists \lim_{k\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_k}{k} = c, \tag{7.7}$$

где $s_j = \sum_{k=1}^{j} a_k$.

Определение. Будем говорить, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *суммируем по Абелю* к c, если

$$\exists \lim_{x\to 1-0} (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = c \tag{7.8}$$

где $s_j = \sum_{k=1}^{j} a_k$.

Замечание. Ниже под “C” понимается суммирование по Чезаро, под “A” — суммирование по Абелю:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \quad (C) \iff \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{N-k+1}{N}\right) a_k = c,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = c \quad (A) \iff \lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = c,$$

поскольку для всякой полиномиально ограниченной последовательности $\{a_k\}$ имеют место равенства (все ряды сходятся абсолютно):

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(1-x)a_j x^k\cdot\chi(j,k)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)a_j x^k\chi(j,k)\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j\left(\left(\sum_{k=j}^{\infty} x^k\right)(1-x)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j,
\end{aligned}$$

где $\chi(j,k) = \begin{cases} 1, & j\leqslant k\\ 0, & j>k.\end{cases}$

Пример 7.3. Пусть $1-1+1-1+\ldots \overset{C}{=} c$. Тогда

$$c = \lim_{N\to\infty}\frac{1+0+1+\cdots+1(0)}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{N/2}{N} = \frac{1}{2}. \tag{7.9}$$

Пусть теперь $1-1+1-1+\ldots \overset{A}{=} a$. Тогда

$$a = \lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 7.4. Посчитаем сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k$ по Абелю:

$$\lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k x^k = \lim_{x\to 1} x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\right)' = \lim_{x\to 1} x\cdot\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \lim_{x\to 1} -\frac{x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Упражнение. Убедиться, что последний ряд не сходится по Чезаро.

Определение. Будем говорить, что задан матричный метод усреднения P, если дана матрица $T = \{t_{jk}\}_{\substack{1\leqslant j<\infty\\ 1\leqslant k<\infty}}$, определяющая отображение $\{c_k\} \mapsto \left\{\sum t_{jk}c_k\right\}_{j\geqslant 1}$ на всех последовательностях c_k, для которых $\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}c_k$ сходится $\forall j \geqslant 1$.

Будем говорить, что $\{c_k\}$ имеет усредненный предел $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c\ (P)$, если

$$\exists \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}c_k = c.$$

Будем говорить, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ — суммируем к числу s методом P и писать

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \overset{P}{=\!=} s \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s\ (P),$$

если $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s\ (P)$, где $s_k = a_1 + \dots + a_k$, $k \geqslant 1$.

Пример 7.5. Метод усреднения Чезаро соответствует матрице

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}c_k$ — это результат применения T к вектору $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$. В нашем случае

$$T_C \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_1+c_2}{2} \\ \frac{c_1+c_2+c_3}{3} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Определение. Будем говорить, что метод P *регулярен*, если:

1. Он корректно задан на любой сходящейся последовательности $\{c_k\}$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c \implies \exists \lim\limits_{k\to\infty} c_k = c\ (P)$.

Теорема 7.1. Пусть $T = \{t_{jk}\}_{1\leqslant j,k<\infty}$, $t_{jk} \geqslant 0\ \forall j, k, P$ — метод усреднения, соответствующий T. Тогда следующие условия равносильны:

1. P — регулярен;

2. выполнены следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} < \infty \quad \forall j \geqslant 1, \tag{7.10}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} = 1, \tag{7.11}$$

$$\lim_{j\to\infty} t_{jk} = 0 \quad \forall k \geqslant 1. \tag{7.12}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Рассмотрим последовательность $\{c_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$. Поскольку P регулярен, $T(c_k)$ должно быть определено, то есть

$$\sum_{k\geqslant 1}(t_{jk}\cdot 1) = \sum_{k\geqslant 1} t_{jk} < \infty$$

— выполнено условие (7.10). Кроме того, предел $\{c_k\}$ равен единице, а потому получаем (7.11):

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k\geqslant 1} t_{jk} = 1.$$

Возьмем теперь последовательность $\{c_k\}$, заданную следующим образом:

$$\begin{cases} c_k = 0, & \forall k \neq s, \\ c_k = 1, & k = s. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim c_k = 0 \implies \lim c_k = 0\ (P) \iff \lim_{j\to\infty} t_{js} = 0,$$

откуда получаем (7.12).

$\Longleftarrow$ Пусть последовательность $\{c_k\}_{k\geqslant 1}$ такова, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} c_k = c$. Покажем, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} c_k \overset{P}{=\!=} c \iff \exists \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} c_k = c. \tag{7.13}$$

Распишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{jk}\right) c + \sum_{k=1}^{N} t_{jk}(c_k - c) + \sum_{k=N+1}^{\infty} t_{jk}(c_k - c) = A_j + B_j + C_j.$$

(эти ряды абсолютно сходятся, поскольку c_k ограничены (стремятся к c), а ряды $\sum t_{jk}$ сходятся) Ясно, что $A_j \to c$ при $j \to \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $N \in$

$\mathbb{N} : |c_k - c| < \varepsilon \ \forall k \geqslant N$. Тогда

$$|C_j| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} \leqslant \varepsilon \cdot M, \tag{7.14}$$

где

$$M = \sup_{j \geqslant 1} \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} \tag{7.15}$$

(здесь использовали условие $t_{jk} \geqslant 0$). Далее выберем

$$\widetilde{N} \in \mathbb{N} : \forall j \geqslant \widetilde{N} \ |t_{jk}(c_k - c)| < \frac{\varepsilon}{N} \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Наконец, оценим

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} t_{jk} c_k - c \right| < M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \tag{7.16}$$

при больших j, то есть $\exists \lim\limits_{k \to \infty} c_k \overset{P}{=\!=} c$. ■

Пример 7.6. Метод Чезаро регулярен. Действительно, в матрице (которую мы уже писали), сумма по каждой строке равна 1, $\forall k \in \mathbb{N} \ \lim\limits_{j \to \infty} t_{jk} = \lim\limits_{j \to \infty} \frac{1}{j} = 0$.

Пример 7.7. Метод Абеля регулярен. Пусть $c_k \to c$. Заметим, что

$$\exists \lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c \iff \forall \{x_j\}_{j \geqslant 1} \subset (0,1) : x_j \to 1 \ \exists \lim_{j \to \infty} (1-x_j) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_j^k = c,$$

а последнее эквивалентно тому, что метод

$$\{c_k\} \mapsto \left\{ (1-x_j) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_j^k \right\}_{j \geqslant 1}$$

регулярен. Нетрудно понять, что этот метод соответствует матрице

$$T = \begin{pmatrix} (1-x_1) & (1-x_1)x_1 & (1-x_1)x_1^2 & \ldots \\ (1-x_2) & (1-x_2)x_2 & (1-x_2)x_2^2 & \ldots \\ (1-x_3) & (1-x_3)x_3 & (1-x_3)x_3^2 & \ldots \\ (1-x_4) & (1-x_4)x_4 & (1-x_4)x_4^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

так как тогда

$$T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x_1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k \\ (1-x_2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_2^k \\ (1-x_3) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_3^k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Проверим регулярность по установленным критериям. По формуле суммы геометрической прогресии имеем
$$(1-x_j)\sum_{k\geqslant 0} x_j^k = 1,$$
что устанавливает сразу (7.10) и (7.11). Кроме того,
$$\forall s \in \mathbb{Z}_+ : (1-x_j)x_j^s \to 0$$
при $j\to\infty$, поскольку $x_j \to 1$, откуда получаем (7.12).

Следствие 7.2. Пусть ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{k,n\geqslant 0} a_k b_n$ сходятся, причем при суммировании последнего ряда выбрана диагональная нумерация решетки $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$. Тогда
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k,n\geqslant 0} a_k b_n.$$

Замечание. В прошлом семестре доказывали аналогичный результат для абсолютно сходящихся рядов.

Доказательство. Для любого $x\in(0,1)$ имеет место равенство
$$\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right) = \sum_{k,n\geqslant 0} a_k b_n x^{k+n} = \sum_{j\geqslant 0} x^j \left(\sum_{k,n:k+n=j} a_k b_n\right). \tag{7.17}$$

По условию ряды $\sum a_k$, $\sum b_n$, $\sum\limits_{j\geqslant 0}\left(\sum\limits_{k,n:k+n=j} a_k b_n\right)$ сходятся. Осталось перейти к пределу по $x\to 1$ в (7.17) и воспользоваться регулярностью метода Абеля. ■

Теорема 7.3 (Фробениуса). Если $\exists \lim c_k \overset{C}{=\!=} c$, то $\exists \lim c_k \overset{A}{=\!=} c$ (то есть метод Абеля сильнее метода Чезаро).

Доказательство. Пусть $s_k = c_0+\dots+c_k$, $\sigma_k = \frac{s_k}{k+1}$. Дано: $\exists \lim \sigma_k = c$. Знаем, что для любой полиномиально ограниченной последовательности b_k имеет место равенство
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k x^k, \tag{7.18}$$
где $\widetilde{s}_k = b_0+\dots+b_n$. Применим эту формулу к последовательности $\{s_k\}$. Так как $\frac{s_k}{k+1}$ сходится, то она ограничена, а значит $\exists c : |s_k| \leqslant c(k+1)\ \forall k$, $\{c_{k+1}\} = \{s_{k+1}-s_k\}$ тоже полиномиально ограничено.
$$(1-x)\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k = (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = (1-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k\cdot(k+1)x^k. \tag{7.19}$$

Так как $\sigma_k \to c$, осталось проверить, что метод

$$\{a_k\} \mapsto \left\{(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+1)x^k\right\}$$

регулярен. Во-первых,

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = 1, \tag{7.20}$$

поскольку

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\right)' = \left(\sum_{k=0} x^{k+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

что дает (7.10) и (7.11). Во-вторых, нетрудно понять, что

$$\forall s \geqslant 0 \ (1-x)^2(s+1)x^s \xrightarrow[x\to 1]{} 0,$$

откуда следует (7.12). ■

Теорема 7.4 (тауберова теорема Таубера). Пусть ряд $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ сходится по методу Абеля и пусть $n \cdot a_n \to 0$. Тогда ряд $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ сходится в обычном смысле.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n - f(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}|a_n|(1-x^n) + \left|\sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n\right| \tag{7.21}$$

$$\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N}|a_n|\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) + \frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|x^n \tag{7.22}$$

$$\leqslant \left[\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \leqslant n \ \forall x \in (0,1)\right] \tag{7.23}$$

$$\leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n \cdot n| + \sup_{n\geqslant N+1}|n \cdot a_n| \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{x^{N+1}}{1-x}. \tag{7.24}$$

Последнее верно $\forall x \in (0,1)$. Возьмем

$$x := 1 - \frac{1}{N}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n - f(x_N)\right| \leqslant \frac{\sum_{n=1}^{N}|a_n \cdot n|}{N} + \sup_{n\geqslant N}|n \cdot a_n| \tag{7.25}$$

при больших N, так как $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{N+1} \leqslant 1$. Осталось заметить, что

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}|a_n \cdot n|}{N} \to 0, \tag{7.26}$$

так как метод Чезаро регулярен, а $\sup_{n\geqslant N}|n\cdot a_n|\to 0$ по условию. Значит

$$\exists \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} f(x_N) = \sum_{n\geqslant 0} a_n\ (A). \qquad \blacksquare \tag{7.27}$$

Теорема 7.5 (тауберова теорема Харди). Пусть последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что $\exists c>0 : |n\cdot a_n|\leqslant c\ \forall n\in\mathbb{N}$ и пусть ряд $\sum a_n$ сходится по Чезаро к s. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится в обычном смысле к s.

Доказательство. Для $n,\ l\in\mathbb{N}$ определим

$$\begin{aligned} s_n &= a_1+\dots+a_n,\\ \sigma_n &= \frac{s_1+\dots+s_n}{n},\\ \sigma_{n,l} &= \frac{s_{n+1}+\dots+s_{n+l}}{l}. \end{aligned}$$

Схема доказательства:

1. $\sigma_n\to s \implies \forall\varepsilon>0$ и последовательности $\{l_{n,\varepsilon}\}$, где $l_{n,\varepsilon}=[n\varepsilon]$ верно $\sigma_{n,l_{n,\varepsilon}}\to s$ при $n\to\infty$.

2. $\forall\varepsilon>0\ \lim\limits_{n\to\infty}|s_n-\sigma_{n,l_{n,\varepsilon}}|\leqslant c\varepsilon$.

Шаг 1. Зафиксируем $\varepsilon>0$, рассмотрим $l=l_{n,\varepsilon}$.

$$\sigma_{n,l} = \frac{s_1+\dots+s_{n+l}}{n+l}\cdot\frac{n+l}{l} - \frac{s_1+\dots+s_n}{n}\cdot\frac{n}{l} \tag{7.28}$$

$$= \sigma_{n+l}\cdot\frac{n+l}{l} - \sigma_n\cdot\frac{n}{l} \tag{7.29}$$

$$= (\sigma_{n+l}-\sigma_n)\frac{n+l}{l} + \sigma_n\left(\frac{n+l}{l}-\frac{n}{l}\right) \tag{7.30}$$

$$= \sigma_n + \left(\frac{n+l}{l}\right)(\sigma_{n+l}-\sigma_n). \tag{7.31}$$

Значит

$$|\sigma_{n,l_{n,\varepsilon}}-\sigma_n| \leqslant \frac{n+[n\varepsilon]}{[n\varepsilon]}\left|\sigma_{n+l_{n,\varepsilon}}-\sigma_n\right| \leqslant c_\varepsilon|\sigma_{n+l_{n,\varepsilon}}-\sigma_n|\to 0, \tag{7.32}$$

поскольку $\sigma_n\to s$. Отсюда следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty}\sigma_{n,l_{n,\varepsilon}} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = s. \tag{7.33}$$

Шаг 2. Для каждого $l\in\mathbb{N}$ имеем

$$\sigma_{n,l} = \sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{a_{n+1}l}{l} + \frac{a_{n+2}(l-1)}{l} + \dots + \frac{a_{n+l}}{l} = s_n + \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} a_{n+j}(l-j+1) \tag{7.34}$$

$$
\begin{aligned}
|\sigma_{n,l} - s_n| &\leqslant \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{n+j}\big|(n+j)a_{n+j}\big|(l-j+1)\\
&\leqslant [\text{тауберово условие}]\\
&\leqslant \frac{c}{l}\sum_{j=1}^{l}\frac{l-j+1}{n+j}\\
&\leqslant \frac{c}{l\cdot n}\sum_{j=1}^{l} l = \frac{cl}{n}.
\end{aligned}
$$

Значит $\forall\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\big|\sigma_{n,l_{n,\varepsilon}} - s_n\big| \leqslant c\frac{[n\varepsilon]}{n} \leqslant c\varepsilon\\
&\implies \limsup_{n\to\infty} |\sigma_{n,l_{n,\varepsilon}} - s_n| \leqslant c\varepsilon\\
&\implies \limsup_{n\to\infty} |s - s_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} |s - \sigma_{n,l_{n,\varepsilon}}| + c\varepsilon\\
&= [\text{следует из } 1] = c\varepsilon \implies s_n \to s.
\end{aligned}
$$

■

Пример 7.8. (применение) Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — непрерывная 2π-периодическая функция, $f_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{int}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)e^{-in\tau}\,\mathrm{d}\tau$, $N\in\mathbb{N}$. Тогда $\exists \lim_{N\to\infty} f_N(t) \overset{C}{=\!=} f(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$. Если, кроме того, f имеет ограниченную вариацию на $[0,2\pi]$, то $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и $\exists \lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Теорема 7.6 (тауберова теорема Харди-Литлвуда, метод Караматы). Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходятся по Абелю и $s_k \geqslant 0\ \forall k\geqslant 0$, где $s_k = a_0 + \dots + a_k$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится по Чезаро.

Лемма 7.7. Пусть $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ — функция, кусочно-непрерывная на $[0,1]$, с единственным разрывом в точке $x_0\in(0,1)$, причем существуют пределы

$$
\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} g(x), \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} g(x).
$$

Тогда $\forall\varepsilon>0$ существуют многочлены P, $Q : P(x)\leqslant g(x)\leqslant Q(x)\ \forall x\in[0,1]$ и

$$
\int\limits_0^1 g(x) - P(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon, \tag{7.35}
$$

$$
\int\limits_0^1 Q(x) - g(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{7.36}
$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, $\eta > 0$. Рассмотрим $g_\eta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$g_\eta(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in [0, x_0 - \eta] \cup [x_0, 1], \\ kx + b, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $k, b \in \mathbb{R} : g_\eta \in C[0,1]$. Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем $\eta > 0$ столь малым, что $g_\eta(x) + \delta > g(x) + \delta/2$ для всех $x \in [0,1]$ – так можно сделать по непрерывности. Пусть $P_{\eta,\delta}$ — многочлен такой, что

$$\sup \left| P_{\eta,\delta}(x) - (g_\eta(x) + \delta) \right| \leqslant \frac{\delta}{2}$$

(такой многочлен существует по теореме Вейерштрасса). Тогда $P_{\eta,\delta} > g(x)\ \forall x \in [0,1]$, а также

$$\int\limits_0^1 \big(P_{\eta,\delta}(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x = \delta + \int\limits_{x_0-\eta}^{x_0} \big(P_{\eta,\delta}(x) - g(x)\big)\, \mathrm{d}x \leqslant 10 \max_{x \in [0,1]} |g(x)| \cdot \eta + \delta. \tag{7.37}$$

Выбирая малыми η, δ можно добиться $< \varepsilon$ в правой части (7.37). Возьмем $Q = P_{\eta,\delta}$. ■

Доказательство теоремы. Рассмотрим $f\colon x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $x \in (0,1)$. Мы знаем, что $\exists \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = s$. Обозначим через $p_k = x^{k-1}$, где $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x^k) = s \implies f(x^k) = (1 - x^k) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^{kn} \xrightarrow[x\to 1]{0<x<1} s,$$

где $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

$$\underbrace{\frac{1-x^k}{1-x}}_{\to k \text{ при } x\to 1} (1-x) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n \cdot (x^n)^{k-1} \to s \implies (1-x) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n p_k(x^n) \to \frac{s}{k} = s \int\limits_0^1 p_k(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Слева и справа стоят линейные выражения. Значит

$$(1-x) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n p(x^n) \to s \int\limits_0^1 p(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

для любого многочлена p. Если g, P, Q — как в лемме, то

$$s \int\limits_0^1 P(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqslant \lim_{x\to 1} (1-x) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n P(x^n) \tag{7.38}$$

$$\leqslant \limsup_{x\to 1} (1-x) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n g(x^n) \tag{7.39}$$

$$\leqslant \limsup_{x\to 1} (1-x) \sum_{n\geqslant 0} s_n x^n Q(x^n) \tag{7.40}$$

$$= s\int\limits_0^1 Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant s\int\limits_0^1 g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + s\varepsilon\ \forall\varepsilon > 0. \tag{7.41}$$

(в (7.39) и (7.40) использовали $s_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$). Таким образом,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n g(x^n) = s\int\limits_0^1 g(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{7.42}$$

Рассмотрим

$$g(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, \frac{1}{e}],\\ \frac{1}{\tau}, & \tau \in (\frac{1}{e}, 1]. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{1/e}^1 \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} = 1.$$

$\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset (0,1) : x_m = e^{-\frac{1}{m}},\ m \in \mathbb{N}.$

$$x_m^n g(x_m^n) = \begin{cases} 1, & n \leqslant m-1,\\ 0, & n \geqslant m. \end{cases}$$

$x_m^{m-1} g(x_m^{m-1}) = x_m^{m-1}\cdot\frac{1}{m-1}$
Из (7.42) следует, что

$$\exists \lim_{m\to\infty} (1-x_m)\sum_{n\geqslant 0} s_n x_m^n g(x_m^n) = s, \tag{7.43}$$

так как

$$(1-x_m)\sum_{n\geqslant 0} s_n x_m^n g(x_m^n) = (1-x_m)\sum_{n=0}^{m-1} s_n = (1-x_m)\cdot m\cdot\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} s_n,$$

$(1-x_m)\cdot m = m\left(1-e^{-\frac{1}{m}}\right) \to 1$ при $m\to\infty$. Значит $\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} s_n \to s$. ■

Пример 7.9. $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - \ldots$, где $x \in (0,1)$. Тогда $\nexists \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

Доказательство. $s_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Если предел есть, то она имеет предел по Чезаро. $s_0 = 1,\ s_1 = 1,\ s_2 = s_3 = 0,\ s_4 = s_5 = s_6 = s_7 = 1,\ s_8 = \cdots = s_{15} = 0$ и так далее. Рассматривая $\sigma_k = \frac{s_0+\cdots+s_k}{k}$ для $k = 2^{2m}$ и $k = 2^{2m+1}$ получаем, что последовательность σ_k имеет два разных частичных предела, то есть не сходится. ■

8 Почти-периодические функции

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Множество E называется *относительно плотным*, если

$$\exists l > 0 : E \cap [x, x+l] \neq \varnothing \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Примеры 8.1.

1. Очевидные примеры — вся ось $\mathbb{R}$, рациональные числа и так далее;
2. $\{n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — относительно плотно ($l = 1$);
3. $\{\pm n^2\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — не относительно плотно;
4. $\{\pm\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ — относительно плотно ($l = 2$).

Определение. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется ε-почти-периодом, если

$$|f(x) - f(x+\tau)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

Будем обозначать $T(f,\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau$ — ε-почти-период для $f\}$.

Определение. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется *равномерно почти-периодической*, если $f \in C(\mathbb{R})$ и $\forall\varepsilon > 0$ множество $T(f,\varepsilon)$ относительно плотно в $\mathbb{R}$.

Определение. Обозначим множество почти-периодических функций через AP. Расписывая по определению, получаем, что условие $f \in \mathrm{AP}$ эквивалентно $f \in C(\mathbb{R})$ и

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists l_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\ \exists\tau_x \in [x, x+l] : \forall y \in \mathbb{R}\ |f(y) - f(y+\tau_x)| \leqslant \varepsilon. \tag{8.3}$$

Примеры 8.2.

1. Любая периодическая функция из $C(\mathbb{R})$ почти-периодична (лежит в AP). Действительно, если f периодична, и τ — период f, то $T(f,\varepsilon) \supset \mathbb{Z}\tau\ \forall\varepsilon > 0$, а $\mathbb{Z}\tau$ относительно плотно в $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x) \in \mathrm{AP}$, но $f(x)$ не является периодической.
3. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x} \in \mathrm{AP}$. f периодична тогда и только тогда, когда

$$\exists\mu \in \mathbb{R} : \lambda_k \in \mu\mathbb{Z} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}. \tag{8.4}$$

(доказательство пунктов 2 и 3 будет позже).

Лемма 8.1 (почти-периодическая функция ограничена). Если $f \in \mathrm{AP}$, то

$$\exists c > 0 : |f(x)| \leqslant c\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$, $l := l_\varepsilon$ — число из определения почти-периодической функции. Тогда

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \tau_x : |x - \tau_x| \leqslant l,\ \tau_x \in T(f, 1), \tag{8.6}$$

откуда

$$|f(x)| = \left| f\big(\tau_x + (x - \tau_x)\big) \right| \leqslant 1 + |f(x - \tau_x)| \leqslant 1 + \sup_{y \in [-l, l]} |f(y)| = c, \tag{8.7}$$

что и требовалось. ■

Лемма 8.2. Если $f \in \mathrm{AP}$, то f равномерно непрерывна.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $l_\varepsilon \geqslant 1$ — число из определения почти-периодичности (ясно, что если такое l_ε существует, то его можно увеличивать, так как условие относительной плотности при этом сохраняется), $0 < \delta(\varepsilon) < 1$ таково, что

$$|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon \quad \forall y_1, y_2 \in (-l_\varepsilon - 1, -l_\varepsilon + 1) : |y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon). \tag{8.8}$$

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$. Найдем такое $k \in \mathbb{R}$, что $x_1, x_2 \in \big[k l_\varepsilon, (k+1) l_\varepsilon\big]$. Выберем (это можно сделать по определению l_ε)

$$\tau_k \in T(f, \varepsilon) \cap \big[k l_\varepsilon, (k+1) l_\varepsilon\big]. \tag{8.9}$$

Тогда $x_1 = \tau_k + y_1$, $x_2 = \tau_k + y_2$, где $|y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon)$, $|y_1| < l_\varepsilon$, $|y_2| < l_\varepsilon$. Значит

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &\leqslant |f(\tau_k + y_1) - f(y_1)| + |f(y_1) - f(y_2)| + |f(y_2) - f(y_2 + \tau_k)| && (8.10)\\
&\leqslant \varepsilon + |f(y_1) - f(y_2)| + \varepsilon && (8.11)\\
&\leqslant 3\varepsilon, && (8.12)
\end{aligned}$$

где в (8.11) мы дважды воспользовались почти-периодичностью, а в последнем переходе воспользовались (8.8). Из (8.12) видно, что f равномерно непрерывна. ■

Определение. Напомним, что пространство

$$C_b(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty \right\},$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

— линейное нормированное пространство.

Лемма 8.3. AP — замкнутое подпространство в $C_b(\mathbb{R})$.

Доказательство. $\mathrm{AP} \subset C_b(\mathbb{R})$ по первой лемме. Пусть $f_n \to f$ в $C_b(\mathbb{R})$, $f_n \in \mathrm{AP}$. Проверим, что $f \in \mathrm{AP}$. Найдем

$$\varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N} : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8.13}$$

Пусть l_ε — число из определения почти периодической функции для f_n. Тогда для $\tau_x \in T(f_n, \varepsilon)$, $\tau_x \in [x, x + l_\varepsilon]$, имеем

$$\begin{aligned} |f(y+\tau_x) - f(y)| \leqslant |f(y+\tau_x) - f_n(y+\tau_x)| + |f_n(y+\tau_x) - f_n(y)| + \\ + |f_n(y) - f(y)| \qquad (8.14) \\ \leqslant 2\varepsilon + |f_n(y+\tau_x) - f_n(y)| \qquad (8.15) \\ \leqslant 3\varepsilon. \qquad (8.16) \end{aligned}$$

Здесь (8.15) выполнено в силу (8.13), а (8.16) — в силу определения почти-периодичности. Из последнего неравенства следует, что $\tau_x \in T(f, 3\varepsilon)$, то есть $T(f, 3\varepsilon)$ относительно плотно $\forall \varepsilon > 0$, а значит $f \in \mathrm{AP}$. ■

Лемма 8.4. Пусть $g \in C(\mathbb{C})$, $f \in \mathrm{AP}$. Тогда $g(f) \in \mathrm{AP}$.

Доказательство. Обозначим $E := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ — ограниченное подмножество $\mathbb{C}$. Значит $\mathrm{Cl}\, E$ — компакт в $\mathbb{C}$, функция g равномерно непрерывна на $\mathrm{Cl}\, E$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon) > 0$:

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leqslant \varepsilon \quad \forall z_1, z_2 : |z_1 - z_2| \leqslant \delta(\varepsilon). \tag{8.17}$$

Пусть $l_{\delta(\varepsilon)}$ — число для $f \in \mathrm{AP}$ из определения почти-периодичности. Тогда если $\tau \in T\big(f, \delta(\varepsilon)\big)$, $\tau \in \big[x, x + l_{\delta(\varepsilon)}\big]$, то

$$\forall y \in \mathbb{R} \left|g\big(f(y+\tau)\big) - g\big(f(y)\big)\right| \leqslant \sup_{|z_1 - z_2| \leqslant \delta(\varepsilon)} |g(z_1) - g(z_2)| \leqslant \varepsilon \tag{8.18}$$

■

Следствие 8.5. $f \in \mathrm{AP} \implies f^2 \in \mathrm{AP}$. ■

Упражнение. Если $f \in \mathrm{AP}$, $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| > 0$, то $1/f \in \mathrm{AP}$.

Теорема 8.6 (критерий Бохнера). Функция $f \in C_b(\mathbb{R})$ лежит в классе AP тогда и только тогда, когда семейство $\{f_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ предкомпактно в $C_b(\mathbb{R})$, где $f_h \colon x \mapsto f(x+h)$.

Замечание. Множество предкомпактно, когда его замыкание компактно.

Доказательство.

$\implies$ Пусть $f \in \mathrm{AP}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ семейство $\{f_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $[-n, n]$. Действительно,

$$\sup_{x \in [-n, n]} |f_h(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h)| < \infty, \tag{8.19}$$

так как $f \in \mathrm{AP}$. Кроме того,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon) \ |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon, \tag{8.20}$$

откуда

$$\sup_{|y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon)} |f_h(y_1) - f_h(y_2)| < \varepsilon. \tag{8.21}$$

Так как $[-n, n]$ — метрический компакт, то по теореме Арцела-Асколи

$$\exists\{f_{h_k}\} : f_{h_k} \to f \quad \text{в} \quad C[-n, n], \tag{8.22}$$

где $f \in C[-n, n]$. Утверждается, что $\exists\{f_{h_k}\} : f_{h_k} \to f$ в $C_b(\mathbb{R})$, где $f \in C_b(\mathbb{R})$. Докажем это. Существует функция $f \in C_b(\mathbb{R}) : f_{h_k} \to f$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}$, что следует из применения диагонального процесса (сначала выделим подпоследовательность, сходящуюся на $[-1, 1]$, потом из нее сходящуюся на $[-2, 2]$ и так далее). Покажем, что эта сходимость равномерна на всей прямой $\mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$, l_ε — из определения почти-периодической функции для f. Заметим, что $T(f_h, \varepsilon) = T(f, \varepsilon)$ по определению почти-периода. Пусть $y \in \mathbb{R}$, $\tau \in T(f, \varepsilon) : |\tau - y| \leqslant l_\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}
|f_{h_k}(y) - f_{h_m}(y)| &\leqslant \left[\widetilde{y} = y - \tau,\ |\widetilde{y}| \leqslant l_\varepsilon\right] \\
&\leqslant |f_{h_k}(\tau + \widetilde{y}) - f_{h_m}(\tau + \widetilde{y})| \qquad (8.23)\\
&\leqslant |f_{h_k}(\widetilde{y} + \tau) - f_{h_k}(\widetilde{y})| + |f_{h_k}(\widetilde{y}) - f_{h_m}(\widetilde{y})| + \\
&\quad + |f_{h_m}(\widetilde{y}) - f_{h_m}(\widetilde{y} + \tau)| \qquad (8.24)\\
&\leqslant 2\varepsilon + |f_{h_k}(\widetilde{y}) - f_{h_m}(\widetilde{y})|. \qquad (8.25)
\end{aligned}$$

Так как $\widetilde{y} \in [-l_\varepsilon, l_\varepsilon]$, то по равномерной сходимости $\{f_{h_k}\}$ на $[-l_\varepsilon, l_\varepsilon]$

$$\exists N(\varepsilon) : \forall k, m \geqslant N(\varepsilon)\ |f_{h_k}(\widetilde{y}) - f_{h_m}(\widetilde{y})| < \varepsilon. \tag{8.26}$$

Значит

$$\forall k, m \geqslant N(\varepsilon),\ \forall y \in \mathbb{R}\ |f_{h_k}(y) - f_{h_m}(y)| \leqslant 3\varepsilon, \tag{8.27}$$

то есть $\{f_{h_k}\}$ равномерно сходится в себе, и $f_{n_k} \rightrightarrows f$ по равномерному критерию Коши. При этом $f \in \mathrm{AP}$, так как $f_{h_k} \in \mathrm{AP}\ \forall k$ и AP замкнуто в $C_b(\mathbb{R})$. Таким образом, мы проверили, что из любой последовательности функций из семейства можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность функций из AP. Значит $\{f_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ — секвенциально предкомпактно. Значит само множество предкомпактно.

$\Longleftarrow$ Пусть $\{f_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ предкомпактно. $C_b(\mathbb{R})$ — нормированное (в частности, метрическое) пространство. Значит $\forall\varepsilon > 0$ существует ε-сеть $f_{h_1}, f_{h_2}, \ldots, f_{h_N}$, то есть

$$\begin{aligned}
&\forall h \in \mathbb{R}\ \exists K(h) \in [1, N] \cap \mathbb{N} : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_h(x) - f_{h_{K(h)}}(x)| < \varepsilon \qquad (8.28)\\
&\iff \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x + h - h_{K(h)}) - f(x)| < \varepsilon \qquad (8.29)\\
&\Longrightarrow \forall h \in \mathbb{R}\ h - h_{K(h)} \in T(f, \varepsilon). \qquad (8.30)
\end{aligned}$$

Осталось показать, что множество $A = \{h - h_{K(h)} \mid h \in \mathbb{R}\}$ относительно плотно. Обозначим

$$L := \max_{1\leqslant i\leqslant N} |h_i|. \tag{8.31}$$

Тогда

$$h - L \leqslant \underbrace{h - h_{K(h)}}_{\in A} \leqslant h + L \quad \forall h \in \mathbb{R}, \tag{8.32}$$

откуда $\forall h \in \mathbb{R}\ [h - L, h + L] \cap A \neq \varnothing$, то есть A относительно плотно. ■

Следствие 8.7. Если $f, g \in \mathrm{AP}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $\alpha f + \beta g \in \mathrm{AP}$ и $fg \in \mathrm{AP}$. Таким образом, множество почти-периодических функций образует алгебру.

Доказательство. Если $f, g \in \mathrm{AP}$, то $\forall \{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ существует подпоследовательность $\{h_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{h_k\} : f_{h_{k_j}} \to f$ в $C_b(\mathbb{R})$, $g_{h_{k_j}} \to g$ в $C_b(\mathbb{R})$ (выделяем по предыдущей теореме одну подпоследовательность, а из нее вторую). Значит

$$\alpha f_{h_{k_j}} + \beta g_{h_{k_j}} \to \alpha f + \beta g \quad \text{в} \quad C_b(\mathbb{R}), \tag{8.33}$$

$$f_{h_{k_j}} g_{h_{k_j}} \to fg \quad \text{в} \quad C_b(\mathbb{R}). \tag{8.34}$$

Таким образом, (опять используем критерий Бохнера, но в другую сторону) обе функции почти-периодичны. ■

Вернемся к примерам, приведенным в начале параграфа.

Утверждение 8.8. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x} \in \mathrm{AP}, \tag{8.35}$$

и, кроме того, f периодична тогда и только тогда, когда

$$\exists \mu \in \mathbb{R} : \lambda_k \in \mu\mathbb{Z} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{8.36}$$

Доказательство. Заметим, что $e^{i\lambda_k x}$ — периодическая функция для любых k. В частности, она почти-периодическая. По предыдущему утверждению сразу получаем $f \in \mathrm{AP}$.

Предположим теперь, что f периодична. Не умаляя общности, считаем, что

$$a_k \neq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \tag{8.37}$$

$$\lambda_k \neq \lambda_m \quad \forall k \neq m \tag{8.38}$$

(нулевые a_i можно просто выкинуть, а одинаковые l_i склеить). Пусть τ — период f. Тогда $f(x + \tau) - f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, а значит

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k e^{i\lambda_k (x+\tau)} - a_k e^{i\lambda_k x} \right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8.39}$$

Обозначая $b_k := a_k(e^{i\lambda_k \tau} - 1)$, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\lambda_k x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{8.40}$$

Отсюда ($n-1$ раз беря производную в нуле) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 0, \quad i\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = 0, \quad \ldots, \quad i^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{n-1} b_k = 0. \tag{8.41}$$

Запишем это в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum b_k \\ \sum b_k \lambda_k \\ \vdots \\ \sum b_k \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix} = 0. \tag{8.42}$$

Самая левая матрица — матрица Вандермонда. Из курса алгебры известно, что для различных λ_i определитель Вандермонда не равен нулю, а потому можно должно слева на обратную матрицу и получить $b_k = 0\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то есть $e^{i\lambda_k \tau} = 1\ \forall k$. Таким образом, $\lambda_k \tau \in 2\pi k$, и в качестве μ можно взять $2\pi/\tau$.

Если $\lambda_k \in \mu\mathbb{Z}$, то нетрудно проверить, что $f(x+\tau) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ и $\tau = 2\pi/\mu$. ■

Определение. Пусть $f \in C(\mathbb{R}_+)$. Ее *средним значением* на $\mathbb{R}_+$ будем называть число

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8.43}$$

если указанный предел существует.

Теорема 8.9. Если $f \in \mathrm{AP}$, то $M(f)$ существует.

Доказательство. Хотим показать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T(\varepsilon) : \forall T_1, T_2 > T(\varepsilon) \left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon. \tag{8.44}$$

Пусть $l := l_\varepsilon$, где l_ε — число из определения почти-периодичности для f, $\alpha > 0$ — некоторое число. Тогда $\exists \tau_\alpha \in T(f,\varepsilon) : \alpha \leqslant \tau_\alpha \leqslant \alpha + l$. Оценим:

$$\left| \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \tag{8.45}$$

$$\left| \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_{\tau_\alpha}^{\tau_\alpha+T} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \frac{1}{T}\int_\alpha^{\tau_\alpha} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T}\int_{\alpha+T}^{\tau_\alpha+T} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \tag{8.46}$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau_\alpha + x)\,\mathrm{d}x \right| + \frac{2\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|}{T} \cdot l \leqslant \tag{8.47}$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{2Ml}{T}, \tag{8.48}$$

где $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{nT} \int\limits_0^{nT} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon + \frac{2Ml}{T}, \tag{8.49}$$

поскольку левая часть не превосходит

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{T} \int\limits_{(j-1)T}^{jT} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon + \frac{2Ml}{T} \right). \tag{8.50}$$

Пусть $T_1, T_2 > 0 : \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$. Значит $\exists n, m \in \mathbb{N} : nT_1 = mT_2$ и

$$\left| \frac{1}{T_1} \int\limits_0^{T_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{nT_1} \int\limits_0^{nT_1} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon + \frac{2Ml}{T}, \tag{8.51}$$

$$\left| \frac{1}{T_2} \int\limits_0^{T_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{mT_2} \int\limits_0^{mT_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon + \frac{2Ml}{T}, \tag{8.52}$$

где $T = \min(T_1, T_2)$. Но поскольку $nT_1 = mT_2$,

$$\frac{1}{nT_1} \int\limits_0^{nT_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{mT_2} \int\limits_0^{mT_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{8.53}$$

а значит $\forall T_1, T_2 \geqslant T,\ \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ выполнено

$$\left| \frac{1}{T_1} \int\limits_0^{T_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{T_2} \int\limits_0^{T_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < 2\varepsilon + \frac{4Ml}{T}, \tag{8.54}$$

а значит (8.54) верно $\forall T_1, T_2 \geqslant T$. Осталось взять $T(3\varepsilon) = \frac{4Ml}{\varepsilon}$. ■

Теорема 8.10.

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f\overline{g}\,\mathrm{d}x \tag{8.55}$$

— скалярное произведение на линейном пространстве AP.

Доказательство. $f\overline{g} \in \mathrm{AP}$, а значит по предыдущей теореме все корректно определено. Из свойств предела нетрудно вывести, что

$$\langle f, f\rangle \geqslant 0, \tag{8.56}$$

$$\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle, \tag{8.57}$$

$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}. \tag{8.58}$$

Таким образом, осталось проверить, что $\langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$. В одну сторону (справа налево) это очевидно, а в другую переписывается так:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \implies f = 0. \tag{8.59}$$

Вместо $|f|^2 \in \mathrm{AP}$ будем рассматривать произвольную функцию $h \in \mathrm{AP} : h \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$. Предположим, что $\exists x_0 : h(x_0) = \delta > 0$, но

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T h(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{8.60}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, λ_ε — из определения почти-периода для h. Значит

$$\exists \tau_{x_0} \in T(h,\varepsilon) : x_0 = \tau_{x_0} + \widetilde{x}_0, \quad \text{где} \quad \widetilde{x}_0 \in [0, l_\varepsilon]. \tag{8.61}$$

Выбирая малое число $\varepsilon > 0$, добьемся оценки $h(x) > \delta/2\ \forall x \in [0, l_\varepsilon] : |x - \widetilde{x}_0| < \varepsilon$. Теперь рассмотрим

$$0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{k\to+\infty\\ k\in\mathbb{N}}} \frac{1}{2kl_\varepsilon} \int\limits_0^{2kl_\varepsilon} h(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.62}$$

$$= \lim_{\substack{k\to+\infty\\ k\in\mathbb{N}}} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2l_\varepsilon} \int\limits_{2(j-1)l_\varepsilon}^{2jl_\varepsilon} h(x)\,\mathrm{d}x \right) \tag{8.63}$$

$$\geqslant \inf_{\substack{y\geqslant 0\\ y\in 2l_\varepsilon\mathbb{Z}}} \int\limits_y^{y+2l_\varepsilon} h(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall y \in 2l_\varepsilon\mathbb{Z}_+. \tag{8.64}$$

Пусть $\tau_y \in [y, y+l_\varepsilon] \cap T(h,\varepsilon)$. Тогда

$$\int\limits_y^{y+2l_\varepsilon} h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2l_\varepsilon} h(x+y)\,\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_0^{2l_\varepsilon-\tau_y} h(x+\tau_y)\,\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_{\substack{x\in[0,l_\varepsilon]:\\ |x-\tilde{x}_0|<\varepsilon}} h(x+\tau_y)\,\mathrm{d}x \geqslant (\frac{\delta}{2} - \varepsilon)\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для $0 < \varepsilon < \delta/2$ правая часть положительна, откуда получаем требуемое противоречие. ∎

Используя неравенство Бесселя для скалярного произведения, введенного выше, можно решить следующее упражнение.

Упражнение. $\forall f \in \mathrm{AP}$ существует не более чем счетное число точек $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(x) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}x = \langle x, e^{i\lambda x}\rangle \neq 0. \tag{8.65}$$

Более того,

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |a(\lambda)|^2 \leqslant \langle f, f\rangle. \tag{8.66}$$

Доказательство замечательной формулы

$$f = \sum_{\lambda: a(\lambda)\neq 0} a(\lambda) e^{i\lambda x}. \tag{8.67}$$

для почти периодических функций можно прочитать в книге *Harald Bohr, “Almost periodic functions”, 1932*.