Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и компьютерных наук

Теория меры

Конспект основан на лекциях
Романа Викторовича Бессонова

3 сентября 2020 г.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Факультет
математики
и компьютерных
наук СПбГУ

Конспект основан на лекциях по теории меры, прочитанных Романом Викторовичем Бессоновым студентам Факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета в осеннем семестре 2019–2020 учебного года.

В конспекте содержится материал 3-го семестра курса математического анализа.

Автор:

Михаил Опанасенко

Последняя версия конспекта и исходный код:

https://www.overleaf.com/read/kqzpjhrqdkfz

Сайт СПБГУ: https://spbu.ru.
Сайт факультета МКН: https://math-cs.spbu.ru.

Оглавление

Теория меры

1 Наивный подход к определению длины

Обозначение. Если X — множество, $A \subset X$, $B \subset X$, то будем писать $A \sqcup B$ вместо $A \cup B$, если известно, что $A \cap B = \varnothing$.

Определение. *Наивной длиной* назовём отображение $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) $\mu(E) \geqslant 0$ для всех $E \subset \mathbb{R}$;

(2) $\mu([0,1)) = 1$;

(3) $\mu(E+r) = \mu(E)$ для всех $E \subset \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$, где $E + r = \{x + r \mid x \in E\}$;

(4) для любого набора дизъюнктных множеств $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset 2^{\mathbb{R}}$ выполнено равенство

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Теорема 1.1. Отображения $\mu\colon 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ со свойствами (1–4) не существует.

Доказательство. Рассмотрим следующее отношение на $\mathbb{R}$: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Разобьём отрезок $[0,1)$ на классы эквивалентности, и, пользуясь аксиомой выбора, выберем в каждом классе по представителю. Обозначим через E множество этих представителей. По построению множества E имеем включения

$$[0,1) \subset \bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E+x) \subset [-1,2). \tag{1.1}$$

Заметим, что для любых множеств $A \subset B \subset \mathbb{R}$ имеет место неравенство $\mu(A) \leqslant \mu(B)$. Действительно, по свойствам (4) и (1)

$$\mu(B) = \mu\big(A \sqcup (B \setminus A)\big) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A).$$

Значит, из (1.1) и свойства (2) следует, что

$$1 = \mu([0,1)) \leqslant \mu\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E+x)\right) \leqslant \mu([-1,2)) = 3.$$

Заметим, что в середине стоит дизъюнктное объединение. Если $(E+x)\cap(E+y)\neq\varnothing$, то для некоторых $e_1, e_2 \in E$ выполнено равенство $e_1 = e_2 + (y-x)$. Поскольку $x, y \in \mathbb{Q}$, отсюда следует, что e_1 и e_2 лежат в одном классе эквивалентности, что возможно лишь тогда, когда $e_1 = e_2$ и $x = y$. Тогда по свойствам (4) и (3)

$$1 \leqslant \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(E+x) = \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(E) \leqslant 3.$$

Однако это неравенство невозможно: если $\mu(E) = 0$, то сумма равна нулю, а в случае $\mu(E) > 0$ она бесконечна. ■

Поэтому при построении длины (объёма, площади, массы, заряда и т.п.) мы будем отказываться от того, чтобы функция μ была определена на всех подмножествах вещественной оси.[1]

2 Системы множеств и функции на них

Определение. Система $\mathcal{P}$ подмножеств множества X называется *полукольцом*, если выполнены условия:

(1) $\varnothing \in \mathcal{P}$;

(2) если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \cap B \in \mathcal{P}$;

(3) если $A, B \in \mathcal{P}$, то существует такой конечный дизъюнктный набор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{P}$ такой, что

$$A \setminus B = \bigsqcup_{n=1}^{k} A_n.$$

Определение. Система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X называется *алгеброй*, если выполнены условия:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{A}$;

(2) если $A \in \mathfrak{A}$, то $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{A}$;

(3) если $A, B \in \mathfrak{A}$, то $A \cap B \in \mathfrak{A}$.

Определение. Система $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X называется *σ-алгеброй*, если выполнены условия:

(1) $\varnothing \in \mathfrak{A}$;

(2) если $A \in \mathfrak{A}$, то $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{A}$;

[1] Можно отказаться от счётной аддитивности в пользу конечной, но тогда подходящих функций будет слишком много.

(3) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$ для любого набора множеств $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра, то $\mathfrak{A}$ — полукольцо, поскольку $A \setminus B = A \cap B^c$. Очевидно также, что σ-алгебра является алгеброй (можно взять $A_k = X$ для $k \geqslant 3$ в последнем условии). Условия $\varnothing \in \mathcal{P}$ или $\varnothing \in \mathfrak{A}$ можно заменить на $\mathcal{P} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{A} \neq \varnothing$, так как $A \setminus A = \varnothing$.

Условие $A \in \mathfrak{A} \iff A^c \in \mathfrak{A}$ также называют *симметричностью* $\mathfrak{A}$. Таким образом, алгебры и σ-алгебры симметричны.

Утверждение 2.1. Для симметричных систем условия о принадлежности конечного (счётного) пересечения эквивалентно условию принадлежности конечного (счётного) объединения.

Доказательство. Утверждение следует из элементарных теоретико-множественных тождеств

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c,$$

и аналогичных тождеств для пересечения. ∎

Следствие 2.2. Если $A, B \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — алгебра, то $A \cup B \in \mathfrak{A}$; если $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}$. ∎

Примеры.

1. Если X — множество, то $\{\varnothing, X\}$ — тривиальная алгебра, 2^X — алгебра всех подмножеств.

2. *Полукольцо ячеек* в $\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

   $$\mathcal{P} = \big\{[a, b) \mid a \leqslant b;\ a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

   Докажем, что это полукольцо. Пусть $P_1 = [a_1, b_1)$, $P_2 = [a_2, b_2)$ — элементы $\mathcal{P}$. Разберём несколько случаев:

   (a) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1$. Тогда $P_1 \cap P_2 = [a_2, b_2)$, $P_1 \setminus P_2 = [a_1, a_2) \sqcup [b_2, b_1)$.

   (b) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_1 \leqslant b_2$. Тогда $P_1 \cap P_2 = [a_2, b_1)$, $P_1 \setminus P_2 = [a_1, a_2)$.

   (c) $a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2$. Тогда $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, $P_1 \setminus P_2 = [a_1, b_1)$.

   Есть ещё 3 симметричных случая, когда P_2 лежит левее P_1 — они разбираются аналогично. Таким образом, $\mathcal{P}$ — полукольцо. Тем не менее, это не алгебра, поскольку дополнение элемента $\mathcal{P}$ имеет другой вид: например, дополнение до $[0, 1)$ — это не ячейка, а два луча.

3. Множество всех подмножеств $A \subset \mathbb{R}^2$ таких, что либо A, либо $\mathbb{R}^2 \setminus A$ — ограничено, образует алгебру $\mathfrak{A}$. Доказательство оставляется в качестве упражнения. Оказывается, что $\mathfrak{A}$ — это не σ-алгебра, так как множество

   $$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big(\{0\} \times [k, k+1)\Big) = \{0\} \times [0, \infty)$$

   и его дополнение не ограничены.

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра (σ-алгебра) в X, то множество $E \subset X$ называется *измеримым* относительно $\mathfrak{A}$, если $E \in \mathfrak{A}$.

Очевидно, что если $\{\mathfrak{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — произвольный набор алгебр (σ-алгебр) в X, то $\bigcap_{\alpha\in I}\mathfrak{A}_\alpha$ — алгебра (σ-алгебра) в X. Поэтому для любой системы $\mathcal{E}$ подмножеств множества X существует минимальная по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$ — это просто пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$. Такая σ-алгебра называется *борелевской оболочкой* системы $\mathcal{E}$ и обозначается через $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — топологическое пространство. Тогда *борелевской σ-алгеброй* в X будем называть минимальную σ-алгебру, содержащую $\mathcal{T}$ (то есть все открытые, а значит и замкнутые, множества).[2]

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо (в частности, алгебра или σ-алгебра). Отображение $\mu\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ называется *конечно-аддитивным*, если

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{N} P_k\right) = \sum_{k=1}^{N}\mu(P_k)$$

для любого набора $\{P_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{P}$ такого, что $\bigsqcup_{k=1}^{N} P_k \in \mathcal{P}$ и $P_k \in \mathcal{P}$.

Отображение $\mu\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ называется *счётно-аддитивным*, если

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(P_k)$$

для любого набора $\{P_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{P}$, удовлетворяющего условиям $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}$ и $P_k \in \mathcal{P}$.

Если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, и отображение μ счётно-аддитивно на $\mathfrak{A}$, то μ называется *мерой* на $\mathfrak{A}$.

Замечание. В случае, когда рассматриваемое отображение μ задано на алгебре (σ-алгебре), условие $\bigsqcup_{k=1}^{N} P_k \in \mathcal{P}$ (соответственно, $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}$) излишне.

Отметим, что если функция μ счётно-аддитивна и неотрицательна, то

$$\mu(\varnothing) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\varnothing\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\varnothing),$$

а значит $\mu(\varnothing) = 0$ или $\mu(\varnothing) = +\infty$. Если $\mu(\varnothing) = +\infty$, то $\mu(E) = +\infty$ для всех $E \in \mathcal{P}$, поскольку E можно представить в виде $E \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots$ и воспользоваться счётной аддитивностью, а если $\mu(\varnothing) = 0$, то можно в счётном объединении взять все множества, за исключением конечного числа, пустыми. В обоих случаях получаем, что из счётной аддитивности функции следует конечная аддитивность.

В дальнейшем при рассмотрении меры μ мы по умолчанию считаем, что $\mu(\varnothing) = 0$, чтобы избежать отдельного рассмотрения мер, тождественно равных $+\infty$.

Примеры.

[2]В дальнейшем мы сможем определить понятие длины для всех множеств из борелевской σ-алгебры над $\mathbb{R}$.

1. Пусть $A \subset X$, $E \subset X$,

$$\mu_A(E) = \begin{cases} |E \cap A|, & \text{если } E \cap A \text{ — конечное множество,} \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

   где $|E \cap A|$ обозначает мощность множества $E \cap A$. Тогда μ_A — мера на 2^X. Она называется *считающей мерой*, порождённой A.

2. Если $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, δ_{x_k} — считающая мера одноточечного множества $\{x_k\}$, где $x_k \in X$, то $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{x_k}$ — мера на 2^X. При этом

$$\mu(E) = \sum_{k : x_k \in E} c_k.$$

Лемма 2.3. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $Q_1, \ldots, Q_N$ — набор дизъюнктных множеств, лежащих в $\mathcal{P}$, $\bigsqcup_{k=1}^{N} Q_k \subset Q$, где $Q \in \mathcal{P}$. Тогда:

(1) $Q \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} Q_k = \bigsqcup_{k=1}^{M} \widetilde{Q}_k$, где $\widetilde{Q}_k \in \mathcal{P}$ для всех $k \in \{1, \ldots, M\}$;

(2) $\sum_{k=1}^{N} \mu(Q_k) \leqslant \mu(Q)$ для любой конечно-аддитивной функции μ на $\mathcal{P}$.

Доказательство.

(1) Доказываем по индукции. Для $N = 1$ утверждение верно по аксиоме (3) определения полукольца. При $N \geqslant 1$ имеем

$$Q \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N+1} Q_k = \left(Q \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} Q_k \right) \setminus Q_{N+1} \tag{2.1}$$

$$= \left(\bigsqcup_{k=1}^{M} \widetilde{Q}_k \right) \setminus Q_{N+1} \tag{2.2}$$

$$= \bigsqcup_{k=1}^{M} (\widetilde{Q}_k \setminus Q_{N+1}). \tag{2.3}$$

В (2.2) мы должны воспользоваться индукционным предположением, так как $\bigsqcup_{k=1}^{N} Q_k$ может не лежать в $\mathcal{P}$.

(2) Немедленно следует из предыдущего пункта и конечной аддитивности функции μ. ■

Утверждение 2.4 (лемма о подчинённом разбиении). Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо в X, $P \in \mathcal{P}$, $\{P_k\}_{k \geqslant 1} \subset \mathcal{P}$, $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Тогда существует такое семейство множеств $\{Q_{kj}\}_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 1 \leqslant j \leqslant n_k}} \subset \mathcal{P}$, что

$$P = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{n_k} Q_{kj},$$

причём $Q_{kj} \subset P_k$ при всех $j \in \{1, \ldots, n_k\}$. Такое разбиение $\bigsqcup \bigsqcup Q_{kj}$ будем называть *подчинённым* объединению P_k.

Доказательство. Для начала заметим, что $P = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, где

$$Q_1 = P_1, \qquad Q_k = P_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} P_i \quad (\forall k > 1).$$

Так как $P_r \in \mathcal{P}$ для всех $r \in \mathbb{N}$, множества Q_k можно представить в виде

$$Q_k = \bigsqcup_{j=1}^{n_k} Q_{k,j}, \quad Q_{k,j} \in \mathcal{P},$$

по первому пункту леммы 2.3. ■

Утверждение 2.5. Пусть $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо, μ — конечно-аддитивная функция из $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) μ — счётно-аддитивна на $\mathcal{P}$.

(2) μ — счётно-полуаддитивна на $\mathcal{P}$, то есть

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) \qquad (\forall P \in \mathcal{P})\,(\forall \{P_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{P})\,.$$

(3) μ удовлетворяет условию

$$P = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \implies \mu(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) \qquad (\forall P \in \mathcal{P})\,(\forall \{P_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{P})\,.$$

Доказательство.

(1) $\implies$ (2). Пусть $P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, рассмотрим $P'_k = P \cap P_k$. По аксиоме (2) полукольца $P'_k \in \mathcal{P}$, очевидно также, что $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P'_k$. Тогда по лемме о подчинённом разбиении

$$\exists \{P'_{k,j}\} \subset \mathcal{P} : P = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{n_k} P'_{k,j}, \qquad \bigsqcup_{j=1}^{n_k} P'_{k,j} \subset P'_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Из (1) следует, что

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mu(P'_{k,j}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P'_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k). \tag{2.4}$$

В первом неравенстве в (2.4) мы воспользовались второй частью леммы 2.3.

(2) $\implies$ (3). Очевидно.

(3) $\implies$ (1). Достаточно проверить, что выполнено неравенство

$$\mu(P) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k).$$

Действительно, по лемме 2.3 имеем $\sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \leqslant \mu(P)$, после чего остаётся лишь взять супремум по n в левой части этого неравенства. ■

Утверждение 2.6. Пусть $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, μ — конечно-аддитивная функция на $\mathfrak{A}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(1) μ — счётно-аддитивна;

(2) для произвольной возрастающей последовательности множеств $\{A_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathfrak{A}$ (то есть, $A_i \subset A_j$ для всех $i < j$) выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

В этом случае говорят, что μ *непрерывна снизу*.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2). Обозначим $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1} = A_k \cap A_{k-1}^c \in \mathfrak{A}$. Тогда:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(2) $\implies$ (1). Пусть $\{C_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathfrak{A}$, $C = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Надо проверить, что $\mu(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k)$. Обозначим для этого $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что последовательность $\{A_n\}$ возрастает, а потому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(C),$$

что и требовалось. ■

Утверждение 2.7. Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, $\mu(A) < +\infty$ для некоторого множества $A \in \mathfrak{A}$, $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность множеств из $\mathfrak{A}$, лежащих в A. Тогда мера μ *непрерывна сверху*, то есть

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Доказательство. Обозначим $B_k = A \setminus A_k \in \mathfrak{A}$. Ясно, что $B_k \subset B_{k+1}$, а потому мы можем воспользоваться предыдущим утверждением:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \iff \tag{2.5}$$

$$\mu\left(A \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A \setminus A_k) \iff \tag{2.6}$$

$$\mu(A) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \big(\mu(A) - \mu(A_k)\big) \iff \tag{2.7}$$

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \tag{2.8}$$

что и требовалось. Заметим, что в (2.7) мы пользуемся конечностью $\mu(A)$. ■

Обозначение. Пусть

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Будем писать:

- $a \leqslant b$, если $a_k \leqslant b_k$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$;
- $a < b$, если $a_k < b_k$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

Для $a \leqslant b$ положим

$$[a, b) = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n).$$

По определению декартова произведения, $[a, b) \subset \mathbb{R}^n$, причём $[a, b) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $a < b$.

Это множество называется *ячейкой* в $\mathbb{R}^n$. Если $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \ldots = b_n - a_n$, то такая ячейка называется *кубической*.

Определение. Пусть n — некоторое натуральное число. Зададим систему n-мерных ячеек

$$\mathcal{P}_n := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leqslant b\}$$

и функцию

$$\lambda_n([a, b)) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

где a_k, b_k — координаты a и b соответственно.

Теорема 2.8. $\mathcal{P}_1$ — полукольцо в $\mathbb{R}^1$, а λ_1 — счётно-аддитивная функция на $\mathcal{P}_1$.

Доказательство. То, что $\mathcal{P}_1$ — полукольцо, уже проверяли. Конечная аддитивность λ_1 на $\mathcal{P}_1$ очевидна. Пусть $P = [a, b)$, $P_k = [a_k, b_k)$, $P = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k$. По утверждению 2.5 для доказательства счётной аддитивности λ_1 достаточно проверить счётную полуаддитивность, то есть неравенство

$$\lambda_1\big([a, b)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1\big([a_k, b_k)\big). \tag{2.9}$$

Рассмотрим $t : a \leqslant t < b$, и некоторое число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\widetilde{a}_k = a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда

$$[a,t] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\widetilde{a}_k, b_k),$$

и можно выбрать конечное подпокрытие

$$[a,t] \subset \bigcup_{j=1}^{N} (\widetilde{a}_{k_j}, b_{k_j}).$$

Тогда

$$t - a \leqslant \sum_{j=1}^{N} (b_{k_j} - \widetilde{a}_{k_j}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k - \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \varepsilon.$$

Последнее неравенство верно для всех $t < b$, а потому мы можем перейти к пределу $t \to b$ и получить

$$b - a \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

откуда очевидным образом следует (2.9). ■

3 Теорема Каратеодори

Определение. Отображение $\tau \colon 2^X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ называется *внешней мерой*, если:

(1) $\tau(\varnothing) = 0$;

(2) для любого множества $A \subset X$ и последовательности такой $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, выполнено неравенство

$$\tau(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tau(A_k).$$

При $A_n = \varnothing$ для всех $n > N \in \mathbb{N}$, из условия (2) следует, что внешняя мера *конечно-полуаддитивна*. В частности, внешняя мера *монотонна*, то есть

$$A \subset B \implies \tau(A) \leqslant \tau(B),$$

так как можно взять $A_1 = B$ и $A_k = \varnothing$ при всех $k > 1$.

Определение. Множество $A \subset X$ будем называть *измеримым относительно внешней меры* τ, если для всех $E \subset X$ имеет место равенство

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \tag{3.1}$$

Мотивировка этого определения заключается в том, что по внешней мере мы хотим построить алгебру, на которой бы эта мера была бы аддитивной. Очевидно, что любых множеств E и A из произвольной алгебры равенство (3.1) должно быть выполнено.

Заметим, что в силу свойства (2) внешней меры при доказательстве (3.1) достаточно проверять, что $\tau(E) \geqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)$.

По внешней мере τ зададим систему множеств $\mathfrak{U}_\tau$, состоящую из измеримых относительно τ подмножеств $A \subset X$.

Теорема 3.1. Пусть τ — внешняя мера на X. Тогда $\mathfrak{U}_\tau$ — σ-алгебра.

Доказательство. Из свойства (1) внешней меры очевидно, что $\varnothing \in \mathfrak{U}_\tau$. Равенство (3.1) можно записать в виде

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c),$$

откуда видно, что $A \in \mathfrak{U}_\tau \iff A^c \in \mathfrak{U}_\tau$.

Покажем теперь, что из $A, B \in \mathfrak{U}_\tau$ следует, что $A \cup B \in \mathfrak{U}_\tau$. Дважды применяя измеримость относительно τ, для произвольно $E \subset X$ имеем

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E \cap A) + \tau\big((E \setminus A) \setminus B\big) + \tau\big((E \setminus A) \cap B\big).$$

Очевидно, что $(E \setminus A) \setminus B = E \setminus (A \cup B)$. Кроме того, мы можем воспользоваться полуаддитивностью τ:

$$\tau(E \cap A) + \tau\big((E \setminus A) \cap B\big) \geqslant \tau\big((E \cap A) \cup ((E \setminus A) \cap B)\big) = \tau\big(E \cap (A \cup B)\big).$$

Таким образом, множество $A \cup B$ удовлетворяет (3.1), а значит $\mathfrak{U}_\tau$ — алгебра.

Заметим, что мера τ конечно-аддитивна на $\mathfrak{U}_\tau$: действительно, если $A, B \in \mathfrak{U}_\tau$ и $A \cap B = \varnothing$, то

$$\tau(A \sqcup B) = \tau((A \sqcup B) \cap A) + \tau((A \sqcup B) \setminus A) = \tau(A) + \tau(B). \tag{3.2}$$

Теперь покажем, что $\mathfrak{U}_\tau$ — σ-алгебра. Пусть $\{A_k\}_{k \geqslant 1} \subset \mathfrak{U}_\tau$, $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigsqcup_{k=1}^\infty B_k$, где

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \quad (\forall k > 1).$$

Ясно, что $B_k \in \mathfrak{U}_\tau$, поскольку $\mathfrak{U}_\tau$ — алгебра. Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \tau(E) &= \tau\left(E \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^N B_k\right)\right) + \tau\left(E \setminus \left(\bigsqcup_{k=1}^N B_k\right)\right) \\ &\geqslant \tau\left(\bigsqcup_{k=1}^N (E \cap B_k)\right) + \tau(E \setminus A) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \tau(E \cap B_k)\right) + \tau(E \setminus A). \end{aligned}$$

Это неравенство выполнено для всех $N \geqslant 1$, а потому

$$\begin{aligned}\tau(E) &\geqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E \cap B_k)\right) + \tau(E \setminus A) \\ &\geqslant \tau\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \cap B_k)\right) + \tau(E \setminus A) \\ &= \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A).\end{aligned}$$

Таким образом, $A \in \mathfrak{U}_\tau$. Значит, $\mathfrak{U}_\tau$ — σ-алгебра. ■

Следствие 3.2. Если τ — внешняя мера, то $\tau|_{\mathfrak{U}_\tau}$ — мера.

Доказательство. По (3.2) предыдущего доказательства, сужение $\tau|_{\mathfrak{U}_\tau}$ конечно-аддитивно, а из пункта (2) определения внешней меры следует, что $\tau|_{\mathfrak{U}_\tau}$ — счётно-полуаддитивно. Тогда τ — мера по утверждению 2.5.[3] ■

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра в X. Мера μ на $\mathfrak{A}$ называется *полной*, если для всех A, B таких, что $A \subset B$, $B \in \mathfrak{A}$ и $\mu(B) = 0$, выполняется $A \in \mathfrak{A}$.

Утверждение 3.3. Если τ — внешняя мера, то $\tau|_{\mathfrak{U}_\tau}$ — полная мера.

Доказательство. Пусть $A \subset B$, $B \in \mathfrak{U}_\tau$ и $\tau(B) = 0$. Тогда для всех E выполнено

$$\tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) \leqslant \tau(B) + \tau(E \setminus A) = \tau(E \setminus A) \leqslant \tau(E),$$

а значит $A \in \mathfrak{U}_\tau$. ■

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо в X, μ_0 — счётно-аддитивная функция на $\mathcal{P}$. Для каждого $A \subset X$ определим

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) \,\middle|\, \{P_k\} \subset \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\}. \tag{3.3}$$

Отметим, что если A нельзя покрыть счётным объединением множеств из $\mathcal{P}$, то $\mu^*(A) = +\infty$.

Перед тем как перейти к основному результату этого параграфа, дадим ещё одно важное определение.

Определение. Мера μ в X называется *конечной*, если $\mu(X) < \infty$. Мера μ называется *σ-конечной*, если существует представление

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad \text{где} \quad \mu(X_k) < \infty \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

[3] Ну, не совсем — то утверждение все-таки о полукольце, а не о σ-алгебре, но верно аналогичное утверждение и доказательство практически такое же.

Теорема 3.4 (Каратеодори). Пусть $\mu_0 \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ — счётно-аддитивная функция на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^X$, а μ^* определено как в (3.3). Тогда:

(1) μ^* — внешняя мера на X.

(2) σ-алгебра $\mathfrak{U}_{\mu^*}$ содержит в себе $\mathcal{P}$.

(3) Если μ — мера, получающаяся ограничением внешней меры μ^* на $\mathfrak{U}_{\mu^*}$, то $\mu(P) = \mu_0(P)$ для всех элементов $P \in \mathcal{P}$.

(4) Если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, содержащая $\mathcal{P}$, а ν — мера на $\mathfrak{A}$ такая, что $\nu(P) = \mu_0(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$ таких, что $\mu(A) < \infty$.

Более того, если μ — σ-конечна, то условие конечности $\mu(A)$ можно отбросить, то есть $\mu(A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$.

Доказательство.

(1) $\mu^*(\varnothing) = 0$, так как $\mu_0(\varnothing) = 0$. Проверим счётную полуаддитивность. Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Поскольку μ^* определяется как инфимум, для каждого $k \in \mathbb{N}$ мы можем найти такой набор множеств $\{P_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_{kj}) \leqslant \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

где $\bigcup_{j=1}^{\infty} P_{kj} \supset A_k$, а $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{kj} \supset A$, и по определению μ^*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_{kj}) \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Поскольку ε был произвольным, отсюда следует, что отображение μ^* счётно-полуаддитивно и является внешней мерой.

(2) Пусть $P \in \mathcal{P}$, $E \subset X$. Проверим неравенство

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Если $\mu^*(E) = +\infty$, то оно очевидно. Иначе (опять же, пользуясь свойствами инфимума) выберем множества $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ так, что $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Тогда

$$E \cap P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap P), \qquad E \setminus P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus P) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{n_k} Q_{kj},$$

где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$. По определению μ^* имеем

$$\mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_0(P_k \cap P) + \sum_{j=1}^{n_k} \mu_0(Q_{kj}) \right).$$

Заметим, что $P_k = (P_k \cap P) \cup (P_k \setminus P) = (P_k \cap P) \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n_k} Q_{kj}$, а значит

$$\mu_0(P_k) = \mu_0(P_k \cap P) + \sum_{j=1}^{n_k} \mu_0(Q_{kj}).$$

Таким образом,

$$\mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство. Таким образом, мы доказали, что $P \in \mathfrak{U}_{\mu^*}$, то есть, что $\mathcal{P} \subset \mathfrak{U}_{\mu^*}$.

(3) Проверим, что $\mu^*(P) = \mu_0(P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$. Поскольку $P \subset P$, $\mu^*(P) \leqslant \mu_0(P)$. С другой стороны, если $P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, то $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap P)$, и

$$\mu_0(P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k \cap P) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k).$$

Беря инфимум по P_k, получаем

$$\mu_0(P) \leqslant \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k) = \mu^*(P).$$

Таким образом, $\mu_0(P) = \mu^*(P)$.

(4) Пусть $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$. Тогда для произвольного набора $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{U}_{\mu^*}$ такого, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A$, выполнено неравенство

$$\nu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(P_k).$$

Беря в правой части инфимум по всем наборам P_k, получаем, что $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

Поймём, что $\mu(A \cap P) = \nu(A \cap P)$ для всех $P \in \mathcal{P}$ таких, что $\mu(P) < \infty$. Действительно, если бы это было не так, то получилось бы, что

$$\mu(P) = \nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P),$$

а это невозможно.

Если $\mu(A) < \infty$ или мера μ σ-конечна, то множество A можно покрыть элементами P_k полукольца $\mathcal{P}$ конечной меры, причём (как мы уже показывали), их можно считать дизъюнктными. Тогда

$$\mu(A) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(A \cap P_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A \cap P_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(A \cap P_k) = \nu(A).$$

Таким образом, последний пункт теоремы доказан. ∎

Определение. Пусть $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо, μ_0 — счетно-аддитивная функция из $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Мера μ, построенная в теореме Каратеодори, называется *стандартным продолжением* μ_0.

Заметим, что теорема Каратеодори даёт не только существование стандартного продолжения, но и формулу, по которой можно считать меру через исходную функцию μ_0:

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(P_k) \,\middle|\, \{P_k\} \subset \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\}.$$

Из теоремы Каратеодори и утверждения 3.3 следует, что стандартное продолжение — полная мера.

Мы показали, что если мера μ σ-конечна, то ее продолжение единственно. Можно привести примеры, показывающие, что в общей ситуации это условие нельзя отбросить.

Определение. Стандартное продолжение функции $\lambda_1 \colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой Лебега* на $\mathbb{R}$.

Так как $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n) = \mathbb{R}$ и $\lambda_1([-n, n)) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то λ_1 σ-конечна, то есть мера Лебега определена на σ-алгебре $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ единственным образом.

Будем обозначать продолжение λ_1 на $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ той же буквой λ_1. $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ называется *лебеговской σ-алгеброй*.

Напомним, что борелевской оболочкой $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ системы $\mathcal{E} \subset 2^X$ называется наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Будем через $\mathfrak{B}_1$ обозначать борелевскую оболочку открытых множеств в $\mathbb{R}$.

Утверждение 3.5. Имеют место равенство и вложения

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\mathcal{P}_1) \subset U_{\lambda_1^*} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Если бы было выполнено равенство $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*} = 2^{\mathbb{R}}$, то λ_1 было бы «наивной длиной», так как

$$\begin{aligned}
\lambda_1(E + r) &= \lambda_1^*(E + r) \\
&= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1(P_k + r) \,\middle|\, \{P_k\} \subset \mathcal{P}_1 : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_1(P_k) \,\middle|\, \{P_k\} \subset \mathcal{P}_1 : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\} = \lambda_1(E).
\end{aligned}$$

Как мы знаем, «наивной длины» не существует, а значит включение $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*} \subset 2^{\mathbb{R}}$ строгое.

Вложение $\mathfrak{B}(\mathcal{P}_1) \subset \mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ следует из того, что $\mathcal{P}_1 \subset \mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ (по второму пункту теоремы Каратеодори) и того, что $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ — σ-алгебра.

$\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)$, так как для любого G — открытого в $\mathbb{R}$,

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k), \qquad (a_k, b_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a_k + \frac{1}{n}, b_k\right),$$

а значит $G \in \mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)$ и $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)$ в силу минимальности $\mathfrak{B}_1$. Включение $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)$ доказывается аналогично:

$$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{1}{n}, b_n\right) \in \mathfrak{B}_1. \qquad \blacksquare$$

Утверждение 3.6. Пусть μ_0 — счётно-аддитивная функция на полукольце $\mathcal{P} \subset 2^X$, μ^* — внешняя мера, порождённая μ_0. Тогда для любого множества $A \subset X$, удовлетворяющего условию $\mu^*(A) < \infty$, найдётся такое $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, что

$$A \subset C \quad \text{и} \quad \mu^*(C) = \mu^*(A).$$

Доказательство. Из свойств инфимума и конечности $\mu^*(A)$ следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое $C_n \supset A$, что

$$C_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_{nj}, \quad P_{nj} \in \mathcal{P}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(P_{nj}) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Обозначим $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A$ и поймём, что это искомое множество. Действительно,

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(C) \leqslant \mu^*(C_n) \leqslant \mu^*(A) + \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

после чего остаётся лишь перейти к пределу по n в правой части. $\blacksquare$

Следствие 3.7. Если A измеримо относительно μ^* и $\mu(A) < +\infty$, то найдутся такие $B, C \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, что

$$B \subset A \subset C \quad \text{и} \quad \mu(C \setminus B) = 0.$$

В частности, $\mu(B) = \mu(A) = \mu(C)$.

Доказательство. Возьмём множество C из предыдущего утверждения и положим $e = C \setminus A$. Найдётся такое $\widetilde{e} \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, что $\mu(\widetilde{e}) = 0$ и $e \subset \widetilde{e}$. Тогда нетрудно проверить, что $B = C \setminus \widetilde{e}$ — искомое множество. $\blacksquare$

Примеры.

1. Множество $\{x\}$ замкнуто для всех $x \in \mathbb{R}$, так как оно является дополнением открытого, а потому по свойствам σ-алгебры лежит в $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)$. Мы можем

посчитать его меру Лебега:

$$\lambda_1(\{x\}) = \lambda_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x, x+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\lambda_1\left(\left[x, x+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

2. Поскольку $\mathbb{Q} = \bigsqcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$, имеем $\mathbb{Q} \in \mathfrak{B}_1$ и

$$\lambda_1(\mathbb{Q}) = \sum_{x\in\mathbb{Q}}\lambda_1(\{x\}) = 0.$$

3. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, причём $a_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_n < 1$. Рассмотрим множество, в котором на i-ом шаге в центре каждого отрезка (начиная с $[0,1]$) удаляется отрезок, удовлетворяющий условию $\lambda_1(I) = a_i$. Занумеруем все удалённые отрезки некоторым образом и обозначим их $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$. Тогда это множество можно записать так:

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Оно называется *толстым канторовым множеством*. Нетрудно понять, что это замкнутое множество без внутренних точек, причём $\lambda_1(C) > 0$. Действительно, $C \in \mathfrak{B}_1$, так как C — замкнуто, и

$$\lambda_1([0,1]) = \lambda_1(C) + \lambda_1\left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} I_n\right) = \lambda_1(C) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 2^n < \lambda_1(C) + 1,$$

а $\lambda_1([0,1]) = \lambda_1([0,1) \sqcup \{1\}) = 1 + \lambda_1(\{1\}) = 1 + 0 = 1$. Отсюда $\lambda_1(C) > 0$.

4. Покажем, что E — множество меры ноль в смысле определения из первого семестра тогда и только тогда, когда $\lambda_1(E) = 0$. Если E — множество меры ноль, то $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = K$, где G_n — открыты, и $\lambda_1(G_n) \to 0$ при $n \to \infty$. По свойствам σ-алгебры $K \in \mathfrak{B}_1$, а по непрерывности меры $\lambda_1(K) = 0$. Поскольку мера λ_1 полная, отсюда следует, что E — измеримо относительно λ_1^* и $\lambda_1(E) \leqslant \lambda_1(K) = 0$.

Если же $E \in \mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ и $\lambda_1(E) = 0$, то по определению стандартного продолжения для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся G_n — открытое, причём $E \subset G_n$ и $\lambda_1(G_n) \leqslant \frac{1}{n}$.

4 Измеримые функции и теорема об аппроксимации

Определение. Пара $(X, \mathfrak{A})$, где X — множество, а $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра в X, называется *измеримым пространством*.

Поскольку дальше в этом параграфе много утверждений связано с прообразами, введём следующие удобные обозначения:

$$E(a < f < b) = f^{-1}((a,b)) = \{x \in E : f(x) \in (a,b)\},$$
$$E(f \leqslant a) = f^{-1}([-\infty, a]),$$

и так далее (здесь подразумевается, что f определено на E).

Определение. Пусть E — измеримое множество относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Говорят, что функция f *измерима* относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, если

$$E(f > a) = f^{-1}\big((a,+\infty]\big) \in \mathfrak{A} \quad (\forall a \in \mathbb{R}).$$

На самом деле, в этом определении вместо прообразов $(a,+\infty]$ можно было брать прообразы $[a,+\infty]$, $[-\infty,a)$ или $[-\infty,a]$. Например,

$$f^{-1}\big([a,+\infty]\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a-\frac{1}{n},+\infty\right]\right),$$
$$f^{-1}\big((a,+\infty]\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[a+\frac{1}{n},+\infty\right]\right),$$

откуда следует эквивалентность $(a,+\infty]$ и $[a,+\infty]$. Чтобы перейти от $[a,+\infty]$ к $[-\infty,a)$, достаточно взять дополнение. Остальные случаи разбираются аналогичным образом. В дальнейшем мы считаем, что у измеримой функции прообразы всех четырёх типов множеств измеримы.

Выделим некоторые свойства измеримых функций:

1. *Прообразы одноточечных множеств измеримы.* Действительно,

$$f^{-1}(\{a\}) = E(f \leqslant a) \cap E(f \geqslant a) \quad (\forall a \in \mathbb{R}),$$
$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < n),$$
$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n),$$

2. *Прообразы открытых интервалов измеримы*:

$$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a),$$

а бесконечные интервалы представляются в виде счётного объединения конечных.

3. *Если функция f измерима, то и её абсолютное значение $|f|$ измеримо*, так как

$$E(|f| < a) = E(-a < f < a),$$

а $(-a,a)$ — открытый интервал.

Утверждение 4.1. Пусть X, Y — множества, $\mathcal{E} \subset 2^Y$, $\varphi\colon X \to Y$ — произвольное отображение. Тогда:

(1) если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра в X и $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{A}$, то $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}(\mathcal{E})) \subset \mathfrak{A}$;

(2) $\mathfrak{B}(\varphi^{-1}(\mathcal{E})) = \varphi^{-1}(\mathfrak{B}(\mathcal{E}))$.

Доказательство.

(1) Рассмотрим систему $\mathfrak{A}' = \{B \subset Y : \varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{A}'$ — σ-алгебра. Поскольку по условию $\mathfrak{A}' \supset \mathcal{E}$, по определению борелевской оболочки получаем, что $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B}(\mathcal{E})$.

(2) Полагая $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\varphi^{-1}(\mathcal{E}))$, из первого пункта видим, что

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{B}(\mathcal{E})) \subset \mathfrak{B}(\varphi^{-1}(\mathcal{E})).$$

С другой стороны, $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}(\mathcal{E}))$ — σ-алгебра (как прообраз σ-алгебры), содержащая $\varphi^{-1}(\mathcal{E})$, а потому по определению борелевской оболочки выполнено

$$\mathfrak{B}(\varphi^{-1}(\mathcal{E})) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{B}(\mathcal{E})).$$

Значит, эти σ-алгебры совпадают. ■

Утверждение 4.2 (прообраз борелевского множества при измеримом отображении измерим). Пусть функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда

$$f^{-1}(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{A}.$$

Доказательство. По предыдущему утверждению имеем

$$f^{-1}(\mathfrak{B}_1) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)) = \mathfrak{B}(f^{-1}(\mathcal{P}_1)).$$

Тогда утверждение следует из того, что $E(a \leqslant f < b) = E(f \geqslant a) \setminus E(f \geqslant b) \in \mathfrak{A}$. ■

Утверждение 4.3. Пусть функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима относительно $\mathfrak{A}$. Тогда ограничение f на измеримое множество E_0 измеримо относительно $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Действительно,

$$E_0(f < a) = E(f < a) \cap E_0 \in \mathfrak{A}, \tag{4.1}$$

так как E_0 измеримо. ■

Утверждение 4.4. Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и функция f измерима на каждом E_n, то f измерима на E.

Доказательство. $E(f < a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(f < a)$. ■

Следствие 4.5. Любая измеримая функция на множестве $E \subset X$ — это ограничение измеримой функции на X.

Доказательство. Доопределим f нулем на $E^c = X \setminus E$. Очевидно, что 0 — измеримая функция. Таким образом, f измерима на E и E^c, то есть, по предыдущему утверждению, f измерима на X. ■

Таким образом, мы всегда можем считать, что измеримые функции определены на всем пространстве X.

Утверждение 4.6. Пусть функции $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы относительно $\mathfrak{A}$. Тогда:

1. функции $\sup_{n\geqslant 1} f_n$, $\inf_{n\geqslant 1} f_n$ измеримы;
2. функции $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ измеримы;
3. если существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, то f измерима.

Доказательство.

1. Обозначим $g = \sup_{n\geqslant 1} f_n$, $h = \inf_{n\geqslant 1} f_n$. Тогда измеримость g и h следует из равенств
$$X(g > a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X(f_n > a), \qquad X(h < a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X(f_n < a). \tag{4.2}$$
2. Для доказательства этого пункта достаточно вспомнить, что
$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} f_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant n} f_k, \tag{4.3}$$
и применить предыдущий пункт.
3. Если $\exists \lim f_n = f$, то
$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n, \tag{4.4}$$
после чего остается лишь применить пункт (2). ■

Теорема 4.7. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — измеримые функции из X в $\mathbb{R}$, $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in H$ для некоторого $H \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(H)$ — непрерывная функция на H. Тогда функция

$$F : X \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) = \varphi\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big),$$

измерима.[4]

Доказательство. Поскольку φ непрерывно, прообраз открытого множества открыт, то есть $H(\varphi < a) = H \cap G_a$, где G_a — некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ (именно так выглядит произвольное открытое множество в индуцированной топологии).

Рассмотрим отображение $U(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ для $x \in X$. Проверим, что для любого открытого G в $\mathbb{R}^n$, прообраз $U^{-1}(G)$ измерим. Пусть $P = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k)$ — n-мерная ячейка, тогда

$$U^{-1}(P) = \{x \in X : a_k \leqslant f_k(x) < b_k \ \forall k\} = \bigcap_{k=1}^{n} X(a_k \leqslant f_k < b_k), \tag{4.5}$$

[4] Вообще говоря, этой теоремы на лекции не было. Был лишь ее частный случай — композиция непрерывной функции и измеримой в $\mathbb{R}$.

то есть прообраз ячеек измерим. Поскольку любое открытое множество может быть записано как объединение счетного числа ячеек, отсюда следует, что прообраз $U^{-1}(G)$ измерим. Тогда

$$X(F < a) = \{x \in X : U(x) \in H(\varphi < a)\} = U^{-1}(H \cap G_a) = U^{-1}(G_a), \qquad (4.6)$$

то есть F измеримо. ■

Беря в качестве φ функции $(x, y) \mapsto x + y$ или $(x, y) \mapsto xy$, можно уже сейчас доказать, что сумма и произведение (конечного числа) измеримых функций измеримы. Тем не менее, если мы позволяем этим функциям принимать бесконечные значения, то нужно сначала определить арифметику на $\overline{\mathbb{R}}$: а именно, определить, что делать с суммой и произведением, в которых присутствует бесконечность.

Определение.

1. Если $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и $x \neq 0$, то $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty$ для $x > 0$ и $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty$ для $x < 0$.
2. Для каждого $x \in \overline{\mathbb{R}}$ положим $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ (в частности, $0 \cdot \infty = 0$).
3. Для каждого $x \in \overline{\mathbb{R}}$ положим $x/(\pm\infty) = 0$ (в частности, $(\pm\infty)/(\pm\infty) = 0$.
4. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ положим $x + (+\infty) = x - (-\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $x + (-\infty) = x - (+\infty) = (-\infty) + x = -\infty$.
5. $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0$.[5]

Можно проверить, что первые четыре соглашения, в отличие от пятого, не нарушают ассоциативности сложения. Поэтому мы предпочтем избегать случаи, когда в выражении встречается сумма с бесконечностями разных знаков.

Чтобы теперь доказать теорему о сложении и произведении измеримых функций в общем случае, достаточно разбить пространство X на $E(f = 0)$, $E(0 < f < +\infty)$, $E(-\infty < f < 0)$, $E(f = -\infty)$ и $E(f = +\infty)$, после чего чего понять, что на некоторых попарных пересечениях произведение (сумма) измеримы, а на остальных — константы. Детали оставляются в качестве упражнения[6].

Следствие 4.8. Если f — измеримо, φ — непрерывно и композиция $\varphi \circ f$ определена, то она измерима. ■

Следствие 4.9. Если $f \geqslant 0$ — измерима и $p > 0$, то функция f^p измерима.

Доказательство. Действительно, на $E(f < +\infty)$ отображение f^p измеримо как композиция непрерывного и измеримого отображений (предыдущее следствие), а на $E(f = +\infty)$ f постоянно. ■

[5] На лекциях условий (3) и (5) не было и ими никогда не пользовались — РБ.

[6] В дальнейшем мы легко докажем это утверждение с помощью аппроксимации.

Утверждение 4.10. Пусть $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, где E — борелевское подмножество топологического пространства X. Тогда φ измеримо относительно борелевской σ-алгебры в X.

Доказательство. Поскольку φ — непрерывно, а множество $(a, +\infty)$ открыто, имеем $f^{-1}\big((a, +\infty)\big) = E \cap W$, где W открыто в X. По условию $E \in \mathfrak{B}(X)$, очевидно, что $W \in \mathfrak{B}(X)$, а потому $E \cap W \in \mathfrak{B}(X)$. ∎

Определение. *Простой функцией* называется измеримая[7] функция из X в $\mathbb{R}$, принимающая конечное число значений.

Нетрудно видеть, что если f — простая функция, то существует такое конечное разбиение X на измеримые множества, что f постоянно на этих множествах. Такое разбиение мы будем называть *допустимым*.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — множество попарно различных значений, которые принимает простая функция f. Тогда в качестве допустимого разбиения можно взять множества $E_k = f^{-1}(a_k)$. Это можно записать следующим образом:

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}. \tag{4.7}$$

Ясно, что допустимое разбиение не единственно — можно взять подразбиение любого разбиения.

Отметим, что у любых двух простых функций существует общее допустимое разбиение: а именно, если $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{e'_j\}_{j=1}^{m}$ — допустимые разбиения f и g, то попарные пересечения $e_k \cap e'_j$ образуют их общее допустимое разбиение.

Из существования общего допустимого разбиения следует, что линейная комбинация простых функций является простой функцией.

Теорема 4.11 (об аппроксимации). Любая измеримая неотрицательная функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ является поточечным пределом возрастающей последовательности простых неотрицательных функций f_n.

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что интервалы

$$\Delta_k^n = [k/n, (k+1)/n)$$

для $k = 0, 1, \ldots, n^2 - 1$, и $\Delta_{n^2}^n = [n, +\infty]$, образуют разбиение множества $[0, +\infty]$. Положим $e_k^n = f^{-1}(\Delta_k^n)$. Поскольку f измерима, все множества e_k^n измеримы, причем они образуют разбиение X для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$g_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k^n}. \tag{4.8}$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant f(x) \qquad (\forall x \in X), \tag{4.9}$$

[7]Некоторые авторы не добавляют измеримость в определение простой функции — ОМ.

а также, что
$$g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x) + \frac{1}{n} \qquad (\forall x \notin e^n_{n^2}). \tag{4.10}$$
Покажем, что последовательность g_n поточечно сходится к f.

Если $f(x) = +\infty$, то $x \in e^n_{n^2}$ для всех n, а потому
$$g_n(x) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty = f(x). \tag{4.11}$$
Если же $f(x) < +\infty$, то для $n > f(x)$ $x \notin e^n_{n^2}$, а потому в силу (4.10)
$$0 \leqslant f(x) - g_n(x) \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.12}$$
Таким образом, функции g_n удовлетворяют всем необходимым свойствам, кроме одного: они могут не возрастать. Поэтому определим
$$f_n = \max(g_1, g_2, \dots, g_n). \tag{4.13}$$
Очевидно, что последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и состоит из простых функций. Поскольку
$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) \qquad (\forall x \in X), \tag{4.14}$$
получаем, что $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ для всех $x \in X$. ■

Перед следствиями введем важное определение.

Определение. Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда обозначим
$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0). \tag{4.15}$$
Очевидно, что $f_+, f_- \geqslant 0$. Нетрудно проверить, что
$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-, \quad f_+ \cdot f_- = 0. \tag{4.16}$$
Следствие 4.12. Произвольную измеримую функцию $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ можно поточечно аппроксимировать простыми функциями f_n такими, что $|f_n| \leqslant f$.

Доказательство. Достаточно лишь независимо найти аппроксимации для неотрицательных функций f_+ и f_-. ■

Следствие 4.13. Если функции f, g измеримы и действуют из X либо в $\mathbb{R}$, либо в $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, то $f+g$, $f \cdot g$ измеримы.

Доказательство. Если $f, g \geqslant 0$, то найдем аппроксимирующие их последовательности простых функций f_n, g_n. Тогда $f_n + g_n$ — простые, и $f_n + g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f + g$. Значит, функция $f+g$ измерима как предел измеримых функций. Аналогично, $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$, а потому $f \cdot g$ измеримо.

Если $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, то запишем
$$f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-). \tag{4.17}$$

Существуют простые функции $f_{\pm,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f_\pm$, $g_{\pm,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} g_\pm$. Тогда

$$f + g = \lim_{k\to\infty} (f_{+,n} - f_{-,n} + g_{+,n} - g_{-,n}),$$

а значит $f + g$ измеримо как предел измеримых. Доказательство для $f \cdot g$ аналогично. ■

5 Интеграл Лебега

Определение. Тройка $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ называется *пространством с мерой*, если X — множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств, μ — мера на $\mathfrak{A}$.

Дальше в этом параграфе мы по умолчанию работаем с фиксированным пространством с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Лемма 5.1. Пусть f — неотрицательная простая функция, $\{A_j\}_{j=1}^M$, $\{B_k\}_{k=1}^N$ — допустимые разбиения f; a_j, b_k — значения f на A_j и B_k соотвественно. Тогда

$$\sum_{j=1}^{M} a_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{N} b_k \mu(B_k). \tag{5.1}$$

Доказательство. Ясно, что $C = \bigsqcup_{j=1}^M A_j \cap C = \bigsqcup_{k=1}^N B_k \cap C$ для каждого множества $C \subset X$, и потому

$$\mu(C) = \sum_{j=1}^{M} \mu(A_j \cap C) = \sum_{k=1}^{N} \mu(B_k \cap C). \tag{5.2}$$

При этом, если $A_j \cap B_k \neq \varnothing$, то $a_j = b_k$. Отсюда $a_j\mu(A_j \cap B_k) = b_k\mu(A_j \cap B_k)$ для всех j, k. Значит, по (5.2)

$$\sum_{j=1}^{M} a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} a_j \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} b_k \mu(A_j \cap B_k) \tag{5.3}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} b_k \sum_{j=1}^{M} \mu(A_j \cap B_k) = \sum_{k=1}^{N} b_k \mu(B_k), \tag{5.4}$$

что и требовалось. ■

Определение. Пусть f — простая функция на X, принимающая значения c_k на множествах разбиения E_k, E — измеримое множество. Тогда *интегралом* f по множеству E называется значение

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(E \cap E_k). \tag{5.5}$$

Корректность определения (то есть независимость от выбранного допустимого разбиения) непосредственно следует из леммы 5.1.

Утверждение 5.2. Если $C > 0$, то $\int_E C\,\mathrm{d}\mu = C\mu(E)$.

Доказательство. Непосредственно следует из определения: $f(x) = C$ — простая функция, и E само является допустимым разбиением. ■

Утверждение 5.3 (монотонность интеграла). Если f, g — простые неотрицательные функции, причем $f \leqslant g$ на всем E, то $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть общее допустимое разбиение и воспользоваться определением. ■

Определение. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ — измеримая функция, где множество E измеримо. Тогда интеграл f по E определяется следующим образом:

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, g \geqslant 0,\ g \leqslant f \text{ на } E,\ g \text{ — простая}\right\}.$$

Замечание. Это определение интеграла согласовано с предыдущем, когда f — простая функция, так как интеграл монотонен (утверждение 5.3).

Для того, чтобы определить интеграл произвольной измеримой функции, нам понадобятся функции f_+ и f_-. Напомним, что $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = \max(-f, 0)$.

Определение. Будем говорить, что измеримая на E функция f *интегрируема*, если хотя бы один из интегралов $\int_E f_+\,\mathrm{d}\mu$, $\int_E f_-\,\mathrm{d}\mu$ конечен, и что f — *суммируема*, если оба интеграла конечны. Для интегрируемой f положим

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_-\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.6}$$

Замечание. Опять же, новое определение согласовано с предыдущим: если $f \geqslant 0$, то $f_+ = f$, $f_- = 0$ и $\int_E 0\,\mathrm{d}\mu = 0$ по утверждению 5.2.

Чтобы выделить переменную, по которой проводится интегрирование, мы будем вместо $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ писать $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Утверждение 5.4 (монотонность интеграла). Если f, g — интегрируемы, $f \leqslant g$ на E, то $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Если f, g — неотрицательные и простые, то утверждение уже доказано (5.3). Если $f, g \geqslant 0$ — произвольные измеримые функции, то имеем включение наборов функций, по которым берется супремум:

$$\{h : h \leqslant f,\ h \text{ — простая на } E\} \subset \{h : h \leqslant g,\ h \text{ — простая на } E\},$$

откуда искомое неравенство следует по определению.

В общем случае выполнены неравенства $f_+ \leqslant g_+$, $f_- \geqslant g_-$, а потому (по предыдущему рассуждению) $\int_E f_+ \leqslant \int_E g_+$, $\int_E f_- \geqslant \int_E g_-$, и

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_-\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_E g_+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E g_-\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.7}$$

■

Утверждение 5.5. Если $\mu(E) = 0$, то $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ для любой измеримой функции f.

Доказательство. Если f — простая, то по определению интеграла и монотонности меры получаем

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k\mu(E \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0. \tag{5.8}$$

Если f — неотрицательная, то $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sup\{0\} = 0$.
Если f — произвольная, то $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0 - 0 = 0$. ■

Утверждение 5.6. $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E\,\mathrm{d}\mu$.[8]

Доказательство. Если f — простая функция с допустимым разбиением $\{A_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, то $\{E \cap A_1, E \cap A_2, \ldots, E \cap A_n, X \setminus E\}$ — допустимое разбиение для простой функции $f\chi_E$. При этом на $X \setminus E$ интеграл этой функции равен нулю, а на остальных элементах разбиения совпадает с f. Таким образом, равенство интегралов для простых функций следует из определения.

Пусть $f \geqslant 0$. Возьмем произвольные простые неотрицательные функции g, h такие, что $g \leqslant f$ на E и $h \leqslant f\chi_E$ на X. Очевидно, что $h = h\chi_E$, а потому

$$\int\limits_X h\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X h\chi_E\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E h\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu, \tag{5.9}$$

$$\int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X g\chi_E\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f\chi_E\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.10}$$

Беря в левых частях супремумы по h и g и пользуясь определением интеграла для неотрицательных функций, получаем неравенства $\int_X f\chi_E\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f\,\mathrm{d}\mu$ и $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f\chi_E\,\mathrm{d}\mu$.

Переход к произвольным функциям очевиден. ■

Таким образом, мы показали, что интеграл f по E не зависит от того, как f определена вне E. Кроме того, мы можем всегда (не умаляя общности) рассматривать интегралы по всему X.

Следствие 5.7 (монотонность интеграла как функции множества). Если $A \subset B$ и $f \geqslant 0$ на B, то $\int_A f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f\,\mathrm{d}\mu$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $f\chi_A \leqslant f\chi_B$, и воспользоваться предыдущим утверждением. ■

[8] На лекции это утверждение было дано в качестве упражнения.

Теорема 5.8 (теорема Леви для неотрицательных функций). Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций (то есть $f_n \leqslant f_{n+1}$ на X для всех $n \in \mathbb{N}$), поточечно сходящаяся к некоторой функции f. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu. \tag{5.11}$$

Доказательство. Для начала заметим, что f измерима как предел измеримых функций. По монотонности интеграла

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu, \tag{5.12}$$

а потому существует предел

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \,\mathrm{d}\mu. \tag{5.13}$$

Зафиксируем некоторое число $\theta \in (0,1)$ и простую функцию g такую, что $0 \leqslant g \leqslant f$. Пусть $A_1, \ldots, A_N$ — допустимое разбиение для g, причем на A_i g принимает значение a_i.

Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$X_n = X(f_n \geqslant \theta g) = \{x \in X : f_n(x) \geqslant \theta g(x)\}.$$

Поскольку $\{f_n\}$ возрастают, очевидно, что $X_n \subset X_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Зафиксируем произвольную точку $x \in X$. Если $g(x) = 0$, то $f_n(x) \geqslant 0 = \theta g(x)$, откуда $x \in X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $g(x) > 0$, то для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем $f_n(x) \geqslant \theta g(x)$, так как

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \geqslant g(x) > \theta g(x). \tag{5.14}$$

(здесь мы пользуемся тем, что $\theta < 1$). Таким образом, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, и это объединение действительно совпадает с X. По доказанным свойствам для любого $A \subset X$ выполнено

$$(A \cap X_n) \subset (A \cap X_{n+1}) \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap X_n).$$

По непрерывности меры снизу имеем

$$\mu(A \cap X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap X_n\right) = \mu(A). \tag{5.15}$$

По следствию 5.7 получаем

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{X_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{X_n} \theta g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{N} \theta a_k \mu(E_k \cap X_n). \tag{5.16}$$

Устремляя n к бесконечности и пользуясь (5.15), получаем

$$L \geqslant \sum_{k=1}^{N} \theta a_k \mu(E_k) = \theta \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu. \tag{5.17}$$

Переходя к пределу по $\theta \to 1$ и беря супремум по всем простым неотрицательным функциям $g \leqslant f$, по определению интеграла получаем $L \geqslant \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Поскольку обратное неравенство уже было доказано, достигается равенство. ■

Следствие 5.9. Пусть функции f, g измеримы. Если они также неотрицательны или суммируемы, то

$$\int\limits_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu. \tag{5.18}$$

Доказательство. Для простых функций равенство (5.18) очевидно по определению. Неотрицательные функции мы умеем аппроксимировать возрастающими последовательностями неотрицательных функций $\{f_n\}$, $\{g_n\}$. Тогда переходя к пределу по n в равенстве

$$\int\limits_X (f_n+g_n) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g_n \, \mathrm{d}\mu \tag{5.19}$$

и пользуясь теоремой Леви, мы получаем (5.18). В общем случае запишем $h = f + g$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&h = h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_- && (5.20)\\
&\implies h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ && (5.21)\\
&\implies \int\limits_X (h_+ + f_- + g_-) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X (h_- + f_+ + g_+) \, \mathrm{d}\mu && (5.22)\\
&\implies \int\limits_X h_+ \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X f_- \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g_- \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X h_- \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X f_+ \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g_+ \, \mathrm{d}\mu && (5.23)\\
&\implies \int\limits_X h \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X h_+ \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X h_- \, \mathrm{d}\mu && (5.24)\\
&= \int\limits_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_- \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g_+ \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X g_- \, \mathrm{d}\mu && (5.25)\\
&= \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu. && (5.26)
\end{aligned}$$

■

Утверждение 5.10. Если f — измерима, и либо $f \geqslant 0$, либо f — интегрируема, то

$$\int\limits_X \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}). \tag{5.27}$$

Доказательство. Доказательство совершенно аналогично предыдущему. ■

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется *измеримой*, если $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ — измеримы; f называется *суммируемой*, если $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ — суммируемы. В этом случае мы можем определить интеграл:

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu := \int\limits_E \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\mu + i\int\limits_E \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.28}$$

Утверждение 5.11. $\int_E \overline{f}\,\mathrm{d}\mu = \overline{\int_E f\,\mathrm{d}\mu}$ для любой суммируемой функции f на E.

Доказательство. Очевидно. ■

Утверждение 5.12 (основная оценка интеграла). Для любой суммируемой комплекснозначной функции f на E выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.29}$$

Доказательство. Для начала заметим, что функция $|f|$ измерима, так как $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$, причем функции Re и Im измеримы, а $\sqrt{}$ — непрерывная функция.

Найдем такое $\alpha \in \mathbb{C}$, что $|\alpha| = 1$ и

$$\alpha\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu = \left|\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu\right|. \tag{5.30}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu\right| = \int\limits_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \operatorname{Re}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu + i\int\limits_E \operatorname{Im}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.31}$$

Поскольку слева стоит вещественное число, $\int_E \operatorname{Im}(\alpha f)\,\mathrm{d}\mu = 0$. Значит, по монотонности интеграла

$$\left|\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_E |\operatorname{Re}(\alpha f)|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_E |\alpha f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.32}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались определением модуля, а в последнем равенстве — тем, что $|\alpha| = 1$. ■

Утверждение 5.13. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f \geqslant 0$ — измеримая функция. Тогда функция множества

$$\nu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad A \mapsto \int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu, \tag{5.33}$$

является мерой на $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Из условия следует, что $\nu(A)$ корректно определено и $\nu(A) \geqslant 0$. Если $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathfrak{A}$, то

$$\nu(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_A \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} \cdot f \right) \mathrm{d}\mu. \tag{5.34}$$

Обозначим

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \cdot f. \tag{5.35}$$

Тогда очевидно, что g_n — измеримы, $g_n \geqslant 0$, $g_n \leqslant g_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k} f$. По теореме Леви

$$\int\limits_X \lim_{n\to\infty} g_n(x) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k), \tag{5.36}$$

то есть функция ν счетно-аддитивна, а значит является мерой. ■

Следствие 5.14. [9]Интеграл суммируемой функции f непрерывен сверху и снизу. А именно, если $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$ или $A = \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$, $A_{n+1} \supset A_n$, то

$$\int\limits_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu. \tag{5.37}$$

Доказательство. Мы доказали, что функции $\nu_+(A) = \int_A f_+ \,\mathrm{d}\mu$ и $\nu_-(A) = \int_A f_- \,\mathrm{d}\mu$ является мерами; поскольку f суммируема, эти меры конечны. Тогда утверждение следует из того, что конечные меры непрерывны сверху и снизу. ■

Следствие 5.15. Пусть $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \delta_{x_k}$, где $c_k \in \mathbb{R}_+$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, δ_{x_k} — мера Дирака в x_k, то есть считающая мера одноточечного множества $\{x_k\}$. Тогда для любой измеримой функции $f \geqslant 0$ имеет место равенство

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x_k). \tag{5.38}$$

Доказательство. По утверждению 5.13 имеем

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \nu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\{x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int\limits_{\{x_k\}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot f(x_k), \tag{5.39}$$

так как $f|_{\{x_k\}}$ — константа $f(x_k)$. ■

Утверждение 5.16. Пусть измеримое множество E таково, что $\mu(E) > 0$, $f(x) > 0$ для всех $x \in E$, и f — измеримая функция на E. Тогда $\int_E f \mathrm{d}\mu > 0$.

[9]Этого следствия вроде бы не было на лекции, хотя оно элементарно и пригодится в одном из следующих утверждений.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$E_n = E(f \geqslant \tfrac{1}{n}) = \{x \in E : f(x) \geqslant \tfrac{1}{n}\}, \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{5.40}$$

По условию $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$; очевидно, что $E_n \subset E_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда по непрерывности меры снизу $\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(E) > 0$. Отсюда следует, что $\mu(E_n) > 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Осталось лишь воспользоваться монотонностью интеграла:

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{E_n} f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{E_n} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) > 0. \tag{5.41}$$

■

Утверждение 5.17 (неравенство Чебышева). Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, $\varepsilon > 0$. Обозначим $A = X(|f| \geqslant \varepsilon)$. Тогда

$$\mu(A) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.42}$$

Доказательство. Надо воспользоваться монотонностью интеграла:

$$\mu(A) = \int\limits_A 1\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_A \varepsilon\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_A |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{5.43}$$

■

Утверждение 5.18. Пусть f — измерима и суммируема на X, $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда существует такое измеримое множество $A \subset X$ конечной меры, что $\int_{X\setminus A} |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$ (так как мы все равно оцениваем модуль). Заметим, что множества $A_n = X(|f| < \frac{1}{n})$ убывают, а их пересечение совпадает с $X(f = 0)$. Поскольку интеграл непрерывен сверху (следствие 5.14),

$$\int\limits_{A_n} |f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{X(f=0)} |f|\,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{5.44}$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{X\setminus A} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A_n} |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \tag{5.45}$$

для достаточно больших n, где $A = X(|f| \geqslant \frac{1}{n})$. Осталось заметить, что $\mu(A) < \infty$ по неравенству Чебышева, так как функция f суммируема. ■

Утверждение 5.19. Пусть функция f суммируема на X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого измеримого множества e, удовлетворяющего условию $\mu(e) < \delta(\varepsilon)$, выполнено неравенство $\int_e |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Доказательство. Можно считать, что $f \geqslant 0$. Найдем такую простую функцию g, что $0 \leqslant g \leqslant f$ и

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu < \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.46}$$

Ясно, что функция g ограничена (она простая, то есть принимает лишь конечное число значений). Пусть $g \leqslant c$ на X. Тогда

$$\int_e f\,\mathrm{d}\mu = \int_e (f-g)\,\mathrm{d}\mu + \int_e g\,\mathrm{d}\mu \tag{5.47}$$

$$\leqslant \int_X (f-g)\,\mathrm{d}\mu + \int_e c\,\mathrm{d}\mu \tag{5.48}$$

$$= \int_X f\,\mathrm{d}\mu - \int_X g\,\mathrm{d}\mu + c\mu(e) \tag{5.49}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + c\mu(e). \tag{5.50}$$

Полагая $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2c$, получаем требуемое неравенство. ■

Утверждение 5.20. Если f — функция, интегрируемая по Риману на $[a,b]$, то f измерима относительно $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ и

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1, \tag{5.51}$$

где слева — интеграл по Риману, а справа — по Лебегу.

Доказательство. В первом семестре мы доказывали, что $f \in R[a,b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена, и существует такое $e \in \mathfrak{U}_{\lambda^*}$, что $\lambda_1(e) = 0$ и f непрерывна на $[a,b] \setminus e$. Значит, для всех $c \in \mathbb{R}$

$$[a,b](f > c) = \widetilde{e} \cup ([a,b] \setminus e)(f > c), \tag{5.52}$$

где $\widetilde{e} \subset e$. В частности, в силу полноты λ_1, $\widetilde{e} \in \mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$ и $\lambda_1(\widetilde{e}) = 0$. По определению непрерывности

$$([a,b] \setminus e)(f > c) = W \cap ([a,b] \setminus e), \tag{5.53}$$

где W открыто в $\mathbb{R}$. Значит, функция f измерима относительно $\mathfrak{U}_{\lambda_1^*}$.

По определению интеграла Римана,

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \inf \sum_k \sup_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k|, \tag{5.54}$$

где инфимум берется по всем разбиениям $[a,b]$ на ячейки $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Заметим, что для каждого такого разбиения

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda_1 = \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} f\,\mathrm{d}\lambda_1 \leqslant \sum_{k=1}^N \sup_{\Delta_k} f \cdot \lambda_1(\Delta_k) = \sum_{k=1}^N \sup_{\Delta_k} f \cdot |\Delta_k|. \tag{5.55}$$

Беря инфимум по всем разбиениям, получаем, что интеграл Лебега не превосходит верхней суммы Дарбу, то есть интеграла Римана.

Аналогичным образом расписывая интеграл Римана через нижние суммы Дарбу, получаем неравенство в другую сторону, а вместе с ним и искомое равенство. ∎

Таким образом, мы показали, что когда интеграл Римана определен, он совпадает с интегралом Лебега. Тем не менее, бывает так, что интеграл Лебега определен, а интеграл Римана — нет.

Пример 5.1. Пусть $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ — функция Дирихле. Эта функция разрывна в каждой точке, а потому $f \notin \mathcal{R}[0,1]$. Тем не менее, очевидно, что f измерима, $f \geqslant 0$, а потому интеграл Лебега от этой функции определен, и его легко посчитать, поскольку эта функция равна единице на множестве меры ноль:

$$\int\limits_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int\limits_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f\,\mathrm{d}\lambda_1 + \int\limits_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f\,\mathrm{d}\lambda_1 = \int\limits_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} 1\,\mathrm{d}\lambda_1 + \int\limits_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} 0\,\mathrm{d}\lambda_1 = 0. \tag{5.56}$$

6 Предельные теоремы

Как и в предыдущих параграфах, мы фиксируем пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Определение. Измеримое множество E имеет *полную меру*, если $\mu(X \setminus E) = 0$. Будем говорить, что некоторое свойство $P(x)$, зависящее от точки $x \in X$ верно *почти всюду* (*почти наверное*, *почти везде*), если множество $\{x \in X : P(x)$ — верно$\}$ имеет полную меру.

В этом определении предполагаем мы подразумеваем, что задана некоторая мера μ. Мы часто будем вместо "почти всюду" говорить "μ-почти всюду".

Определение. Говорят, что последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится к f почти везде на измеримом множестве E, если множество

$$\left\{x \in X : f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\right\}$$

имеет полную меру в E. В этом случае пишут $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e.} f$[10].

Поскольку на $E \setminus e$, где $\mu(e) = 0$, последовательность f_n стремится к f, f измерима на $E \setminus e$. Если мера μ полна, то можно показать, что f измерима на E. Вообще говоря, требовать измеримость f_n тоже необязательно, но мы не будем рассматривать такой случай.

Определение. Будем говорить, что последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится к измеримой функции f по мере μ, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.1}$$

В этом случае пишут $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

[10] a.e. означает almost everywhere.

Утверждение 6.1. Пусть выполнено одно из двух условий:

1. $f_n \to f$ и $f_n \to g$ при $n \to \infty$ почти всюду на X;
2. $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$ при $n \to \infty$ на X.

Тогда $f = g$ почти всюду на X.

Доказательство. Разберем отдельно каждый из двух случаев.

1. Существует такое измеримое E_f, что $f_n \to f$ на E_f, и такое измеримое E_g, что $f_n \to g$ на E_g. Тогда $f = g$ на множестве $E_f \cap E_g$ полной меры.
2. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} g$, то $\forall \varepsilon > 0$
$$\mu(X(|f-g| > \varepsilon)) \leqslant \mu(X(|f-f_n| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2})) + \mu(X(|g-f_n| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2})) \tag{6.2}$$
откуда
$$\mu\big(X\big(|f-g| > \tfrac{1}{k}\big)\big) = 0 \qquad (\forall k \in \mathbb{N}), \tag{6.3}$$
и по непрерывности меры
$$\mu(X(|f-g| > 0) = \lim_{k\to\infty} \mu(X(|f-g| > \tfrac{1}{k})) = 0.$$
что и требовалось. ■

Покажем, что в общем случае сходимость почти всюду и сходимость по мере не следуют друг из друга.

Примеры 6.1.

1. Если $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, то $f_n \to 0$ всюду на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$, но при этом f_n не сходится по мере Лебега.
2. Положим $X = \mathbb{R}$ и $\mu = \lambda_1$. Для каждого $k \geqslant 1$ рассмотрим разбиение интервала $[0,1)$ на интервалы $\Delta(k,p) = [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k})$, где $p \in \{0,1,\ldots,2^k-1\}$. Чтобы определить функцию f_n, представим индекс n в виде $n = 2^k + p$, где $0 \leqslant p < 2^k$, и положим $f_n = \chi_{\Delta(k,p)}$. Тогда $X(f_n \neq 0) = \Delta(k,p)$, а
$$\lambda_1(\Delta(k,p)) = \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{6.4}$$
то есть построенная последовательность по мере сходится к нулю. Тем не менее, последовательность $\{f_n\}$ не имеет предела ни в одной точке $x \in [0,1)$, так как очевидно, что среди значений $f_n(x)$ есть бесконечно много нулей и единиц.

Теорема 6.2 (Лебега). Пусть $\mu(X) < \infty$, последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ стремится к f почти всюду. Тогда $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f_n \geqslant 0$, $f_{n+1} \leqslant f_n$ и $f = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ множества $X_n(\varepsilon) = X(f_n \geqslant \varepsilon)$, как мы уже не раз видели, $X_n(\varepsilon) \supset X_{n+1}(\varepsilon)$. По условию, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n(\varepsilon) = e$, где $\mu(e) = 0$. Так как μ — конечна, то она непрерывна сверху, то есть

$$0 = \mu(e) = \lim_{n\to\infty} \mu(X_n(\varepsilon)).$$

а это и значит, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

В общем случае достаточно вместо f_n и f рассмотреть функции

$$\widetilde{f_n} = \sup_{k\geqslant n} |f_k - f|, \quad \widetilde{f} = 0.$$

Тогда $\widetilde{f_n} \xrightarrow{\mu} \widetilde{f}$, то есть

$$\mu\Big(X\Big(\widetilde{f_n} > \varepsilon\Big)\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.5}$$

Осталось заметить, что $X(|f_n - f| > \varepsilon) \subset X(\widetilde{f_n} > \varepsilon)$, так как $|f_n - f| \leqslant \widetilde{f_n}$. ■

Лемма 6.3 (Борель, Кантелли). [11] Пусть $\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых множеств, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, то есть E состоит из таких точек $x \in X$, что $x \in E_n$ для бесконечного числа индексов n. Если $\sum_{n\geqslant 1} \mu(E_n) < +\infty$, то $\mu(E) = 0$.

Доказательство. Поскольку $E \subset \bigcup_{n\geqslant k} E_n$, имеем

$$\mu(E) \leqslant \sum_{n\geqslant k} \mu(E_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{6.6}$$

так как это хвост сходящегося ряда. ■

С помощью этой леммы можно получить полезный признак сходимости почти всюду.

Следствие 6.4. Пусть $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\{g_n\}$ — последовательность измеримых функций, $X_n = X(|g_n| > \varepsilon_n)$. Если $\sum_{n\geqslant 1} \mu(X_n) < +\infty$, то $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.e.} 0$.

Доказательство. Достаточно для произвольного $\varepsilon > 0$ применить лемму Бореля-Кантелли к множествам $E_n = X(|g_n| > \varepsilon)$, поскольку $E_n \subset X_n$ для достаточно больших n (мы получим, что множество точек, в которых бесконечное число $|g_n|$ больше ε, имеет меру ноль). ■

Теорема 6.5 (Рисса). У любой последовательности измеримых функций $\{f_n\}$, сходящихся по мере к f, можно найти подпоследовательность, сходящуюся почти везде к f.

[11] На лекции это утверждение не было явно выделено, хотя в каком-то виде оно появляется в теореме Рисса. Я решил выписать его отдельно, так как это, во-первых, это именная теорема, а во-вторых, по всей видимости, это утверждение важно в теории вероятностей (по крайней мере, про эту лемму есть целая статья в википедии).

Доказательство. Из сходимости f_n к f следует, что

$$\mu\left(X\left(|f_n - f| > \frac{1}{k}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.7}$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем найти такую подпоследовательность индексов n_k, что

$$\mu\left(X\left(|f_n - f| > \frac{1}{k}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2^k} \tag{6.8}$$

для всех $n \geqslant n_k$. Тогда из следствия 6.4 очевидным образом следует, что функции $g_k = |f_{n_k} - f|$ почти всюду стремятся к нулю для $k \to \infty$, а потому $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{a.e.} f$. ■

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ *почти равномерно сходится* к f на X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое множество A_ε, что $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus A_\varepsilon$ при $n \to \infty$.

Нетрудно понять, что почти равномерная сходимость влечет сходимость почти всюду.

Теорема 6.6 (Егорова). Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, f — измеримые функции, причем $f_n \to f$ почти всюду на X. Тогда если $\mu(X) < \infty$, то f_n сходится к f почти равномерно.

Доказательство. Как в теореме 6.2, можно считать, что $f_n \geqslant 0$, $f_{n+1} \leqslant f_n$ $\forall n$, $f = 0$ почти всюду на X. Так как $\mu(X) < \infty$, то $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. Построим последовательность $\{n_k\}$ как в теореме Рисса. Если $x \in \bigcap_{k=N}^{\infty}\{x : f_{n_k}(x) \leqslant \frac{1}{k}\} = E_n$, то $\forall k \geqslant N$ $0 \leqslant f_{n_k}(x) \leqslant \frac{1}{k}$, а значит $f_{n_k} \rightrightarrows 0$ на E_N. В силу монотонности последовательности f_n, сами $f_n \rightrightarrows 0$. Но $\mu(X \setminus E_n) < \frac{1}{2^{N-1}}$, что и требовалось. ■

Пример 6.2. $\{\chi_{[n,n+1]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ не сходятся по мере. Действительно, если $\chi_{[n,n+1]} \xrightarrow{\lambda_1} f$, то $f \equiv 0$ почти всюду, так как $\forall\{n_k\}$ $\chi_{[n_k,n_k+1]} \to 0$. С другой стороны, если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\mu(\chi_{[n,n+1]}(x) > \frac{1}{2}) = 1 \not\to 0$.

Пример 6.3. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall n$ почти всюду на X, то $|f(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду по μ. Действительно, $\exists\{f_{n_k}\} : f_{n_k} \to f, |f_{n_k}(x)| \leqslant g(x)\ \forall x \in E_{n_k}, \mu(X \setminus E_{n_k}) = 0 \implies |f(x)| \leqslant g(x)\ \forall x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$. Но $\mu\left(X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X \setminus E_{n_k})\right) = 0$.

Теорема 6.7 (Леви, общий случай). Пусть f_n, f — измеримые функции, $f_n \to f$ почти всюду, f_1 — суммируема, $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$ почти всюду для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu. \tag{6.9}$$

Доказательство. Поскольку интеграл не зависит от множеств нулевой меры, можно считать, что $f_n \to f$ и $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$ всюду на X. Теперь применим теорему Леви:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n - f_1) \, d\mu = \int\limits_X (f - f_1) \, d\mu.$$

Осталось сократить на интеграл от f_1 и получить требуемое равенство. ■

Теорема 6.8 (Лебега о мажорированной сходимости). Пусть f_n, f — измеримые функции, такие, что $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ при почти всех $x \in X$ для некоторой суммируемой функции g. Пусть также выполнено хотя бы одно из двух следующих условий:

(a) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на X;

(b) $f_n \to f$ почти всюду на X.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.10}$$

Доказательство. В обоих случаях $|f| \leqslant g$ почти всюду на X. Пусть для начала $\mu(X) < \infty$. Тогда условие (a) слабее условия (b) и можно считать, что (a) выполнено. Найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $\varepsilon > 0$ и $n \geqslant N$ выполнено $\mu(X(|f_n - f| > \varepsilon)) < \varepsilon$. Тогда

$$\left|\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \tag{6.11}$$

$$= \int\limits_{\{x:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\}} \tag{6.12}$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{\{|f_n-f|>\varepsilon\}} g \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X \varepsilon \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.13}$$

Выберем $\eta > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0 : \int\limits_E g \, \mathrm{d}\mu < \eta$ для любого $E \in \mathcal{A} : \mu(E) < \varepsilon$. Так можно сделать по одному из предыдущих утверждений. Продолжим неравенство:

$$2 \int\limits_{\{|f_n-f|>\varepsilon\}} g + \int\limits_X \varepsilon \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2\eta + \mu(X) \cdot \varepsilon \tag{6.14}$$

при больших n. Значит,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant 2\eta + \varepsilon\mu(x) \implies \limsup = 0, \tag{6.15}$$

то есть в этом случае теорема доказана.

Разберем теперь случай, когда $\mu(X) = +\infty$. $\forall \varepsilon > 0$ найдем множество $A = A(\varepsilon) \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty$, $\int\limits_{X\setminus A} g \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$. Тогда

$$\left|\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_A |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{X\setminus A} (2g) \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.16}$$

Левая часть стремится в нулю при $n \to \infty$ по доказанному первому случаю. Второй интеграл $< 2\varepsilon$. ∎

Теорема 6.9 (лемма Фату). Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых неотрицательных функций. Тогда

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.17}$$

Отметим, что это неравенство может быть строгим: если $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, $\mu = \lambda_1$, то оно превращается в $0 < 1$.

Доказательство. Рассмотрим функции $g_n(x) = \inf_{k\geqslant n}(f_k(x))$. Тогда g_n — измеримы, $g_n \geqslant 0$, $g_n \leqslant g_{n+1}$, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \liminf f_n$ всюду на X. По теореме Леви

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.18}$$

С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X g_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu, \tag{6.19}$$

так как $g_n \leqslant f_n$ на X при всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Следствие 6.10. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, — последовательность измеримых неотрицательных почти всюду функций, $f_n \to f$ почти всюду на X, и $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда почти везде $f \geqslant 0$ и $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant c$.

Доказательство. То, что f почти всюду неотрицательна — очевидно, а второе неравенство следует из леммы Фату:

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant c. \tag{6.20}$$

■

Следствие 6.11. Пусть $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < \infty$. Тогда для любого набора $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{|x - x_k|}} \tag{6.21}$$

сходится почти всюду на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Применим предыдущее следствие к частичным суммам

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - x_k|}}. \tag{6.22}$$

Имеем:

$$\int\limits_{-c}^{c} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-c}^{c} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-t|}} \right) \leqslant C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{6.23}$$

а значит

$$\int_{-c}^{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{\sqrt{|x - x_k|}} \, \mathrm{d}\lambda_1 < \infty, \tag{6.24}$$

откуда нетрудно получить, что $f(x)$ конечно почти всюду по мере Лебега на $\mathbb{R}$. ■

7 Интегральные неравенства

Определение. μ — *вероятностная мера* на X, если $\mu(X) = 1$.

Чтобы доказать неравенство Йенсена, нам понадобятся два факта про выпуклые функции, которые не были доказаны в первом семестре.

Лемма 7.1. Если φ выпукла на $\mathbb{R}$, то $\forall x \in \mathbb{R}$ существуют такие $a, b \in \mathbb{R}$, что

$$\varphi(x) = ax + b, \quad \varphi(t) \geqslant at + b \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Для любой тройки чисел $x_1 < x < x_2$ по выпуклости

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} \leqslant \frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x - x_2}, \tag{7.1}$$

а значит определено число

$$c = \inf_{x < x_2} \left\{ \frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x - x_2} \right\}, \tag{7.2}$$

(здесь инфимум берется по x_2, x — фиксировано) и выполнено неравенство

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} \leqslant c \leqslant \frac{\varphi(x) - \varphi(x_2)}{x - x_2}. \tag{7.3}$$

Тогда $\varphi(x_2) - \varphi(x) \geqslant c(x_2 - x)$, то есть

$$\varphi(x_2) \geqslant c(x_2 - x) + \varphi(x) \qquad (\forall x_2 > x). \tag{7.4}$$

Аналогично, $\varphi(x_1) - \varphi(x) \geqslant c(x_1 - x)$, то есть

$$\varphi(x_1) \geqslant c(x_1 - x) + \varphi(x) \qquad (\forall x_1 < x). \tag{7.5}$$

Значит, $\varphi(t) \geqslant c(t - x) + \varphi(x)$ для всех $t \in \mathbb{R}$; при $t = x$ достигается равенство. Константы легко подбираются. ■

Лемма 7.2. Если φ выпукла на $\mathbb{R}$, то $\varphi \in C(\mathbb{R})$.

Доказательство. По доказательству предыдущей леммы для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant c \qquad (\forall x_1 < x_2). \tag{7.6}$$

Значит, если $x_{1,n} \to x_2$ при $n \to \infty$, то

$$\varphi(x_{1,n}) - \varphi(x_2) \geqslant c(x_{1,n} - x_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{7.7}$$

С другой стороны, если $x_0 < x_{1,n} < x_2$, то $\exists \delta_n$:

$$x_{1,n} = \delta_n x_0 + (1 - \delta_n)x_2, \quad \delta_n \to 0, \tag{7.8}$$

тогда

$$\varphi(x_1, n) - \varphi(x_2) \leqslant \delta_n \varphi(x_0) + (1 - \delta_n)\varphi(x_2) - \varphi(x_2) \tag{7.9}$$

$$= \delta_n\big(\varphi(x_0) - \varphi(x_2)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{7.10}$$

Значит, существуют такие последовательности c_n и d_n, что

$$d_n \leqslant \varphi(x_{1,n}) - \varphi(x_2) \leqslant c_n,$$

причем $d_n \to 0$ и $c_n \to 0$ при $n \to \infty$, а значит φ непрерывна слева в точке x_2.

Аналогичным образом доказывается, что φ непрерывна справа в x_2. ∎

Утверждение 7.3 (неравенство Йенсена). Пусть φ — выпуклая функция на $\mathbb{R}$, μ — вероятностная мера на X. Тогда

$$\varphi\left(\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right) \leqslant \int\limits_X \varphi(f) \,\mathrm{d}\mu \tag{7.11}$$

для любой суммируемой (измеримой) функции f.

Доказательство. По лемме 7.1, для некоторых констант a, b выполнено неравенство $\varphi(f(x)) \geqslant af(x) + b$ при любом x. Тогда $\varphi(f) - (af + b) \geqslant 0$ — измеримая функция, так как $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $f : X \to \mathbb{R}$ измерима. Значит, функция $\varphi(f) - (af + b)$ интегрируема, а вместе с ней и функция $\varphi(f)$, так как суммируема функция $af + b$. В частности, определен интеграл $\int_X \varphi(f) \,\mathrm{d}\mu$.

Поскольку f — суммируема,

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = x_0 \in \mathbb{R}. \tag{7.12}$$

Для доказательства самого неравенства нужно еще раз воспользоваться леммой 7.1, на этот раз для точки x_0:

$$\varphi\left(\int\limits_X f(x) \,\mathrm{d}\mu\right) = \varphi(x_0) = ax_0 + b = a\left(\int\limits_X f(x) \,\mathrm{d}\mu\right) + b \tag{7.13}$$

$$= \int\limits_X (af(x) + b) \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X \varphi(f(x)) \,\mathrm{d}\mu \tag{7.14}$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Отметим, что в предпоследнем равенстве мы воспользовались тем, что мера вероятностная, а в последнем переходе второй частью той же леммы. ■

Замечание. Обычное неравенство Йенсена получается, если рассмотреть меру, сосредоточенную на конечном числе точек. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ в этом случае превратится в выпуклую линейную комбинацию точек $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Утверждение 7.4 (неравенство Гельдера). Пусть f, g — измеримые функции на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Тогда

$$\int\limits_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |g|^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{7.15}$$

где $p, q \in [1, +\infty] : 1/p + 1/q = 1$.

Замечание. Если $p = 1,\ q = +\infty$, то последнее неравенство означает, что

$$\int\limits_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sup_{x\in X} |g(x)| \cdot \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{7.16}$$

Доказательство. Если $p = 1,\ q = +\infty$, то неравенство очевидно. Если $p, q \in (1, +\infty)$, то (7.15) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_X \frac{|f|}{A} \cdot \frac{|g|}{B}\,\mathrm{d}\mu \leqslant 1, \tag{7.17}$$

где $A = \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\int_X |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. По неравенству Юнга[12]

$$\int\limits_X \frac{|f|}{A} \cdot \frac{|g|}{B}\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X \frac{|f|^p}{pA^p}\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X \frac{|g|^q}{qB^q}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{7.18}$$

что и требовалось. ■

Утверждение 7.5 (неравенство Минковского). Пусть f, g — измеримые функции на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Тогда при $p \in [1, +\infty]$

$$\left(\int\limits_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7.19}$$

Доказательство. Если $p = +\infty$, то неравенство переписывается как

$$\sup_X |f+g| \leqslant \sup_X |f| + \sup_X |g|, \tag{7.20}$$

[12] То есть $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, если $a, b \geqslant 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ при $p, q > 1$.

и оно очевидно. Если $p = 1$, то (7.19) имеет вид

$$\int\limits_X |f+g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X |g|\,\mathrm{d}\mu, \tag{7.21}$$

что мы тоже уже доказывали.

Наконец, рассмотрим случай $p \in (1, +\infty)$:

$$\int\limits_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X |g|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \tag{7.22}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int\limits_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \tag{7.23}$$

$$= \left[\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \implies (p-1)q = p\right] \tag{7.24}$$

$$= \left(\left(\int\limits_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_X |g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int\limits_X |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{7.25}$$

после чего остается лишь сократить на правый множитель. Здесь в (7.23) мы дважды воспользовались неравенством Гельдера. ■

Следствие 7.6. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — комплексные числа. Тогда

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2}. \tag{7.26}$$

Доказательство. Действительно, возьмем меру $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$, определим

$$f(x) = \begin{cases} a_k, & x = k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} b_k, & x = k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Осталось лишь применить неравенство Минковского для $p = 2, X = \mathbb{R}$. ■

8 Пространство Лебега $L^p(X,\mu)$

Определение. Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ — пространство с мерой, f — измеримая функция на X. Определим

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X,\mu)} = \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

если $p \in (1,+\infty)$, и

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_X |f|$$

где

$$\operatorname{ess\,sup}_X f = \inf\left\{c \in [-\infty,+\infty] : f(x) \leqslant c \ \mu\text{-почти всюду на } X\right\}$$

– *существенный*[13] *супремум*. Аналогично,

$$\operatorname{ess\,inf}_X f = \sup\left\{c \in [-\infty,+\infty] : f(x) \geqslant c \ \mu\text{-почти всюду на } X\right\}.$$

Определение. $L^p(X,\mu)$ — это множество измеримых функций f, удовлетворяющих условию $\|f\|_p < \infty$, профакторизованное по отношению эквивалентности $\sim$: $f \sim g$, если $f = g$ почти всюду по μ. Таким образом, $L^p(X,\mu)$ — линейное нормированное пространство, состоящее из классов эквивалентности функций.

Замечание. Запись $f \in L^p(X,\mu)$ будет означать, что мы выбираем представителя некоторого класса эквивалентности $[f]$.

Лемма 8.1. $L^p(X,\mu)$ — линейное нормированное пространство.

Доказательство. При $p \in [1,+\infty]$ неравенство Минковского гарантирует, что если $f,g \in L^p(X,\mu)$, то $\alpha f + \beta g \in L^p(X,\mu)$ и $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. По определению, если $\alpha \in \mathbb{C}$, то $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$.

Если $\|f\|_p = 0$, то $\int\limits_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0$ то есть $f = 0$ μ-почти всюду, а значит $f = 0$ в $L^p(X,\mu)$. Таким образом, $L^p(X,\mu)$ — линейное нормированное пространство.

При $p = \infty$ аналогичные факты из следуют из следующего утверждения: для любой измеримой функции f достигается инфимум в определении $\operatorname{ess\,sup} f$. Действительно, если $\operatorname{ess\,sup} f = \pm\infty$, то $c = \pm\infty$, если же $\operatorname{ess\,sup} f \in \mathbb{R}$, то $\exists X_n \in \mathcal{A} : \mu(X \setminus X_n) = 0$, $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup} f + \frac{1}{n}$ $\forall x \in X_n$. Тогда $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup} f$ на $\bigcap_{n=1}^\infty X_n$, а

$$\mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty X_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus X_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu(X \setminus X_n) = 0.$$

■

Лемма 8.2. Если X — линейное нормированное пространство с нормой $\|\ \|$, то следующие утверждения равносильны:

[13] essential

1. X — полное;
2. $\forall\{x_n\}\subset X : \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty\ \exists x\in X$:

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{N}x_k-x\right\|=0.$$

(X — полно тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд сходится в X).

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Обозначим $y_n:=\sum_{n=1}^{N}x_n$. Тогда $\{y_n\}$ — последовательность Коши:

$$\|y_N-y_M\|\leqslant\sum_{k=N+1}^{M}\|x_k\|\to 0\quad\text{при}\quad N\to\infty,\ M\to\infty. \tag{8.1}$$

Тогда $\exists x\in X : y_n\to x$ в $X \iff \|y_n-x\|\to 0$, а это и есть (2).

$\Longleftarrow$ Пусть $\{y_n\}$ — последовательность Коши, выберем у нее подпоследовательность $\{y_{n_k}\} : \|y_{n_k}-y_{n_{k+1}}\|\leqslant\frac{1}{2^k}\ \forall k\in\mathbb{N}$. Найдем $x_1,x_2,\dots$ такие, что

$$\begin{aligned}y_{n_1}&=x_1,\\ y_{n_2}&=x_1+x_2,\\ y_{n_3}&=x_1+x_2+x_3,\end{aligned}$$

и так далее. Очевидно, $x_k=y_{n_k}-y_{n_{k-1}}$ при $k\geqslant 2$, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\|y_{n_1}\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}<\infty.$$

Значит $\exists x\in X : \left\|\sum_{k=1}^{N}x_k-x\right\|\to 0$ при $N\to\infty \iff y_{n_N}\to x$ в $X \Longrightarrow$ последовательность $\{y_{n_k}\}$ сходится в X к $x \Longrightarrow \{y_n\}$ сходится. ■

Теорема 8.3. $L^p(X,\mu)$ — полное линейное нормированное пространство.

Доказательство. Рассмотрим $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset L^p(X,\mu)$. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ сходится в $L^p(X,\mu)$.

$$\left(\int_X\liminf_{k\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}|f_k(x)|\right)^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant[\text{лемма Фату}] \tag{8.2}$$

$$\leqslant\liminf_{n\to\infty}\left(\int_X\sum_{k=1}^{N}|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{8.3}$$

$$\leqslant\liminf_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\|f_k\|_p \tag{8.4}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p, \tag{8.5}$$

а значит функция $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ лежит в $L^p(\mu)$. Значит ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ сходится μ-почти всюду на X. $f(x)$ — измерима, $\left(\int\limits_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Рассмотрим теперь случай $p = +\infty$. Если $f_k \in L^\infty(\mu) : \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty$, то $X_k \in \mathcal{A}$ — множество полной меры. $|f_k(x)| \leqslant c_k$ на X_k $\forall k$, где $\sum c_k < \infty \implies |\sum f_k(x)| \leqslant \sum c_k$ на $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ — множестве полной меры. ■

Теорема 8.4. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, S — множество функций, лежащих в $L^p(X,\mu)$ (при $p < \infty$ такие функции имеют вид $\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{A_k}$, $\mu(A_k) < \infty$). Тогда S — плотное подмножество в $L^p(X,\mu)$.

Доказательство. Если $p = \infty$, то утверждение следует из доказательства теоремы об аппроксимации простыми функциями.

Если $1 \leqslant p < \infty$, то достаточно аппроксимировать любую неотрицательную функцию в $L^p(X,\mu)$, так как произвольная функция — это линейная комбинация неотрицательных (так как $f \in L^p(X,\mu) \implies f_\pm \in L^p(X,\mu)$). Если же $f \geqslant 0$, то по теореме об аппроксимации существуют $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ — простые, такие, что $\varphi_n \to f$ μ-почти всюду. В частности,

$$\int\limits_X (\varphi_n)^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X (f)^p \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

откуда $\varphi \in S$. Так как $|\varphi_n - f|^p \leqslant 2^p \cdot |f|^p$, по теореме Лебега о мажорированной сходимости $\int\limits_X |\varphi_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, S плотно в $L^p(X,\mu)$. ■

Определение. Пусть X — топологическое пространство, μ — борелевская мера на X. μ называется *регулярной*, если для любого борелевского множества $A \subset X$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A,\ U \text{ — открыто}\},$$
$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subset A,\ C \text{ — компакт}\}.$$

Замечание. Если μ — борелевская и конечная, то μ — регулярна, если для любого борелевского A и любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество U и компакт C такие, что $C \subset A \subset U$, $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$.

Теорема 8.5. Пусть K — метрический компакт, μ — конечная борелевская мера на K. Тогда μ — регулярна.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$, состоящее из борелевских множеств A таких, что $\forall \varepsilon > 0$ существует открытое U и замкнутое C[14], такие, что

$$C \subset A \subset U, \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \mu(A \setminus C) < \varepsilon.$$

[14]То есть C — компакт.

Заметим, что если A — замкнуто, то

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in K : \operatorname{dist}(x, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Поскольку $\mu(K) < \infty$, по непрерывности μ сверху выполнено

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu \left\{ x \in K : \operatorname{dist}(x, A) < \frac{1}{n} \right\},$$

а значит $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\mu(U_N \setminus A) < \varepsilon, \quad \text{где} \quad U_N = \left\{ x \in K : \operatorname{dist}(x, A) < \frac{1}{N} \right\}.$$

U_N — открыто, так как

$$U_N = \bigcup_{\xi \in A} B\left(\xi, \frac{1}{N}\right).$$

В качестве C можно взять $C = A$, а потому замкнутые множества лежат в $\mathcal{A}$.

По построению, $A \in \mathcal{A} \iff K \setminus A \in \mathcal{A}$. Пусть теперь $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, покажем, что объединение этого набора тоже лежит в $\mathcal{A}$. Найдем множества U_k, C_k, такие, что C_k — замкнуто, U_k — открыто,

$$\mu(U_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \mu(E_k \setminus C_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Положим

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad U := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Очевидно, что U — открыто, причем

$$\mu(U \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(U_k \setminus E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Так как $\mu(K) < \infty$, имеем

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} C_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right),$$

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \setminus C_k) \leqslant \varepsilon,$$

а потому найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} C_k\right) \leqslant 2\varepsilon.$$

Значит можно взять $C = \bigcup_{k=1}^N C_k$.

Таким образом, $\mathcal{A}$ — это σ-алгебра, содержащая все замкнутые множества (а значит и все открытые множества), то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(K) \implies \mathcal{A} = \mathcal{B}(K)$. ■

Теорема 8.6. Пусть (X,ρ) — полное сепарабельное[15] метрическое пространство, μ — конечная борелевская мера на X. Тогда μ регулярна.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{B}(X)$, $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ — счетное всюду плотное подмножество в X. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$X = \bigcup_{k=1}^\infty B\left[\xi_k, \frac{1}{n}\right], \quad \text{где} \quad B\left[\xi_k, \frac{1}{n}\right] = \left\{x \in X : \exists k \in \mathbb{N}\ \rho(x,\xi_k) \leqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Значит, $\forall n \in \mathbb{N}$ можем выбрать такое $m_n \in \mathbb{N}$, что

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{m_n} B\left[\xi_k, \frac{1}{n}\right]\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Рассмотрим множество

$$K := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{m_n} B\left[\xi_k, \frac{1}{n}\right].$$

Очевидно, что оно замкнуто. В K для любого n есть конечная $\varepsilon/2^n$-сеть $(\xi_1,\dots,\xi_{m_n})$, а потому K — компакт.[16]

Рассмотрим $A' = A \cap K$ и применим предыдущую теорему к пространству (K,ρ) и мере $\widetilde{\mu}\colon E \mapsto \mu(E)$ на $\mathcal{B}(K)$. Значит существует C — компакт: $C \subset A'$ и $\mu(A' \setminus C) < \varepsilon$. Тогда

$$\mu(A \setminus C) \leqslant \mu(A \setminus A') + \varepsilon \tag{8.6}$$

$$= \mu\left(A \setminus \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{m_n} B\left[\xi_k, \frac{1}{n}\right]\right) + \varepsilon \tag{8.7}$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{m_n} B\left[\xi_k, \frac{1}{n}\right]\right)\right) + \varepsilon \tag{8.8}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon. \tag{8.9}$$

Для того, чтобы аппроксимировать A сверху открытым множеством, найдем $\widetilde{C}$ — компакт, такой, что $\widetilde{C} \subset X \setminus A$ и $\mu((X \setminus A) \setminus \widetilde{C}) < \varepsilon$. Но тогда $\mu\big((X \setminus \widetilde{C}) \setminus A\big) < \varepsilon$, а потому можно взять множество $U = X \setminus \widetilde{C}$, которое открыто как дополнение замкнуто. ■

Теорема 8.7. Пусть X — полное сепарабельное локально компактное [17] метрическое пространство, μ — борелевская мера на X, $C_0(X)$ — множество непрерывных функций

[15] Содержащее счетное всюду плотное подмножество.

[16] Здесь мы пользуемся полнотой пространства X.

[17] То есть у любой точки есть такая окрестность, что ее замыкание компактно.

на X с компактным носителем. Если $\mu(C) < \infty$ для любого компакта C в X, то $C_0(X)$ всюду плотно в $L^p(X, \mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Так как простые функции плотны в $L^p(X, \mu)$, достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \forall A \in \mathcal{B}(X) : \mu(A) < \infty\ \exists \varphi \in C_0(X)$:

$$\left(\int\limits_X |\chi_A - \varphi|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Рассмотрим меру $\nu \colon E \mapsto \mu(E \cap A)$. Тогда ν — конечная мера на X, а значит существует C — компакт, такой, что $\nu(A \setminus C) < \varepsilon$ и $C \subset A$. Рассмотрим множества

$$U_n := \bigcup_{x \in C} B\bigl(x, r_n(x)\bigr),$$

где $r_n(x) \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : B[x, r_n(x)]$ — компакт. Так как C — компакт, существует набор таких точек $\{x_1, \ldots, x_{m_n}\}$, что $C \subset U'_n$[18], где

$$U'_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} B\bigl(x_k, r_n(x_k)\bigr).$$

Тогда $\overline{U'_n}$ — компакт. Возьмем теперь

$$U''_n = \bigcap_{k=1}^{n} U'_k.$$

Поскольку мера μ непрерывна сверху на $\overline{U''_1}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U''_n} = C$, $\overline{U''_{n+1}} \subset \overline{U''_n}$,
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \mu(\overline{U'_n} \setminus C) < \varepsilon$.

Значит $C \subset U''_n \subset \overline{U''_n}$, то есть C и $X \setminus U''_{n_0}$ — замкнутые непересекающиеся множества, а значит $\exists \varphi \leqslant 1$ на X, $\varphi \in C(X)$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in C, \\ 0, & x \in X \setminus U''_{n_0}. \end{cases}$$

$\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{U''_{n_0}}$ — компакт, значит $\varphi \in C_0(X)$,

$$\int\limits_X |\chi_A - \varphi|^p \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\overline{U''_{n_0}} \setminus C} |\chi_A - \varphi|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \mu\left(\overline{U''_{n_0}} \setminus C\right) = 2^p \varepsilon.$$

∎

Утверждение 8.8. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda_1)\ \forall t \in \mathbb{R}$ обозначим

[18] Здесь и далее я заменил для читабельности волны на штрихи, как было на лекции.

$f_t\colon x \mapsto f(x-t)$. Тогда
$$\lim_{t\to 0} \|f - f_t\|_{L^p(\mathbb{R},\lambda_1)} = 0.$$
Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0(\mathbb{R}) : \|f-\varphi\|_p < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - f_t\|_p &\leqslant \|f-\varphi\|_p + \|\varphi - \varphi_t\|_p + \|\varphi_t - f_t\|_p && (8.10)\\ &< \varepsilon + \|\varphi - \varphi_t\|_p + \varepsilon, && (8.11)\end{aligned}$$

причем
$$\|\varphi - \varphi_t\|_p \leqslant \lambda_1(\operatorname{supp}(\varphi-\varphi_t)) \cdot \|\varphi-\varphi_t\|_\infty \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$
(8.11) — инвариантность относительно сдвига для λ_1 будет позже. ■

9 Теоремы Тонелли и Фубини

В этом параграфе по умолчанию X, Y — множества, $\mathfrak{A} \subset 2^X$, $\mathfrak{B} \subset 2^Y$ — σ-алгебры.

Определение. Обозначим через $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ наименьшую σ-алгебру, содержащую
$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}.$$

Замечание. Мы уже доказывали, что $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — полукольцо.

Определение. Пусть $E \subset X \times Y$, определим
$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x,y) \in E\},\\ E^y &:= \{x \in X : (x,y) \in E\}\end{aligned}$$
— сечения E, соответствующие $x \in X$ и $y \in Y$ соотвественно.

Утверждение 9.1. Для любых $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $E_x \in \mathfrak{B}$, $E^y \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Обозначим
$$\mathfrak{L} := \{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} : E_x \in \mathfrak{B},\ E^y \in \mathfrak{A}\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{L}$ — σ-алгебра. Если $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathfrak{L}$, то
$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right)_x &= \bigcup_{k=1}^\infty (E_k)_x \in \mathfrak{B},\\ \left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right)^y &= \bigcup_{k=1}^\infty (E_k)^y \in \mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Если же $E \in \mathfrak{L}$, то нетрудно проверить, что $(E^c)_x = (E_x)^c$, $(E^c)^y = (E^y)^c$. Осталось заметить, что для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$
$$(A\times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A,\\ \varnothing, & x \notin A,\end{cases} \qquad (A \times B)^y = \begin{cases} A, & y \in B,\\ \varnothing, & y \notin B,\end{cases}$$

то есть $A \times B \in \mathfrak{L}$, а значит $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. ■

Утверждение 9.2. Пусть $\mathfrak{A} \subset 2^X$, $\mathfrak{B} \subset 2^Y$ — σ-алгебры, μ — σ-конечная мера на $\mathfrak{A}$, ν — σ-конечная мера на $\mathfrak{B}$. Тогда функция множества

$$\varphi\colon A \times B \mapsto \mu(A)\,\nu(B), \quad \text{где} \quad A \times B \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},$$

счетно-аддитивна на полукольце $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, и единственным образом продолжается на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Доказательство. Если $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$, то

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k\times B_k}(x,y). \tag{9.1}$$

Проинтегрируем это равенство по μ и воспользуемся теоремой Леви:

$$\int\limits_X \chi_A(x)\chi_B(y)\,\mathrm{d}\mu = \chi_B(y)\int\limits_X \chi_A(x)\,\mathrm{d}\mu = \chi_B(y)\,\mu(A), \tag{9.2}$$

$$\int\limits_X \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k\times B_k}(x,y) = \int\limits_X \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \chi_{A_k\times B_k}(x,y)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{N} \chi_{A_k\times B_k}(x,y)\,\mathrm{d}\mu \tag{9.3}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_X \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\chi_{B_k}(y). \tag{9.4}$$

После интегрирования по ν получаем равенство

$$\mu(A)\,\nu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,\nu(B_k), \tag{9.5}$$

то есть счетную аддитивность функции φ. Вторая часть утверждения следует из теоремы Каратеодори. ■

Определение. Пусть $\mathfrak{A} \subset 2^X$, $\mathfrak{B} \subset 2^Y$ — σ-алгебры, μ, ν — σ-конечные меры на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. *Произведением мер* $\mu \times \nu$ будем называть стандартное продолжение счетно-аддитивной функции $A \times B \mapsto \mu(A)\,\nu(B)$ полукольца прямоугольников $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на σ-алгебру $\mathfrak{U}$.

Замечание. $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ “почти всегда” не совпадает $\mathfrak{U}$. А именно, если существует непустое множество $E \in \mathfrak{A}$ нулевой меры, а $B \in 2^Y \setminus \mathfrak{B}$, то $E \times B \in \mathfrak{U}$, так как $\mu \times \nu$ — полная мера, $E \times B \subset E \times Y$, и последнее множество имеет меру ноль. При этом по утверждению 9.1 $E \times B \notin \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, так как в противном случае $(E \times B)_x = B \in \mathfrak{B}$ для любого $x \in E$, что невозможно по определению B.

Определение. *Мера Лебега* на $\mathbb{R}^m$ — это произведение

$$\lambda_m := \underbrace{\lambda_1 \times \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1}_{m\ \text{раз}}.$$

Упражнение. Произведение мер ассоциативно.

Упражнение. $\underbrace{\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})}_{n \text{ раз}} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 9.3. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо,

$$\mathfrak{A} = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^{N} P_k : P_k \in \mathcal{P} \right\}.$$

Тогда $\mathfrak{A}$ — алгебра.

Доказательство. Очевидно, что $\varnothing$, $X \in \mathfrak{A}$. Пересечение элементов $\mathfrak{A}$ — элемент $\mathfrak{A}$, так как

$$\left(\bigsqcup_{k=1}^{N} P_k \right) \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j \right) = \bigsqcup_{k,j} P_k \cap Q_j,$$

Кроме того,

$$\left(X \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} P_k \right) = \bigcap_{k=1}^{N} (X \setminus P_k),$$

а каждый элемент вида $X \setminus P_k$ по определению полукольца представляется как дизъюнктное объединение конечного числа множеств. ■

Определение. Семейство $C \subset 2^X$ называется *монотонным классом*, если объединение любой возрастающей последовательности множеств из C и пересечение любой убывающей последовательности множеств из C лежат в C, то есть:

$$\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C : P_k \subset P_{k+1} \; \forall k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \in C,$$

$$\{Q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C : Q_k \supset Q_{k+1} \; \forall k \in \mathbb{N} \implies \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \in C.$$

Очевидно, что пересечение произвольного набора монотонных классов — монотонный класс.

Определение. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$. Монотонным классом, порожденным $\mathcal{E}$, называется минимальный монотонный класс C, содержащий $\mathcal{E}$. Он существует всегда, так как 2^X — монотонный класс.

Лемма 9.4 (о монотонном классе). Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра в X, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{A}$, C — монотонный класс, порожденный $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{B} = C$.

Доказательство. По определению σ-алгебры, $\mathfrak{B}$ — монотонный класс, а потому $\mathfrak{B} \supset C$. Достаточно доказать, что C — σ-алгебра. Для произвольного $E \in C$ рассмотрим множество

$$C(E) := \{F \in C : E \cap F,\ E \setminus F,\ F \setminus E \in C\}.$$

Тогда:

1. $C(E)$ — монотонный класс.

2. $E \in C(F) \iff F \in C(E)$ — очевидно из симметричности определения $C(E)$.

3. Если $E \in \mathfrak{A}$, то $C \subset C(E)$. Действительно, пусть $F \in \mathfrak{A}$. Тогда $F \in C(E)$, так как $\mathfrak{A}$ — алгебра, содержащаяся в C. Таким образом, $\mathfrak{A} \subset C(E)$, а значит $C \subset C(E)$, поскольку $C(E)$ — монотонный класс, а C минимально.

4. Если $F \in C$, то $C \subset C(F)$. По предыдущему пункту для $E \in \mathfrak{A}$ имеем $F \in C(E)$, что по (2) эквивалентно $E \in C(F)$. Значит, $\mathfrak{A} \subset C(F)$, откуда (аналогично предыдущему пункту) следует, что $C \subset C(F)$.

Таким образом, если $F, G \in C$, то $G \in C(F)$, то есть $G \cap F$, $G \setminus F$ и $F \setminus G \in C$. Мы показали, что C — алгебра.

Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C$, то

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{N} E_k \right) \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in C,$$

так как C — монотонный класс. Значит, C — σ-алгебра. ■

Теорема 9.5 (принцип Кавальери). Пусть μ, ν — конечные меры на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Тогда:

(1) отображение $x \mapsto \nu(E_x)$ измеримо относительно $\mathfrak{A}$;

(2) отображение $y \mapsto \mu(E^y)$ измеримо относительно $\mathfrak{B}$;

(3) выполнено равенство

$$(\mu \times \nu)(E) = \int\limits_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y). \tag{9.6}$$

Доказательство.

1. Покажем, что условия (1) — (3) выполняются на полукольце $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Пусть $E = A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$E_x = (A \times B)_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \varnothing, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

В частности,

$$\nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B), & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A, \end{cases} = \nu(B)\chi_A, \tag{9.7}$$

то есть $x \mapsto \nu(E_x)$ — измеримая относительно $\mathfrak{A}$ функция, и

$$\int\limits_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_X \nu(B)\chi_A(x)\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(A \times B). \tag{9.8}$$

Доказательство для $y \mapsto \mu(E^y)$ аналогично.

2. Перейдем к общему случаю. Пусть C — множество элементов $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, удовлетворяющих условию теоремы. Покажем, что C — монотонный класс. Если $\{E_k\}_{k\geqslant 1} \subset C$, $E_i \subset E_{i+1}$, то $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, $E_x \in \mathfrak{B}$ (по утверждению 9.1), а потому определена функция

$$\nu(E_x) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x\right) = \lim_{k\to\infty} \nu((E_k)_x).$$

Она измерима относительно $\mathfrak{A}$ как предел измеримых функций. При проверке условия (3) мы можем использовать теорему Леви, так как меры неотрицательны, а последовательность множеств возрастает:

$$(\mu \times \nu)\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} (\mu \times \nu)(E_k) = \lim_{k\to\infty} \int_X \nu((E_k)_x)\, \mathrm{d}\mu(x) \tag{9.9}$$

$$= \int_X \lim_{k\to\infty} \nu((E_k)_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(E_x)\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{9.10}$$

(формула с интегрированием по Y доказывается так же).

Доказательство того, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in C$ для любой убывающей последовательности $\{E_k\}$ аналогично, но надо использовать конечность ν в равенстве

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(E_k), \tag{9.11}$$

а вместо теоремы Леви теорему Лебега о мажорированной сходимости с мажорантой, тождественно равной $\nu(Y)$.

3. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \left\{ \bigsqcup_{k=1}^{N} (A_k \times B_k) \;\middle|\; A_k \times B_k \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B},\ N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Поскольку $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — полукольцо, $\mathfrak{M}$ — алгебра (лемма 9.3). Покажем, что $\mathfrak{M} \subset C$. Если $E \in \mathfrak{M}$, то нетрудно проверить, что

$$E_x = \left(\bigsqcup_{i=1}^{N} (A_k \times B_k)\right)_x = \bigsqcup_{i=1}^{N} (A_k \times B_k)_x. \tag{9.12}$$

Значит, функция

$$\nu(E_x) = \sum_{i=1}^{N} \nu\big((A_k \times B_k)_x\big) \tag{9.13}$$

измерима как сумма измеримых функций. Пользуясь тем, что свойство (3) доказано на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, получаем

$$(\mu \times \nu)\left(\bigsqcup_{k=1}^{N} (A_k \times B_k)\right) = \sum_{k=1}^{N} (\mu \times \nu)(A_k \times B_k) \tag{9.14}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_X \nu\big((A_k \times B_k)_x\big)\, \mathrm{d}\mu(x) \tag{9.15}$$

$$= \int_X \sum_{k=1}^{N} \nu\big((A_k \times B_k)_x\big)\, \mathrm{d}\mu(x) \tag{9.16}$$

$$= \int_X \nu\left(\bigsqcup_{k=1}^{N} (A_k \times B_k)_x\right) \mathrm{d}\mu(x). \tag{9.17}$$

Таким образом, $\mathfrak{M} \subset C$.

4. Мы получили, что $\mathfrak{M} \subset C$, где $\mathfrak{M}$ — алгебра, а C — монотонный класс. По лемме о монотонном классе отсюда следует, что $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset C$, то есть для любого $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ выполнено утверждение теоремы. ■

Определение. Если $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то будем называть функцию $h\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримой *в широком смысле*, если существует такое измеримое множество e меры ноль, что h измерима на $X \setminus e$. В этом случае интеграл h определяется следующим образом:

$$\int_X h \, \mathrm{d}\mu := \int_{X \setminus e} h \, \mathrm{d}\mu.$$

Обозначение. Пусть f — функция, определенная на множестве $C \subset X \times Y$. Тогда, фиксируя x или y, мы можем определить сечения f: $f_x(y) = f(x, y)$ на C_x и $f^y(x) = f(x, y)$ на C^y.

Теорема 9.6 (Тонелли). Пусть μ, ν — σ-конечные полные меры на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}$ — алгебра, на которой задана мера $\mu \times \nu$. Тогда для любой измеримой относительно $\mathfrak{U}$ функции $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

(1) при μ-почти всех $x \in X$ измерима функция f_x;

(1') при ν-почти всех $y \in Y$ измерима функция f^y;

(2) функция

$$x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu = \int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y)$$

измерима на X в широком смысле;

(2') функция

$$x \mapsto \psi(x) = \int_X f^y \, \mathrm{d}\mu = \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

измерима на Y в широком смысле;

(3) имеет место равенство

$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_X \varphi\,\mathrm{d}\mu; \tag{9.18}$$

(3') имеет место равенство

$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_Y \psi\,\mathrm{d}\nu. \tag{9.19}$$

Равенства в пунктах (3) и (3') можно записать в виде

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_X \left[\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right]\mathrm{d}\mu(x) \tag{9.20}$$

$$= \int\limits_Y \left[\int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\nu(y). \tag{9.21}$$

Доказательство. Будем постепенно доказывать утверждение для более и более широкого класса функций. Во всех пунктах, кроме последнего, меры μ и ν конечны (иначе мы не можем пользоваться принципом Кавальери). Также опускаются доказательства пунктов (1'), (2') и (3'), так как они аналогичны пунктам (1), (2) и (3).

(a) Пусть $f = \chi_E$, где $E \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Тогда нетрудно видеть, что $f_x = \chi_{E_x}$ для всех $x \in X$. Так как E_x измеримо, отсюда следует, что f_x измеримо. По предыдущей теореме отображение

$$x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y \chi_{E_x}\,\mathrm{d}\nu(x) = \nu(E_x) \tag{9.22}$$

измеримо, и

$$\int\limits_{X\times Y} \chi_E\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(E) = \int\limits_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{9.23}$$

Таким образом, в этом случае все доказано.

(b) Пусть теперь $f = \chi_e$, где $e \in \mathfrak{U}$ и $(\mu\times\nu)(e) = 0$. В этом случае существует такое множество $E \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, что $e \subset E$ и $(\mu\times\nu)(E) = 0$ (так как $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ — борелевская оболочка полукольца $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$). По пункту (a)

$$0 = (\mu\times\nu)(E) = \int\limits_{X\times Y} \chi_E\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{9.24}$$

Значит, $\nu(E_x) = 0$ при почти всех $x \in X$, откуда, из полноты меры ν следует, что $e_x \subset E_x$ измеримо при почти всех $x \in X$. Соотвественно, функция $f_x = \chi_{e_x}$ измерима почти везде. Отображение $x \mapsto \varphi(x) = \nu(e_x)$ измеримо почти для всех

$x \in X$ и равно нулю при таких x (то есть измерима в широком смысле и почти всюду равна нулю). В частности, ее можно проинтегрировать и получить ноль:

$$\int\limits_{X\times Y} \chi_E \,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = 0 = \int\limits_X \nu(e_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

(c) Наконец, мы можем доказать теорему для произвольной $\mathfrak{U}$-измеримой характеристической функции: если $f = \chi_E$, где $E \in \mathfrak{U}$, то $\chi_E = \chi_F + \chi_e$ для некоторого $F \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ и множества $e \in \mathfrak{U}$ меры ноль. Далее остается воспользоваться тем, что сумма измеримых функций — измерима, аддитивностью интеграла, аддитивностью меры, и аддитивностью операции взятия сечения. По аналогичным причинам мы можем считать, что утверждение доказано для простых функций.

(d) Предположим, что μ и ν — конечные меры, и докажем утверждение для произвольной неотрицательной измеримой функции f. Пусть $\{f_n\}$ — набор возрастающих неотрицательных простых функций, стремящихся к f на $X\times Y$. Поскольку $f_x = \lim_{n\to\infty}(f_n)_x$, отображение f_x измеримо для почти всех $x \in X$. Функции

$$\varphi_n(x) = \int\limits_Y (f_n)_x\,\mathrm{d}\nu(y) \tag{9.25}$$

измеримы в широком смысле по пункту (c). Поскольку $(f_n)_x \leqslant (f_{n+1})_x$, по теореме Леви получаем равенство (на некотором подмножестве X полной меры)

$$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x). \tag{9.26}$$

Отсюда следует измеримость отображения $x \mapsto \varphi(x)$ в широком смысле. Очевидно, что $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$, а потому можем еще раз воспользоваться теоремой Леви:

$$\int\limits_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{X\times Y} f_n(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) \tag{9.27}$$

$$= \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu). \tag{9.28}$$

(e) Наконец, пусть μ,ν — σ-конечные меры. Тогда $X\times Y = \bigcup_{j=1}^{\infty}(X_j\times Y_j)$, где $X_j \subset X_{j+1}$, $Y_j \subset Y_{j+1}$, и все множества X_i и Y_j имеют конечную меру;

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) = \int\limits_{X\times Y} \lim_{j\to\infty}\chi_{X_j\times Y_j}(x,y)\cdot f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) \tag{9.29}$$

$$= \lim_{j\to\infty}\int\limits_{X_j\times Y_j} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) \tag{9.30}$$

$$= \lim_{j\to\infty}\int\limits_{Y_j}\int\limits_{X_j} f\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X\int\limits_Y f\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\mu. \tag{9.31}$$

Здесь в последнем неравенстве дважды используется теорема Леви (последовательность интегралов неотрицательной функции по возрастающим множествам). ■

Заменив неотрицательность на суммируемость, можно получить аналогичную теорему:

Теорема 9.7 (Фубини). Пусть μ, ν — σ-конечные полные меры на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}$ — алгебра, на которой задана мера $\mu\times\nu$. Тогда для любой измеримой и суммируемой относительно $\mu\times\nu$ функции $f\colon X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ выполнено:

(1) при μ-почти всех $x\in X$ измерима функция f_x;

(1') при ν-почти всех $y\in Y$ измерима функция f^y;

(2) функция
$$x\mapsto\varphi(x)=\int\limits_Y f_x\,\mathrm{d}\nu=\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$
измерима на X в широком смысле;

(2') функция
$$x\mapsto\psi(x)=\int\limits_X f^y\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
измерима на Y в широком смысле;

(3) имеет место равенство
$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\limits_X\varphi\,\mathrm{d}\mu;\tag{9.32}$$

(3') имеет место равенство
$$\int\limits_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\limits_Y\psi\,\mathrm{d}\nu.\tag{9.33}$$

Доказательство. Рассмотрим функции f_+ и f_- и применим к ним теорему Тонелли:
$$\int\limits_{X\times Y} f_\pm\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f_\pm(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x)<\infty.\tag{9.34}$$

По этой же теореме функции $(f_\pm)_x$ измеримы при почти всех x; а отображения
$$x\mapsto\varphi_+(x)=\int\limits_Y f_+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y),\qquad x\mapsto\varphi_-(x)=\int\limits_Y f_-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

измеримы в широком смысле. Из (9.34) следует, что функции $\varphi_\pm(x)$ суммируемы и конечны для почти всех $x\in X$. В свою очередь, из этого следует, что $f_\pm$ суммируемы при почти всех $y \in Y$. Теперь, для доказательства пунктов (1) и (2) остается написать $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x$ и $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ соответственно; а для доказательства пункта (3) взять разность равенств (9.34) и применить соотношения выше. ■

Пример 9.1. С помощью доказанных теорем можно, например, посчитать интеграл Эйлера – Пуассона:

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{9.35}$$

Для этого посчитаем квадрат этого интеграла:

$$I^2 = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{9.36}$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\left(\int\limits_0^\infty xe^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty xe^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \tag{9.37}$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty xe^{-(t^2+1)x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2(t^2+1)}e^{(-t^2+1)x^2}\Bigg|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{2(t^2+1)}\right] \tag{9.38}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{9.39}$$

Здесь в первом равенстве (9.38) использована теорема Тонелли.

10 Замена переменной в интеграле Лебега

Покажем, что при действии непрерывно-дифференцируемого отображения измеримость (по Лебегу) сохраняется. Для этого нам понадобится несколько вспомогательных фактов.

Теорема 10.1. Для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^m$ и $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество G, что $G \supset E$ и $\lambda_m(G \setminus E) < \varepsilon$.[19]

Доказательство. Пусть $\lambda_m(E) < +\infty$. Тогда по определению меры Лебега можно найти такие ячейки $P_n = [a_n, b_n)$, что

$$\bigcup_{n\geqslant 1} P_n \supset E, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_m(P_n) < \lambda_m(E) + \varepsilon. \tag{10.1}$$

Ясно, что можно выбрать точки $a_n' < a_n$ таким образом, чтобы для всех $n \in \mathbb{N}$ было выполнено неравенство

$$\lambda_m([a_n', b_n)) < \lambda_m(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{10.2}$$

[19]Можно (как мы делали на лекции) не доказывать это утверждение напрямую, а обходить его при помощи общих теорем о регулярности конечных мер.

Положим $G = \bigcup_{n\geqslant 1}(a'_n, b_n)$. Ясно, что G — открыто, $G \supset E$, и

$$\lambda_m(G) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda_m([a'_n, b_n)) < \sum_{n\geqslant 1}\left(\lambda_m(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) < \lambda_m(E) + 2\varepsilon. \tag{10.3}$$

Таким образом, в случае множества конечной меры теорема доказана.

В общем случае, запишем E как объединение множеств конечной меры[20]: $E = \bigcup_{n\geqslant 1} E_n$; и для каждого E_n найдем такое открытое G_n, что $\lambda_m(G_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n$. Тогда несложно проверить, что множество $G = \bigcup_{n\geqslant 1} G_n$ удовлетворяет условиям теоремы. ■

Следствие 10.2. Для любого измеримого по Лебегу множества E и любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset E$ такое, что $\lambda_m(E \setminus F) < \varepsilon$. Более того, существует компактное множество F, обладающее теми же свойствами.

Доказательство. Очевидно, что подходит $F = G^c$, где G — открытое множество из предыдущей теоремы. Поскольку $\lambda_m(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda_m(F \cap [-n, n]^m)$, можно аппроксимировать компактными множествами. ■

Таким образом, мы доказали регулярность меры Лебега.

Лемма 10.3. Любое измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^m$ можно представить в виде

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \cup e, \tag{10.4}$$

где $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — (возрастающая) последовательность компактов, а множество e измеримо и $\lambda_m(e) = 0$.

Доказательство. Поскольку $E = \bigcup_{N=1}^{\infty}(E \cap [-N, N]^m)$, можно считать, что множество E ограничено. По регулярности меры Лебега существует такая последовательность компактных множеств $K_n \subset E$, что $\lambda_m(E \setminus K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Можно считать, что $K_n \subset K_{n+1}$ (конечное объединение компактов — компакт). Положим

$$e = E \setminus \bigcup_{n\geqslant 1} K_n.$$

Поскольку $\lambda_m(e) \leqslant \lambda_m(E \setminus K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, множество e имеет меру ноль и мы получаем представление (10.4). ■

Теорема 10.4. Пусть O — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, E — измеримое по Лебегу подмножество O, $\Phi \in C^1(O, \mathbb{R}^n)$. Тогда $\Phi(E)$ — тоже измеримо по Лебегу.

Доказательство. Представляя E в виде (10.4), получаем, что

$$\Phi(E) = \Phi(e) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n). \tag{10.5}$$

[20] Это можно сделать в силу σ-конечности.

Поскольку непрерывный образ компакта — компакт, и компактные подмножества $\mathbb{R}^m$ замкнуты, множества $\Phi(K_n)$ измеримы. Таким образом, достаточно лишь доказать, что множество $\Phi(e)$ измеримо. Докажем, что $\lambda_m(\Phi(e)) = 0$.

Итак, пусть $\lambda(e) = 0$. Предположим, что $e \subset Q$ и $\overline{Q} \subset O$, где Q — m-мерная ячейка с рациональными координатами. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют ячейки P_k с рациональными координатами такие, что

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset Q, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(P_k) \leqslant \varepsilon. \tag{10.6}$$

Действительно, ячейки в $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами образуют полукольцо, на котором λ_m — счетно-аддитивная функция. Значит, ее можно продолжить по теореме Каратеодори на σ-алгебру, порожденную соответствующей внешней мерой. Очевидно, что эта σ-алгебра совпадает с $\mathfrak{U}_m$. По единственности в теореме Каратеодори продолжение совпадет с λ_m на $\mathfrak{U}_m$. Тогда неравенство (10.6) следует из определения λ_m и свойств инфимума.

Так как любая ячейка с рациональными координатами представляется в виде дизъюнктного объединения кубических ячеек, то можно считать, что P_k — кубические ячейки.

По теореме Лагранжа, на $\overline{Q}$ для некоторой константы C выполнено неравенство $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant C\|x - y\|$. Заметим, что если P — кубическая ячейка с ребром длины h, то $\operatorname{diam} \Phi(\overline{P}) \leqslant Ch\sqrt{m}$:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant C\|x - y\| = C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2} \tag{10.7}$$

$$\leqslant C\sqrt{m \cdot \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k - y_k|^2} = Ch\sqrt{m}. \tag{10.8}$$

Значит, множество $\Phi(\overline{P})$ содержится в кубе радиуса $2Ch\sqrt{m}$, то есть

$$\lambda_m(\Phi(\overline{P})) \leqslant (2Ch\sqrt{m})^m = \widetilde{C}h^m = \widetilde{C}\lambda_m(\overline{P}) = \widetilde{C}\lambda_m(P). \tag{10.9}$$

Обозначим $H = \bigcup_{n\geqslant 1} \Phi(\overline{P}_n)$. Это множество измеримо, так как оно является счетным объединением компактов, а

$$\lambda_m(H) \leqslant \widetilde{C} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(P_n) \leqslant \widetilde{C}\varepsilon, \tag{10.10}$$

то есть $\lambda_m(H) = 0$. Поскольку $\Phi(e) \subset H$ (смотрим (10.4)), из полноты меры Лебега следует, что $\lambda_m(\Phi(e)) = 0$.

Поймем, что любое открытое множество можно представить в виде счетного объединения ячеек с рациональными коэффициентами, замыкания которых содержатся в этом множестве. Действительно, каждая точка $x \in O$ лежит в O вместе с некоторой окрестностью, в которой можно найти подходящую ячейку P_x. Очевидно, что

$O = \bigcup_{x\in X} P_x$. Осталось заметить, что всего ячеек с рациональными коэффициентами счетное число, а потому, выбирая в семействе $\{P_x\}_{x\in O}$ лишь различные элементы, можно получить искомое покрытие.

Находя такое покрытие O и применяя предыдущие рассуждения к множествам $e \cap P_n$, получаем, что $\lambda_m(\Phi(e) \cap P_n) = 0$, а значит и

$$\lambda_m(\Phi(e)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(\Phi(e) \cap P_n) = 0, \tag{10.11}$$

что и требовалось. ■

Поймем теперь, что инвариантность относительно сдвигов в существенном определяет меру Лебега.

Теорема 10.5. Пусть μ — мера на σ-алгебре $\mathfrak{U}_m$ лебеговских множеств в $\mathbb{R}^m$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $\mu(E + x) = \mu(E)$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$ и $E \in \mathfrak{U}_m$, причем $\mu([0,1)^m) < \infty$;

2. $\mu = k\lambda_m$ для некоторого $k \geqslant 0$.

Более того, если (2) выполнено, то $k = \mu([0,1)^m)$.

Доказательство.

$\Longleftarrow$ Очевидно, что $\lambda_m(P + x) = \lambda_m(P)$ для любой ячейки P. По определению,

$$\lambda_m(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(P_k), \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset E\right\},$$

где правая часть инвариантна относительно сдвига. Кроме того, $\lambda_m([0,1)^m) = 1$. Значит, мера λ_m (а вместе с ней, конечно, и $\mu = k\lambda_m$) удовлетворяет условию (1).

$\Longrightarrow$ Поскольку (по теореме Каратеодори)

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right\},$$

достаточно показать, что $\mu(P) = k\lambda_m(P)$ для любой ячейки P с рациональными координатами, где $k = \mu([0,1)^m)$. Предположим, что $k = 1$. Тогда достаточно проверить, что $\mu(Q) = \lambda_m(Q)$ для любой кубической ячейки Q с рациональными координатами[21]. Из-за инвариантности относительно сдвига, можно рассматривать лишь ячейки вида $Q_n = [0, \frac{1}{n})^m$. Поскольку $[0,1)^m$ — дизъюнктное объединение n^m ячеек вида Q_n (с точностью до сдвига), имеем $n^m\mu(Q_n) = \mu([0,1)^m) = 1$, то есть $\mu(Q_n) = n^{-m} = \lambda_m(Q_n)$.

[21] Мы уже с этим сталкивались в предыдущей теореме.

Если k — произвольное положительное число, то можно рассмотреть вспомогательную меру $\widetilde{mu} = \mu/k$, которая по рассуждениям выше будет просто совпадать с λ_m, а значит, мы получим, что $\mu = k\lambda_m$.

Наконец, если $k = 0$, то $\mu(\mathbb{R}^m) = 0$, то есть μ — нулевая мера. Очевидно, что равенство (2) в этом случае также выполнено. ■

Изучим теперь поведение меры Лебега при действии линейного отображения.

Теорема 10.6. Пусть $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое по Лебегу множество. Тогда $\lambda_m(TE) = |\det T| \cdot \lambda_m(E)$.

Доказательство. Заметим для начала, что по теореме 10.4 множество $T(E)$ измеримо по Лебегу. Обозначим $\mu(E) = \lambda_m(TE)$. Нетрудно проверить, что μ — мера, причем $\mu(E + x) = \lambda_m(TE + Tx) = \lambda_m(TE) = \mu(E)$, и, очевидно, $\lambda_m(T([0,1)^m)) < \infty$, а значит, по предыдущей теореме, $\mu(E) = k\lambda_m(E)$ для некоторого числа k.

1. Пусть T — изометрия, то есть $\|Tx\| = \|x\|\ \forall x \in \mathbb{R}^m$. Пусть $k : \mu(E) = k\lambda_m(E)\ \forall E \in \mathcal{U}$. Возьмем $E = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leqslant 1\}$. Тогда $TE = E$, $k\lambda_m(E) = \mu(E) = \lambda_m(TE) = \lambda_m(E)$, $\lambda_m(E) \neq 0$, так как E содержит невырожденный куб. Значит, $k = 1$, так как $\mu(E) = \lambda_m(E) = |\det T| \cdot \lambda_m(E)$.

2. Пусть теперь T имеет вид $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ [22], где $d_1, d_2, \dots, d_m \geqslant 0$. Как и ранее, $\exists k \geqslant 0 : \mu(E) = k\lambda_m(E)\ \forall E \in \mathcal{U}$. Рассмотрим $E = [0,1)^m$,

$$\mu(E) = \lambda_m([0, d_1) \times \ldots \times [0, d_m)) = d_1 d_2 \ldots d_m = \det T = |\det T|.$$

   С другой стороны, $\mu(E) = k\lambda_m(E) = k$, а значит $k = |\det E|$.

3. Пусть $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ — произвольное.

   Тогда существует изометрия V и $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ такие, что $T = VA$, где $A \geqslant 0$ (полярное представление матрицы)[23]. Существует U — изометрия: $A = U^{-1}DU$, где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, λ_i — собственные числа A. Тогда $T = VU^{-1}DU$,

$$\lambda_m(TE) = \lambda_m(DUE) = \det D \lambda_m(E) = \det D \cdot \lambda_m(E)$$

   так как VU^{-1} и U — изометрии. Отсюда следует, что

$$\det T = |\det VU^{-1}| \det D \cdot |\det U| = \det D = k.$$

■

Определение. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — два пространства с мерами, $\Phi\colon X \to Y$ — измеримое отображение, то есть $\Phi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Мера ν называется

[22] Диагональная матрица.
[23] Будет доказано позже в курсе функционального анализа/или уже было доказано в алгебре.

взвешенным образом меры μ, если существует неотрицательная измеримая относительно $\mathfrak{A}$ функция ω такая, что для любого $B \in \mathfrak{B}$

$$\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, \mathrm{d}\mu. \tag{10.12}$$

Теорема 10.7. Пусть ν — взвешенный образ меры μ. Тогда для любой неотрицательной измеримой относительно $\mathfrak{B}$ функции f выполнено

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f(\Phi)\omega \, \mathrm{d}\mu. \tag{10.13}$$

Доказательство. Пусть сначала $f = \chi_B$, где $B \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & x \in \Phi^{-1}(B) \\ 0, & x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x),$$

а значит

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\nu = \nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \chi_{\Phi^{-1}(B)}\omega \, \mathrm{d}\mu. \tag{10.14}$$

Значит, равенство (10.13) выполнено и для простых функций. Общий случай следует из теоремы об аппроксимации и теоремы Леви. ∎

Следствие 10.8. Равенство (10.13) верно и для суммируемых функций, так как можно рассмотреть $f_\pm$. ∎

Следствие 10.9. Если $B \in \mathfrak{B}$, f — измерима, $f \geqslant 0$ или f — суммируема, то

$$\int\limits_B f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi)\omega \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Можно применить теорему выше к функции $f \cdot \chi_B$. ∎

Определение. Пусть μ, ν — меры на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$. Будем говорить, что ν *имеет плотность* относительно μ, если существует такая измеримая относительно $\mathfrak{A}$ неотрицательная функция ω, что для любого $E \in \mathfrak{A}$

$$\nu(E) = \int\limits_E \omega \, \mathrm{d}\mu. \tag{10.15}$$

Теорема 10.10. Пусть μ, ν — меры на $(X, \mathfrak{A})$, ω — неотрицательная функция, измеримая относительно $\mathfrak{A}$. Следующие условия равносильны:

1. ω — плотность ν относительно μ;

2. для любого измеримого множества $E \subset X$ выполнены неравенства[24]

$$\left(\inf_{x \in E} \omega(x)\right) \mu(E) \leqslant \nu(E) \leqslant \left(\sup_{x \in E} \omega(x)\right) \mu(E). \tag{10.16}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Очевидно: интеграл ω можно оценить сверху и снизу супремумом и инфимумом соотвественно, а интеграл единицы — это $\mu(A)$.

$\Longleftarrow$ Рассмотрим для начала крайние случаи. Если $e = \{x \in E : \omega(x) = 0\}$, то инфимум и супремум на e функции ω равен нулю, а потому $\nu(e) = 0 = \int_e \omega \, d\mu$. Если $F = \{x \in E : \omega(x) = +\infty\}$, то либо $\mu(F) > 0$, и тогда в обеих частях (10.20) будет стоять бесконечность, либо $\mu(F) = 0$, и тогда $\nu(F) = 0 = \int_F \omega \, d\mu$. Таким образом, мы можем считать, что $\omega(x) \in (0, +\infty)$ при любом $x \in E$.

Пусть $q \in (0, 1)$. Рассмотрим множества

$$E_n := \{x \in E : q^{n+1} \leqslant \omega(x) < q^n\}, \tag{10.17}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Ясно, что

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n = \{x \in E : \omega(x) \in (0, +\infty)\} = E, \tag{10.18}$$

причем это выполнено для любого q. Очевидно,

$$\int\limits_E \omega \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int\limits_{E_n} \omega \, d\mu. \tag{10.19}$$

По определению E_n для любого $n \in \mathbb{Z}$ выполнены неравенства

$$q^{n+1} \mu(E_n) \leqslant \int\limits_{E_n} \omega \, d\mu \leqslant q^n \mu(E_n). \tag{10.20}$$

По условию (2), $q^{n+1}\mu(E_n) \leqslant \nu(E_n) \leqslant q^n \mu(E_n)$. Умножая последнюю пару неравенств на q или на $1/q$ и пользуясь (10.20), получаем

$$q\nu(E_n) \leqslant q^{n+1}\mu(E_n) \leqslant \int\limits_{E_n} \omega \, d\mu \leqslant q^n \mu(E_n) \leqslant \frac{1}{q}\nu(E_n). \tag{10.21}$$

После суммирования по $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$q\nu(E) \leqslant \int\limits_E \omega \, d\mu \leqslant \frac{1}{q}\nu(E). \tag{10.22}$$

[24] Отметим, что в этих неравенствах могут появиться выражения вида $0 \cdot (+\infty)$ и $(+\infty) \cdot 0$. Они считаются равными нулю.

Переходя к пределу $q \to 1$ (снизу), получаем искомое равенство. ■

Если $\Phi \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, где O — открыто в $\mathbb{R}^m$, то через $J(x) = \det[\mathrm{d}_x\Phi]$ будем обозначать якобиан Φ в точке $x \in O$.

Теорема 10.11. Пусть O — открытое подмножество $\mathbb{R}^m$, $\Phi\colon O \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм на свой образ, $E \subset O$ — измеримое по Лебегу множество, f — либо неотрицательная, либо суммируемая на E измеримая по Лебегу функция. Тогда

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\lambda_m = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x))\,|J(x)|\,\mathrm{d}\lambda_m(x). \tag{10.23}$$

Доказательство. На самом деле, достаточно показать, что

$$\lambda_m(\Phi(E)) = \int\limits_E |J(x)|\,\mathrm{d}\lambda_m(x), \tag{10.24}$$

(замечание: проверяли, что $\Phi(E)$ - измеримо, то есть левая часть равенства выше определена) так как тогда

$$\lambda_m(E') = \int\limits_{\Phi^{-1}(E')} |J(x)|\,\mathrm{d}\lambda_m(x), \tag{10.25}$$

для всякого $E' \subset \Phi(O)$, $E' \in \mathfrak{U}$; то есть λ_m на $\Phi(O)$ — это взвешенный образ λ_m на O с весом $|J(x)|$. По теореме о замене переменной будет выполнено равенство (10.23). По предыдущей теореме достаточно показать, что

$$\inf_{x\in A} |J(x)|\lambda_m(A) \leqslant \lambda_m(\Phi(A)) \leqslant \sup_{x\in A} |J(x)|\lambda_m(A). \tag{10.26}$$

Заметим, что достаточно доказать только правую часть неравенства. Действительно, если выполнена правая часть, рассмотрим отображение $\Psi\colon \Phi(O) \to O$ обратное к Φ, то есть $\Psi = \Phi^{-1}$:

$$\lambda_m(A) = \lambda_m(\Psi(\Phi(A))) \leqslant \sup_{y\in\Phi(A)} |\det(\mathrm{d}_y\Psi(y))|\lambda_m(\Phi(A)),$$

причем

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\Phi(A)} |\det(\mathrm{d}_y\Psi(y))| &= \sup_{x\in A} \frac{1}{|\det(\mathrm{d}_x\Phi(x))|}\\ &= [\det(\mathrm{d}_{\Phi(x)}\Psi)\cdot\det(\mathrm{d}_x\Phi) = 1]\\ &= \frac{1}{\inf_{x\in A}|\det(\mathrm{d}_x\Phi)|} = \frac{1}{\inf|J(x)|}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\inf|J(x)|\cdot\lambda_m(A) \leqslant \lambda_m(\Phi(A))$, а значит можно доказывать только правую часть.

Рассмотрим случай, когда $A = Q$ — кубическая ячейка, такая, что $\overline{Q} \subset O$. Пусть L

— длина ребра Q. Пусть $\exists c > \sup_{x\in Q}|J(x)| : \lambda_m(\Phi(Q)) \geqslant c\cdot\lambda_m(Q)$. Разобьем Q на 2^m кубических ячеек с длиной $L/2$. Существует Q_1 — одна из этих ячеек, такая, что на ней

$$\lambda_m(\Phi(Q_1)) \geqslant c\lambda_m(Q_1).$$

Разобьем Q_1 на 2^m кубических ячеек с длиной ребра $L/4$. Опять же, для одной из них, скажем, Q_2, будет верно неравенство

$$\lambda_m(\Phi(Q_2)) \geqslant c\lambda_m(Q_2).$$

Продолжая процесс аналогичным образом, получим последовательность вложенных кубических ячеек Q_n, причем $\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{Q}_n$. Эта точка лежит в O, поскольку $\overline{Q}\subset O$. Кроме того, имеет место равенство

$$\Phi(Q_n) = \Phi(a) + (\mathrm{d}_a\Phi)(Q'_n) + R_n.$$

где Q'_n — кубическая ячейка с ребром $\frac{L}{2^n}$, содержащая ноль, и $\mathrm{diam}(R_n) = o\left(\frac{L}{2^n}\right)$ при $n\to\infty$. $\mathrm{d}_a\Phi$ обратимо, так как Φ — диффеоморфизм. Значит,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : (\mathrm{d}_a\Phi)(Q'_{n,\varepsilon}) \supset (\mathrm{d}_a\Phi)(Q'_n) + R_n,$$

где $Q'_{n,\varepsilon}$ — куб с ребром длины $\frac{(1+\varepsilon)L}{2^n}$ и тем же центром, что и Q'_n. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Phi(Q_n) \subset \Phi(a) + (\mathrm{d}_a\Phi)(Q'_{n,\varepsilon}),\\
&\lambda_m(\Phi(Q_n)) \leqslant [\text{для больших } n] \leqslant \lambda_m((\mathrm{d}_a\Phi)(Q'_{n,\varepsilon}))\\
&\qquad = |J(a)|(1+\varepsilon)^m\lambda_m(Q'_n)\\
&\qquad = |J(a)|(1+\varepsilon)^m\lambda_m(Q_n)\\
&\ \Longrightarrow\ c\lambda_m(Q_n) \leqslant |J(a)|(1+\varepsilon)^m\lambda_m(Q_n)\\
&\ \Longrightarrow\ c \leqslant |J(a)|(1+\varepsilon)^m\ \forall\varepsilon > 0\\
&\ \Longrightarrow\ c \leqslant |J(a)|.
\end{aligned}$$

Противоречие.

Если теперь $A\subset O$ — открытое множество, то представим A в виде $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, где Q_n — кубическая ячейка, $\overline{Q}_n \subset A \subset O$. Тогда

$$\lambda_m(\Phi(A)) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_m\Phi(Q_n) \leqslant \sum \sup_{x\in Q_n}|J(x)|\cdot\lambda_m(Q_n) \leqslant \sup_{x\in A}|J(x)|\cdot\lambda_m(A).$$

Если $A\in\mathcal{U}$, то существуют открытые вложенные множества $A_n\supset A$ такие, что $A\cup e = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, где $e\in\mathcal{U} : \lambda_m(e) = 0$, причем $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{A}$. Тогда

$$\lambda_m(\Phi(A)) = [\lambda_m(\Phi(e)) = 0] = \lambda_m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi(A_n)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A_n}|J(x)|\cdot\lambda_m(A_n)\right)\\
&\leqslant \sup_{x\in\overline{A}}|J(x)|\cdot\lambda_m(A).
\end{aligned}
$$

В последнем неравенстве мы воспользовались непрерывностью сверху для меры Лебега, которая верна для множеств A конечной меры, в общем случае надо разбить A на не более чем счетное число кусков конечного диаметра. Используя непрерыность J, можно заменить $\overline{A}$ на A в правой части, что завершает доказательство. ■

Пример 10.1. Рассмотрим множество $V = \{(x,y,z) : 0 < z < 1,\ x^2+y^2 < z\}$ (усеченный параболоид — ведро). Посчитаем его объем.

$$\lambda_3(V) = \int\limits_V 1\,\mathrm{d}\lambda_3.$$

Обозначим $\widetilde{V} = \{(r,\varphi,h) : \varphi\in(0,2\pi),\ h\in(0,1),\ r\in(0,\sqrt{h})\}$ и $\Phi\colon (r,\varphi,h)\mapsto(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$. Тогда

$$\Phi(\widetilde{V}) = V\setminus\{(x,y,z) : y=0, x>0\} = V'.$$

Очевидно, что Φ — диффеоморфизм. Тогда

$$
\begin{aligned}
\int\limits_V 1\mathrm{d}\lambda_3 &= \int\limits_{\widetilde{V}} 1(\Phi)|J(x)|\mathrm{d}\lambda_3 = \int\limits_{\widetilde{V}}|J(x)|\mathrm{d}\lambda_3\\
&= \left[J(x) = \det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r\right]\\
&= \int\limits_{\widetilde{V}} r\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int\limits_{(0,1)\times(0,2\pi)\times(0,1)} \chi_{(0,\sqrt{h})}(r) r\mathrm{d}\lambda_3\\
&= [\text{теорема Тонелли}]\\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \chi_{(0,\sqrt{n})}(r) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}\varphi\\
&= 2\pi\int\limits_0^1\int\limits_0^{\sqrt{h}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}h\\
&= 2\pi\int\limits_0^1 \frac{h}{2}\,\mathrm{d}h = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

11 Заряды. Разложения Хана и Жордана

В этом параграфе зафиксировано измеримое пространство $(X,\mathfrak{A})$.

Определение. *Зарядом* называется счетно-аддитивная функция со значениями в $\mathbb{C}$ на X.

Таким образом, функция $\nu\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ — заряд, если для любого дизъюнктного набора $\{A_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathfrak{A}$ выполнено равенство

$$\nu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k), \tag{11.1}$$

где ряд справа сходится в $\mathbb{C}$.

Определение. Будем называть заряд ν *вещественным*, если $\nu(\mathfrak{A}) \subset \mathbb{R}$.

Утверждение 11.1. Пусть ν — заряд. Если $\{A_k\}_{k\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность измеримых множеств в X, то

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k). \tag{11.2}$$

Если $\{B_k\}_{k\geqslant 1}$ — убывающая последовательность измеримых множеств в X, то

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(B_k). \tag{11.3}$$

Доказательство. Определим последовательность $\{Q_k\}_{k\geqslant 1} : Q_1 = A_1,\ Q_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. Тогда

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \nu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(Q_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(Q_k) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n). \tag{11.4}$$

Для убывающей последовательности имеем

$$\nu(X) - \nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus B_k)\right) = \lim_{k\to\infty} (\nu(X) - \nu(B_k)) = \nu(X) - \lim_{k\to\infty} \nu(B_k), \tag{11.5}$$

откуда очевидным образом следует (11.3). ■

Определение. Пусть ν — заряд на X. Измеримое множество P называется *множеством положительности* заряда ν, если $\nu(E) \geqslant 0$ для любого измеримого $E \subset P$.

Аналогично, N называется *множеством отрицательности* для ν, если $\nu(E) \leqslant 0$ для любого измеримого $E \subset N$.

Наконец, измеримое множество Z называется *нуль-множеством* для ν, если $\nu(E) = 0$ для любого измеримого $E \subset Z$.

Лемма 11.2.

1. Если P — множество положительности, $\widetilde{P}$ — некоторое измеримое подмножество P, то $\widetilde{P}$ — тоже множество положительности.

2. Если $\{P_k\}_{k\geqslant 1}$ — набор множеств положительности, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ — множество положительности.

Доказательство.

1. Очевидно.

2. Как мы знаем, объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ допускает представление в виде $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, где $Q_1 = P_1$, $Q_k = P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j \subset P_k$. Заметим, что по первому пункту каждое Q_k — тоже множество положительности. Значит, для любого измеримого $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$:

$$\nu(E) = \nu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(E \cap Q_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_k) \geqslant 0, \tag{11.6}$$

что и требовалось. ■

Теорема 11.3 (Хан). Пусть ν — вещественный заряд на X. Тогда пространство X можно представить в виде дизъюнктного объединения множества положительности и множества отрицательночти: $X = P \sqcup N$. Более того, если P', N' — другая пара множеств с такими свойствами, то $P \triangle P'$, $N \triangle N'$ — нуль-множества для ν.

Определение. Разложение $X = P \sqcup N$, описанное в теореме выше, называется *разложением Хана* пространства X для заряда ν.

Доказательство. Пусть $a = \sup\{\nu(P)\}$, где супремум берется по всем множествам положительности P. Ясно, что существует такая последовательность $\{P_k\}_{k\geqslant 1}$ множеств положительности, что $\nu(P_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. Тогда $P := \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ — множество положительности, причем $\nu(P) \geqslant a$. Раз a — супремум, это значит, что $\nu(P) = a$. Положим $N = X \setminus P$.

Хотим доказать, что N — множество отрицательности. Если любое измеримое множество $A \subset N$ имеет неположительную меру, то доказывать нечего. Заметим, что не существует множества положительности $A \subset N$, $\nu(A) > 0$, так как иначе бы $P \sqcup A$ было бы множеством положительности с $\nu(P \sqcup A) > a$, что невозможно.

Таким образом, если $A \subset N$ — измеримо, $\nu(A) > 0$, то для некоторого $B \subset A$ выполнено $\nu(B) < 0$. Тогда множество $C = A \setminus B \subset A$ обладает свойством $\nu(C) > \nu(A)$. В частности, $\exists n \in \mathbb{N} : \nu(C) \geqslant \nu(A) + \frac{1}{n}$. Пусть n_1 — минимальное число , обладающее таким свойством. Также обозначим $A_1 = C$.

Далее аналогичным образом мы можем найти такие A_2, n_2, что $A_2 \subset A_1$, и n_2 — минимальное натуральное число, для которого выполнено неравенство $\nu(A_2) \geqslant \nu(A_1) + \frac{1}{n_2}$. По индукции получаем последовательность $\{(A_k, n_k)\}_{k\geqslant 1}$. Посмотрим на множество $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Имеем:

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}. \tag{11.7}$$

Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ сходится. В частности, последовательность $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ стремится к бесконечности. Поскольку $\nu(E) > \frac{1}{n_1} > 0$, существует такое $\widetilde{C} \subset E$, что $\nu(\widetilde{C}) \geqslant \nu(E) + \frac{1}{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $M \in \mathbb{N}$ таково, что $n_j > n$ для всех $j \geqslant M$. Но тогда на

j-ом шаге можно было взять $\widetilde{C}$ вместо A_{n_j}, то есть n_j не минимально для любого $j \geqslant M$. Значит, такого множества $A \subset N$, что $\nu(A) > 0$, не существует, и первая часть теоремы доказана.

Пусть $P' \sqcup N'$ — другое разложение Хана. Покажем, что $P \triangle P' = (P \setminus P') \cup (P' \setminus P)$ — нуль-множество. Множество $P \setminus P'$ — это множество положительности, так как $P \setminus P' \subset P$. С другой стороны, $P \setminus P' \subset N'$, то есть это множество отрицательности. Таким образом, $P \setminus P'$ — нуль-множество. Аналогично, $P' \setminus P$ — нуль-множество, а значит и $P \triangle P'$ — нуль-множество. Рассматривая $-\nu$ вместо ν видим, что и $N \triangle N'$ — тоже нуль-множество. ∎

Определение. Пусть $\mu_1,\ \mu_2$ — меры на X. Говорят, что μ_1 *взаимно сингулярна* с μ_2, если существует разложение $X = X_1 \sqcup X_2$, где X_1, X_2 — измеримы, и $\mu_1(X_2) = 0,\ \mu_2(X_1) = 0$. В этом случае будем писать $\mu_1 \perp \mu_2$.

Заряд ν *сингулярен* относительно меры μ, если существует разбиение $X = X_1 \sqcup X_2$, где $\mu(X_1) = 0$, а X_2 — нуль-множество для ν.

Пример 11.1. Пусть $X = [0,1]$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}([0,1])$. Тогда меры

$$\mu_1 \colon E \mapsto \lambda_1(E \cap [0, \tfrac{1}{2}]), \qquad \mu_2 \colon E \mapsto \lambda_1(E \cap [\tfrac{1}{2}, 1]),$$

взаимно сингулярны, где искомое разбиение — $X = [0, \frac{1}{2}) \sqcup [\frac{1}{2}, 1]$.

Пример 11.2. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = \delta_0$, где

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in E, \\ 0, & \text{если } 0 \notin E. \end{cases}$$

Тогда меры μ_1 и μ_2 взаимно сингулярны с разложением $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \sqcup \{0\}$.

Теорема 11.4 (Жордан). Пусть ν — заряд на X. Тогда существуют и единственны такие конечные меры $\nu_+, \nu_-, \widetilde{\nu}_+, \widetilde{\nu}_-$, что $\nu_+ \perp \nu_-$, $\widetilde{\nu}_+ \perp \widetilde{\nu}_-$, и

$$\nu = (\nu_+ - \nu_-) + i(\widetilde{\nu}_+ - \widetilde{\nu}_-). \tag{11.8}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда ν — вещественный заряд. Пусть $X = P \sqcup N$ — разложение Хана для ν. Положим

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P), \qquad \nu_-(E) = -\nu(E \cap N), \tag{11.9}$$

Из определения видно, $\nu_\pm$ — конечные меры, причем

$$\nu(E) = \nu\big((E \cap P) \sqcup (E \cap N)\big) = \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N) = \nu_+(E) - \nu_-(E). \tag{11.10}$$

Таким образом, существование доказано. Покажем единственность. Пусть $\nu = \widetilde{\nu}_+ - \widetilde{\nu}_-$, где $\widetilde{\nu}_\pm$ — меры, $\widetilde{\nu}_+ \perp \widetilde{\nu}_-$. Найдем разложение $X = \widetilde{P} \sqcup \widetilde{N}$ из определения взаимной сингулярности. Если $\widetilde{\nu}_+(\widetilde{N}) = 0$ и $\widetilde{\nu}_-(\widetilde{P}) = 0$, то нетрудно видеть, что $\widetilde{P}$ — множество положительности, а $\widetilde{N}$ — множество отрицательности, то есть $X = \widetilde{P} \sqcup \widetilde{N}$ — разложение Хана. Тогда $P \triangle \widetilde{P}$, $N \triangle \widetilde{N}$ — нуль-множества для ν.

Пусть E — измеримое множество. Тогда:

$$\nu_+(E) = \nu(E \cap P) = \nu(E \cap (P \cap \widetilde{P})) + \nu(E \cap (P \setminus \widetilde{P})) = \nu(E \cap P \cap \widetilde{P}). \tag{11.11}$$

Аналогично,

$$\widetilde{\nu}_+(E) = \nu(E \cap \widetilde{P}) = \nu(E \cap P \cap \widetilde{P}), \tag{11.12}$$

откуда $\nu_+ = \widetilde{\nu}_+$ и $\nu_- = \widetilde{\nu}_-$. ■

Определение. Пусть ν — заряд на X. *Вариацией* ν будем называть функцию множества $|\nu|$ на $\mathfrak{A}$:

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_k)| : \{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}, \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k = E\right\}. \tag{11.13}$$

Замечание. $|\nu|(E) \neq |\nu(E)|$.

Теорема 11.5. $|\nu|$ — конечная мера на X.

Доказательство. Покажем, что $|\nu|(E) < \infty$ для любого $E \in \mathfrak{A}$ (в частности, для $E = X$):

$$|\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_k)|\right\} \tag{11.14}$$

$$\leqslant \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\nu_+(E_k) + \nu_-(E_k) + \widetilde{\nu}_+(E_k) + \widetilde{\nu}_-(E_k))\right\} \tag{11.15}$$

$$\leqslant \nu_+(X) + \nu_-(X) + \widetilde{\nu}_+(X) + \widetilde{\nu}_-(X) < \infty. \tag{11.16}$$

Здесь $\nu_+, \nu_-, \widetilde{\nu}_+, \widetilde{\nu}_-$ — конечные меры из разложения Жордана для ν.

Покажем счетную аддитивность $|\nu|$. Пусть $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|\nu|(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_k)| + \varepsilon, \quad \text{где} \quad A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k. \tag{11.17}$$

Значит,

$$|\nu|(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(E_k \cap A_j)| + \varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\nu(E_k \cap A_j)| + \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\nu|(A_j) + \varepsilon, \tag{11.18}$$

так как $A_j = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(E_k \cap A_j)$. Значит,

$$|\nu|(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\nu|(A_j). \tag{11.19}$$

Обратная оценка: пусть $A_j = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_{jk}$, где

$$|\nu|(A_j) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_{jk})| + \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{11.20}$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_{jk})| + \varepsilon \leqslant |\nu| \left(\bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} A_{jk} \right) + \varepsilon = |\nu|(A) + \varepsilon. \tag{11.21}$$

Отсюда очевидным образом следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(A_j) \leqslant |\nu|(A). \tag{11.22}$$

Таким образом, равенство доказано. ■

Теорема 11.6. Множество зарядов ν на X с нормой $\|\nu\| = |\nu|(X)$ образует полное линейное нормированное пространство.

Доказательство. Для начала покажем, что $|\nu|(X)$ — это норма:

1. $|\nu|(X) \geqslant 0$ — очевидно; условие $|\nu|(X) = 0$ эквивалентно тому, что $\nu(E) = 0\ \forall E \in \mathfrak{A}$, то есть условию $\nu = 0$.
2. $|\alpha\nu|(X) = |\alpha| \cdot |\nu|(X)\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ — очевидно.
3. Надо просто разбить супремум на два:

$$|\nu_1 + \nu_2|(X) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\nu_1 + \nu_2|(E_k) \right\} \tag{11.23}$$

$$\leqslant \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\nu_1(E_k)| \right\} + \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\nu_2(E_k)| \right\} \tag{11.24}$$

$$= |\nu_1|(X) + |\nu_2|(X). \tag{11.25}$$

Осталось показать, что это нормированное пространство полно, то есть что любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

Пусть заряды $\{\nu_k\}_{k \geqslant 1}$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|\nu_k\| < \infty$. Рассмотрим функцию

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(E). \tag{11.26}$$

Надо показать, что ν — заряд:

$$\nu \left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \nu_k(E_j) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j). \tag{11.27}$$

Осталось заметить, что порядок суммирования можно менять, так как ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\nu_k(E_j)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\nu_k|(E_j) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|\nu_k|(X) = \sum_{k=1}^{\infty}\|\nu_k\| < \infty. \tag{11.28}$$

■

Утверждение 11.7. Пусть ν — вещественный заряд, ν_+, ν_- — разложение Жордана для ν. Тогда

$$|\nu|(E) = \nu_+(E) + \nu_-(E). \tag{11.29}$$

Доказательство. Неравенство $|\nu|(E) \leqslant \nu_+(E) + \nu_-(E)$ следует из определения и неравенства треугольника. В обратную сторону:

$$|\nu|(E) \geqslant |\nu(E \cap P)| + |\nu(E \cap N)| = \nu_+(E) + \nu_-(E), \tag{11.30}$$

так как $(E \cap P) \sqcup (E \cap N) = E$, где $P \sqcup N$ — разложение Хана. ■

Утверждение 11.8. Пусть ν — функция множества на X, $f \in L^1(\mu)$, и $\nu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu$. Тогда ν — заряд, и

$$|\nu|(E) = \int\limits_E |f|\,\mathrm{d}\mu. \tag{11.31}$$

Доказательство. ν — заряд, поскольку интеграл счетно-аддитивен и $f \in L^1(\mu)$, то есть $\nu(E) \in \mathbb{C}$ для всех $E \in \mathfrak{A}$. Пусть ν_n произвольные заряды со свойством

$$\nu_n(E) = \int\limits_E f_n\,\mathrm{d}\mu, \tag{11.32}$$

где $f_n \in L^1(\mu) : \|f - f_n\|_{L^1(\mu)} \to 0$. Заметим, что по неравенству треугольника

$$|\nu_n|(E) \leqslant |\nu|(E) + |\nu - \nu_n|(E), \tag{11.33}$$

а

$$|\nu - \nu_n|(E) \leqslant \int\limits_E |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f - f_n\|_{L^1(\nu)} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{11.34}$$

$$|\nu_n|(E) \leqslant \int\limits_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu.$$

Пусть $f_n = \sum_{k=1}^N a_k\chi_{A_k}$, где $X = \sqcup A_k$. Тогда

$$|\nu_n|(E) \geqslant \sum_{k=1}^{N}|\nu_n(E \cap A_k)| \tag{11.35}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left|\int\limits_{E\cap A_k} f_n\,\mathrm{d}\mu\right| \geqslant \sum_{k=1}^{N}|a_k|\cdot\mu(E \cap A_k) \tag{11.36}$$

$$= \sum \int\limits_{E\cap A_k} |a_k| \, \mathrm{d}\mu = \sum \int\limits_{E\cap A_k} |f_n| \, \mathrm{d}\mu \tag{11.37}$$

$$= \int\limits_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu \implies |\nu_n|(E) = \int\limits_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu. \tag{11.38}$$

Продолжаем старое неравенство:

$$|\nu|(E) \geqslant |\nu|_n(E) - |\nu - \nu_n|(E) \tag{11.39}$$

$$\geqslant \int\limits_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu - \|f - f_n\|_{L^1(\mu)} + r_n \tag{11.40}$$

$$\geqslant \int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_E |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu - \|f - f_n\| + r_n. \tag{11.41}$$

Переходя к пределу, получаем требуемое равенство. ■

12 Теорема Радона-Никодима

В этом параграфе зафиксировано измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$.

Определение. Будем говорить, что мера μ_1 *абсолютно непрерывна* относительно меры μ_2, если для любого измеримого множества E из $\mu_2(E) = 0$ следует $\mu_1(E) = 0$.

Будем также говорить, что заряд ν *абсолютно непрерывен* относительно меры μ, если для любого измеримого E из $\mu(E) = 0$ следует, что E — нуль-множество для ν. В этом случае будем писать $\nu \prec \mu$.

Упражнение. Заряд ν абсолютно непрерывен относительно μ тогда и только тогда, когда вариация $|\nu|$ абсолютно непрерывна относительно μ.

Примеры 12.1.

1. Пусть $\mu = \lambda_1$, $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\lambda_1$, $f \in L^1(\lambda_1)$. Тогда $\nu \prec \mu$, поскольку интеграл по множеству нулевой меры равен нулю.

2. Пусть $\mu = \lambda_1/2$, $\nu = \lambda_1$. Тогда одновременно выполнено и $\nu \prec \mu$, и $\mu \prec \nu$, то есть $\mu(E) = 0 \iff \nu(E) = 0$.

Лемма 12.1. Пусть μ, ν — конечные меры. Тогда либо $\mu \perp \nu$, либо существует такое измеримое множество $A \subset X$ и число $\varepsilon > 0$, что $\mu(A) > 0$, и для любого измеримого $E \subset A$ выполнено неравенство $\nu(E) \geqslant \varepsilon\mu(E)$.

Доказательство. Рассмотрим разложения Хана $X = P_n \sqcup N_n$ для зарядов

$$\tau_n(E) = \nu(E) - \frac{1}{n}\mu(E). \tag{12.1}$$

Обозначим $P = \bigcup_{n\geqslant 1} P_n$, $N = \bigcap_{n\geqslant 1} N_n$. Тогда $X = P \sqcup N$. Заметим, что если $E \subset N$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$
$$\tau_n(E) = \nu(E) - \frac{1}{n}\mu(E) \leqslant 0, \tag{12.2}$$
а значит
$$0 \leqslant \nu(E) \leqslant \frac{1}{n}\mu(E) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{12.3}$$
то есть $\nu(E) = 0$. В частности, $\nu(N) = 0$. Если $\mu(P) = 0$, то $\mu \perp \nu$. В противном случае, $\mu(P) > 0$, то есть $\mu(P_n) > 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Положим $A = P_n$, $\varepsilon = 1/n$. Тогда для любого $E \subset A$ имеем
$$\tau_n(E) = \nu(E) - \frac{1}{n}\mu(E) \geqslant 0, \tag{12.4}$$
то есть $\nu(E) \geqslant \varepsilon\mu(E)$. ■

Лемма 12.2. Если $\nu \prec \mu$ и $\nu \perp \mu$ для некоторого заряда ν и меры μ, то $\nu = 0$.

Доказательство. Из условия следует, что $|\nu| \prec \mu$ и $|\nu| \perp \mu$, и поэтому можно считать, что ν — мера. Пусть $X = X_1 \sqcup X_2$, где $\nu(X_2) = 0$, $\mu(X_1) = 0$. Но тогда $\nu(X_1) = 0$ по абсолютной непрерывности, а значит
$$\nu(X) = \nu(X_1 \sqcup X_2) = \nu(X_1) + \nu(X_2) = 0, \tag{12.5}$$
что и требовалось. ■

Лемма 12.3. Пусть μ — мера в X, $\{\nu_k\}_{k\geqslant 1}$ — семейство зарядов такое, что $\nu_k \perp \mu$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $\sum_{k=1}^{\infty} \|\nu_k\| < \infty$. Тогда $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \perp \mu$.

Доказательство. Для начала заметим, что ν определен, так как он задается как сумма абсолютно сходящегося ряда в полном линейном нормированном пространстве. Пусть $X = X_{1k} \sqcup X_{2k}$, где $\mu(X_{2k}) = 0$, $|\nu_k|(X_{1k}) = 0$. Рассмотрим разложение
$$X = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{2k}\right) \sqcup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_{1k}\right). \tag{12.6}$$
Тогда
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{2k}\right) = 0, \tag{12.7}$$
$$|\nu|\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_{1k}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j|\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_{1k}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j|(X_{1j}) = 0, \tag{12.8}$$
откуда $|\nu| \perp \mu$ и, соответственно, $\nu \perp \mu$. ■

Упражнение. Пусть μ — мера в X, $\{\nu_k\}_{k\geqslant 1}$ — семейство зарядов такое, что $\nu_k \prec \mu$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $\sum_{k=1}^{\infty} \|\nu_k\| < \infty$. Тогда $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \prec \mu$.

Обозначение. Пусть $f \in L^1(\mu)$. Тогда через $f\,\mathrm{d}\mu$ мы будем обозначать заряд
$$\nu\colon E \mapsto \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu. \tag{12.9}$$

Теорема 12.4 (Радон, Никодим). Пусть μ — σ-конечная мера в X, ν — заряд. Тогда существуют единственные заряды ν_a и ν_s такие, что $\nu = \nu_a + \nu_s$, где $\nu_a \prec \mu$, $\nu_s \perp \mu$. Кроме того, существует такая функция $f \in L^1(\mu)$, что $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$, и если $\nu_a = g\,\mathrm{d}\mu$ для какой-либо функции $g \in L^1(\mu)$, то $f = g$ почти всюду.

Замечание. Разложение из теоремы Радона – Никодима можно кратко записать так: $\nu = f\,\mathrm{d}\mu + \nu_s$.

Доказательство. Пусть для начала μ, ν — конечные меры. Определим $\mathcal{F}$ как множество неотрицательных измеримых функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E) \tag{12.10}$$

для всех $E \in \mathfrak{A}$. $\mathcal{F} \neq \varnothing$, так как $0 \in \mathcal{F}$. Если $f_1,\ f_2 \in \mathcal{F}$, то $\max(f_1, f_2) \in \mathcal{F}$, так как

$$\int\limits_E \max(f_1, f_2)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{E\cap A} f_1\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus A} f_2\,\mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E\cap A) + \nu(E\setminus A) = \nu(E), \tag{12.11}$$

где $A = X(f_1 \geqslant f_2)$.

Обозначим

$$a = \sup_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu. \tag{12.12}$$

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций в $\mathcal{F}$, таких, что

$$\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} a. \tag{12.13}$$

Обозначим $\widetilde{f_n} = \max(f_1, \dots, f_n)$. Как мы показали, $\widetilde{f_n} \in \mathcal{F}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Это возрастающая последовательность неотрицательных функций, а потому по теореме Леви

$$\int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \sup_{n\geqslant 1} f_n\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E \widetilde{f_n} \leqslant \nu(E), \tag{12.14}$$

то есть $f \in \mathcal{F}$. При этом,

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \tag{12.15}$$

откуда $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = a$.

Положим $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$, $\nu_s = \nu - \nu_a$. Проверим, что это искомое разложение, то есть, что $\nu_s \perp \mu$. Пусть это не так. Тогда, как мы знаем из леммы 12.1, существует измеримое $A \subset X$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\mu(A) > 0$ и $\nu_s(E) \geqslant \varepsilon\mu(E)$ для всех измеримых $E \subset A$.

Рассмотрим функцию $g = f + \varepsilon\chi_A$. Для любого измеримого $E \subset X$

$$\int\limits_E g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \int\limits_{E\cap A} \mathrm{d}\mu \leqslant (f\,\mathrm{d}\mu)(E) + \nu_s(E\cap A) \leqslant \nu_a(E) + \nu_s(E) = \nu(E). \quad (12.16)$$

Значит, $g \in \mathcal{F}$. С другой стороны,

$$\int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A) = a + \varepsilon\mu(A) > a, \quad (12.17)$$

что невозможно.

Пусть теперь μ — конечная мера, а ν — заряд. По теореме Жордана имеем $\nu = (\nu_+ - \nu_-) + i(\widetilde{\nu}_+ - \widetilde{\nu}_-)$. Раз $\nu_\pm, \widetilde{\nu}_\pm$ — конечные меры, мы можем воспользоваться тем, что было доказано, и найти соответствующие меры $(\nu_\pm)_a$, $(\widetilde{\nu}_\pm)_a$, $(\nu_\pm)_s$, $(\widetilde{\nu}_\pm)_s$. Положим

$$\nu_a = (\nu_+)_a - (\nu_-)_a + i(\widetilde{\nu}_+)_a - i(\widetilde{\nu}_-)_a, \quad (12.18)$$
$$\nu_s = (\nu_+)_s - (\nu_-)_s + i(\widetilde{\nu}_+)_s - i(\widetilde{\nu}_-)_s. \quad (12.19)$$

Тогда $\nu = \nu_a + \nu_s$, причем $\nu_a \prec \mu$, $\nu_s \perp \mu$ по лемме 12.3 и соответствующему упражнению, $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$ для некоторой функции $f \in L^1(\mu)$.

Наконец, перейдем к общему случаю, когда μ — σ-конечная мера, ν — заряд. Разложим $X = \bigsqcup_{j=1}^\infty X_j$, где $\mu(X_j) < \infty$. Тогда можно рассмотреть меру $\mu_j(E) = \mu(E \cap X_j)$ и применить предыдущий шаг. Находим $\nu_{aj} = f_j\,\mathrm{d}\mu$, $\nu_{sj} \perp \mu$, такие, что

$$\nu_j(E) = \nu(E \cap X_j) = \nu_{aj}(E\cap X_j) + \nu_{sj}(E \cap X_j) \quad (12.20)$$

для всех измеримых $E \subset X$. Определим

$$\nu_a = \sum_{j=1}^\infty \nu_{aj}, \qquad \nu_s = \sum_{j=1}^\infty \nu_{sj}. \quad (12.21)$$

Определение корректно, так как

$$\sum_{j=1}^\infty \|\nu_{aj}\| \leqslant \|\nu\|, \qquad \sum_{j=1}^\infty \|\nu_{sj}\| \leqslant \|\nu\|. \quad (12.22)$$

Это следует из следующей цепочки равенств:

$$\|\nu\| = |\nu|(X) = \sum_{j=1}^\infty |\nu|(X_j) = \sum_{j=1}^\infty |\nu_j|(X) = \sum_{j=1}^\infty \left(|\nu_{aj}|(X) + |\nu_{sj}|(X)\right). \quad (12.23)$$

Здесь в последнем переходе использовано то, что $|\nu_{aj}| \perp |\nu_{sj}|$, и что для любых зарядов τ, η, из условия $|\tau| \perp |\eta|$ следует, что $|\tau + \eta|(X) = |\tau|(X) + |\eta|(X)$. Тогда по лемме 12.3

$\nu_s \perp \mu$, кроме того, $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu$, где $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$. $f \in L^1(\mu)$, так как

$$\int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_X |f_j|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \|\nu_{aj}\| < \infty. \tag{12.24}$$

Осталось проверить единственность. Если $\nu = \tau_a + \tau_s$, где $\tau_a \prec \mu$, $\tau_s \perp \mu$, то $\nu_a - \tau_a = \tau_s - \nu_s$, причем заряд $\nu_s - \tau_s$ взаимно сингулярен с μ, а $\nu_a - \tau_a$ абсолютно непрерывен относительно μ. По лемме 12.2 это значит, что $\nu_a - \tau_a = \nu_s - \tau_s = 0$, то есть, что $\nu_a = \tau_a$ и $\nu_s = \tau_s$.

Если же $\nu_a = f\,\mathrm{d}\mu = g\,\mathrm{d}\mu$ для некоторых $f, g \in L^1(\mu)$, то

$$\int\limits_X (f - g)\,\mathrm{d}\mu = 0, \tag{12.25}$$

то есть $f = g$ μ-почти всюду на X. ■

Определение. Разложение $\nu = f\,\mathrm{d}\mu + \nu_s$ из предыдущей теоремы называется *разложением Лебега* заряда ν. Функция f называется *плотностью* ν относительно μ или *производной Радона-Никодима* заряда ν по мере μ. Иногда пишут $f = \nu'$, если μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^m$.

13 Лемма Витали и максимальная функция Харди-Литлвуда

Теорема 13.1 (теорема Витали о покрытии). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, G — некоторое семейство (необязательно счетное) невырожденных шаров в X, радиусы которых не превосходят некоторой константы C. Тогда существует такое подмножество $G' \subset G$, что никакие два шара в G' не пересекаются, и

$$\bigcup_{B \in G'} \widehat{B} \supset \bigcup_{B \in G} B,$$

где $\widehat{B}$ — это шар с тем же центром, что и B, радиус которого в 5 раз больше радиуса шара B.

Доказательство. Обозначим $R = \sup_{B \in G} \rho(B)$, где $\rho(B)$ — радиус шара B. По условию, $R < \infty$. Возьмем

$$G_j = \left\{B \in G : \rho(B) \in (2^{-j-1}R, 2^{-j}R]\right\},$$

тогда $G = \bigsqcup_{j=0}^{\infty} G_j$ по построению. Пусть G_0' — произвольный максимальный по включению набор дизъюнктных шаров из G_0.[25] Для $j \geqslant 1$ семейство G_j' определим как произвольный максимальный по включению дизъюнктный набор из G_j, шары которого не пересекаются с шарами из множества $\bigcup_{k=0}^{j-1} G_k'$. Тогда $G' = \bigcup_{j=0}^{\infty} G_j'$ — дизъюнктный набор.

[25] Он существует, например, по лемме Цорна

По построению, если $B \in G_j$, то либо $B \in G'_j$, либо существует шар $B' \in \bigcup_{k=0}^{j} G'_k$: $B \cap B' \neq \varnothing$. Тогда $B \subset \widehat{B'}$, так как

$$\rho(B') + 2\rho(B) \leqslant 5\rho(B') \iff \rho(B) \leqslant 2\rho(B') \tag{13.1}$$

что верно, так как $\rho(B) \leqslant 2^{-j}R$ и $\rho(B') \geqslant 2^{-j-1}R$. ■

Определение. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, причем X — метрическое пространство, и $\mathfrak{A}$ — борелевская σ-алгебра; μ — мера на X, $\mu(B(x,r)) < \infty$ для всех $x \in X$ и $r > 0$; $f \in L^1(\mu)$. Тогда *максимальной* функцией (Харди – Литлвуда) f называется функция

$$(Mf)(x) = f^*(x) = \sup_{B \in B_x} \frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f| \, \mathrm{d}\mu, \tag{13.2}$$

где B_x — множество открытых шаров в X, содержащих x.

Максимальная функция измерима, так как множество $\{x \in X : f^*(x) > t\}$ открыто для любого $t > 0$. Действительно, если $f^*(x) > t$, то существует открытый шар $B \ni x$, для которого выполнено условие

$$\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f| \, \mathrm{d}\mu > t. \tag{13.3}$$

Но тогда $f^*(y) > t$ для любого $y \in B$.

Определение. Борелевская мера μ на метрическом пространстве (X, ρ) называется *мерой, удовлетворяющей условию удвоения*, если

$$\mu(B(x, 2r)) \leqslant c\mu(B(x,r)) \qquad (\forall x \in X)(\forall r > 0),$$

где c не зависит от x и r.

Примеры 13.1.

1. Если μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^m$, то

   $$\mu(B(x, 2r)) = 2^m \mu(B(x,r)) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^m)(\forall r > 0), \tag{13.4}$$

   так как $B(0, 2r) = L(B(0,r))$ для линейного отображения $L\colon x \mapsto 2x$, причем $\det L = \det(\operatorname{diag}(2, 2, \ldots, 2)) = 2^m$. Таким образом, мера Лебега удовлетворяет условию удвоения.

2. Пусть $X = \mathbb{Z}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, μ — считающая мера на X. Она удовлетворяет условию удвоения на (X, ρ). Если же рассмотреть ее на всей σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, то она не будет ему удовлетворять: берем шар $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \varepsilon)$ — при удвоении мера 2, до удвоения — 0.

Теорема 13.2 (Харди, Литлвуд). Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, μ — мера на $\mathfrak{B}(X)$ с условием удвоения, конечная на всех шарах; $f \in L^1(\mu)$.

Тогда

$$\mu\{x : f^*(x) > t\} \leqslant c\frac{\|f\|_{L^1(\mu)}}{t}, \tag{13.5}$$

где константа c не зависит от f и t.

Доказательство. По определению функции f^* выполнено включение

$$X(f^* > t) \subset \bigcup_{B \subset G} B,$$

где G — множество открытых шаров B, для которых выполнено условие

$$\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |f| \,\mathrm{d}\mu > t. \tag{13.6}$$

По теореме Витали можно найти семейство дизъюнктных шаров $G' \subset G$:

$$\bigcup_{B \in G'} \widehat{B} \supset \bigcup_{B \subset G} B. \tag{13.7}$$

Ясно, что

$$X(f^* > t) \subset \bigcup_{B \in G'} \widehat{B}. \tag{13.8}$$

Поскольку пространство X сепарабельно, можно считать, что G' счетно. Значит,

$$\mu(\{x : f^*(x) > t\}) \leqslant \sum_{B \in G'} \mu(\widehat{B}), \tag{13.9}$$

Далее, так как μ — мера с условием удвоения, $\mu(\widehat{B}) \leqslant \mu(8B) \leqslant c^3\mu(B)$, и

$$\sum_{B \in G'} \mu(\widehat{B}) \leqslant \widetilde{c} \sum_{B \in G'} \mu(B) \leqslant \widetilde{c} \sum_{B \in G'} \frac{1}{t} \int\limits_B |f| \,\mathrm{d}\mu, \tag{13.10}$$

Отсюда следует искомое неравенство:

$$\mu\{x : f^*(x) > t\} \leqslant \widetilde{c} \sum_{B \in G'} \frac{1}{t} \int\limits_B |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\widetilde{c}\|f\|_{L^1(\mu)}}{t}. \tag{13.11}$$

■

Замечание. В доказательстве использована теорема Витали, в которой шары имеют ограниченный радиус. Это условие автоматически выполняется, если $\mu(X) = +\infty$. Если же $\mu(X) < \infty$, то надо доказать равномерную по $R > 0$ оценку для модифицированной функции Х-Л, в определении которой sup берется по шарам радиуса не выше R, и перейти к пределу по $R \to +\infty$.

Теорема 13.3. Пусть (X, ρ) — полное сепарабельное метрическое пространство, μ — мера с условием удвоения на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X)$, ν — мера на $\mathfrak{B}(X)$. Предположим, что $\mu(B(x,r)) > 0$ для всех $x \in X$ и $r > 0$, а $\nu(X) < \infty$. Тогда, если $\nu \perp \mu$, то для μ-почти всех $x \in X$

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 0. \tag{13.12}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что множества

$$E_k = \left\{ x : \lim_{r\to 0} \sup_{B\in B_x} \frac{\nu(B)}{\mu(B)} \geqslant \frac{1}{k} \right\},$$

где B_x — множество открытых шаров, содержащих x и удовлетворяющих условию $\rho(B) < r$, измеримы и имеют ν-меру ноль, то есть $\nu(E_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любой точки $x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ будет выполнено равенство (13.12).

Множество E_k измеримо, так как оно равно $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_{kj}$, где

$$E_{kj} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists B \ni x,\ \rho(B) \leqslant \frac{1}{j} : \frac{\nu(B)}{\mu(B)} \geqslant \frac{1}{k} \right\},$$

а E_{kj} — открыто.

Так как $\mu \perp \nu$, то $\nu(A) = 0$, $\mu(X \setminus A) = 0$ для некоторого $A \subset X$. Поскольку мера ν конечна, она регулярна, а значит для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество U_ε, что $E_k \cap A \subset U_\varepsilon$ и $\nu(U_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

$E_k \cap A \subset \bigcup_{B\in G} B$, где G — множество открытых шаров $B \subset U_\varepsilon$, таких, что

$$\frac{\nu(B)}{\mu(B)} \geqslant \frac{1}{2k}. \tag{13.13}$$

Пусть $G' \subset G$ — счетное семейство шаров из теоремы Витали. Тогда:

$$\begin{aligned}
\mu(E_k \cap A) &\leqslant \sum_{B\in G'} \mu(\widehat{B}) \leqslant c \sum_{B\in G'} \mu(B) && (13.14)\\
&\leqslant 2kc \sum_{B\in G'} \nu(B) && (13.15)\\
&\leqslant 2kc \cdot \nu(U_\varepsilon) && (13.16)\\
&\leqslant 2kc\varepsilon. && (13.17)
\end{aligned}$$

Так как это выполнено для всех $\varepsilon > 0$, отсюда следует, что $\mu(E_k \cap A) = 0$. ∎

14 Дифференцирование мер

Теорема 14.1. Пусть (X, ρ) — полное сепарабельное локально компактное метрическое пространство, μ — мера на $\mathfrak{B}(X)$, положительная и конечная на всех шарах, ν — заряд на $\mathfrak{B}(X)$. Тогда для μ-почти всех $x \in X$ существует предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = f(x), \tag{14.1}$$

где f — производная Радона – Никодима заряда ν по мере μ.

Доказательство. По теореме Радона – Никодима, $\nu = f\,\mathrm{d}\mu + \nu_s$, где $f \in L^1(\mu)$, $\nu_s \perp \mu$. По предыдущей теореме

$$\limsup_{r\to 0}\left|\frac{\nu_s(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}\right| = 0$$

для μ-почти всех $x \in X$. Для $x \in X$, $B = B(x,r)$ и произвольной $g \in C_0(X)$ верна следующая оценка:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}\mu(y) &\leqslant \frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\quad+\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g(y)-g(x)|\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\quad+\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\mu(y) \qquad (14.2)\\ &\leqslant (f-g)^*(x)+\varepsilon(g,r)+|g(x)-f(x)|, \qquad (14.3)\end{aligned}$$

где $\varepsilon(g,r)\xrightarrow[r\to 0]{} 0$. Обозначим левую часть через $S(x,r)$. Выберем $g \in C_0(X)$ так, чтобы было выполнено неравенство $\|f-g\|_{L^1(\mu)} < \eta$. Выберем такое R, что для любого $r \leqslant R$ выполнено $\varepsilon(g,r) < t/3$. Тогда для $r \leqslant R$

$$\begin{aligned}\mu\left\{x : \limsup_{r\to 0} S(x,r) > t\right\} &\leqslant \mu\left\{x : (f-g)^*(x) > \frac{t}{3}\right\} + \mu\left\{x : |f(x)-g(x)| \geqslant \frac{t}{3}\right\} \qquad (14.4)\\ &\leqslant \frac{\|f-g\|_{L^1(\mu)}}{t/3} + \frac{1}{t/3}\int_X |f-g|\,\mathrm{d}\mu < 6\eta/t \qquad (14.5)\end{aligned}$$

по теореме Харди – Литлвуда и неравенству Чебышева. Это неравенство выполнено для любого $\eta > 0$. Значит,

$$\mu\left\{x : \limsup_{r\to 0} S(x,r) > t\right\} = 0.$$

Осталось показать, что при μ-почти всех $x \in X$

$$\left|\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f\,\mathrm{d}\mu - f(x)\right| \to 0.$$

Действительно,

$$\left|\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f\,\mathrm{d}\mu - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}\mu \to 0,$$

так как $f(x) = \frac{1}{\mu(B)}\int_B f(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$. ∎

Замечание. Независимость $\varepsilon(g,r)$ от x следует из равномерной непрерывности функции $g \in C_0(X)$ (носитель g — компакт).

Определение. Семейство множеств $\{E_r(x)\}_{\substack{x\in X\\ r>0}} \subset \mathfrak{B}(X)$ называется *регулярно стягиваемым* относительно меры μ на $\mathfrak{B}(X)$, если:

1. $E_r(x) \subset B(x,r)$;

2. для любого $x \in X$ найдется такое число $c_x > 0$, что $\mu(E_r(x)) \geqslant c_x\mu(B(x,r))$ для любого $r > 0$.

Пример 14.1. Множество $E_r(x) = \left\{x + (\frac{r}{2}, r)\right\}_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ r>0}}$ является регулярно стягиваемым относительно λ_1 на $\mathbb{R}$.

Теорема 14.2. В предыдущей теореме о дифференцировании мер можно заменить $B(x,r)$ на $E_r(x)$ для любого регулярно стягиваемого семейства $E_r(x)$ относительно меры μ.

Доказательство. Если $\nu = f\,\mathrm{d}\mu + \nu_s$, то

$$\left|\frac{\nu_s(E_r(x))}{\mu(E_r(x))}\right| \leqslant \frac{|\nu_s|(B(x,r))}{c_x\mu(B(x,r))} \xrightarrow[r\to 0]{} 0. \tag{14.6}$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\mu(E_r(x))}\int\limits_{E_r(x)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}\mu(y) \leqslant \frac{1}{c_x\mu(B(x,r))}\int\limits_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \xrightarrow[r\to 0]{} 0, \tag{14.7}$$

откуда

$$\frac{1}{\mu(E_r(x))}\int\limits_{E_r(x)} f(y)\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[r\to 0]{} f(x). \tag{14.8}$$

■

15 Теоретическая контрольная

Примеры задач:

1. Докажите неравенство $\mu(\{x \in X : f(x) \geqslant 0\}) \leqslant \int\limits_X e^f\,d\mu$ для каждой измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ на пространстве с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (2 балла).

2. Пусть μ, ν – борелевские меры на $\mathbb{R}^m$, такие, что $\mu(I) \leqslant \nu(I) < \infty$ для любой ячейки $I \subset \mathbb{R}^m$. Докажите, что если $\mu(\mathbb{R}^m) = \nu(\mathbb{R}^m) = 1$, то $\mu(A) = \nu(A)$ для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^m$. (2 балла)

3. Пусть μ – борелевская мера на сепарабельном метрическом пространстве (X, ρ). Докажите, что среди всех замкнутых подмножеств X μ-полной меры существует наименьшее по включению. (3 балла)

4. Пусть μ – конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$. Найдите предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{1-\arctan x^n}{1+\arctan x^n}\, d\mu(x)$$

   в терминах значений μ на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$. (3 балла)

5. Докажите, что отображение $t \mapsto \lambda_1(E\triangle(E+t))$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$ для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}$ конечной меры Лебега λ_1 (3 балла)

6. Докажите, что для любой последовательности комплексных чисел $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ со свойством $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ ряд $\sum c_k \sin kx$ сходится по мере Лебега на $[-\pi, \pi]$ (3 балла)

Определение. Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, μ — борелевская мера на (X, ρ). *Носителем* меры μ называется замкнутое множество $\operatorname{supp}\mu$: $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ и для любого замкнутого в X множества H такого, что $\mu(X \setminus H) = 0$ $\operatorname{supp}\mu \subset H$.

Утверждение 15.1. Носитель существует.

Доказательство. Понятно, что существование носителя эквивалентно существованию наибольшего по включению открытого множества нулевой меры. Рассмотрим $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — всюду плотное подмножество в X, $U = \bigcup_{B\in G} B$, где G — семейство открытых шаров с центрами в точках $\{x_k\}$, рациональными радиусами и такими, что $\mu(B) = 0$. Очевидно, что G не более чем счетно. Пусть V — открыто, $\mu(V) = 0$. Беря любую точку в V, мы можем найти достаточно близкую к ней точку x_k и шар достаточно малого рационального радиуса, который будет содержаться в V, причем его мера будет равна нулю. Поэтому $V = \bigcup_{B\in G: B\subset V} B \subset \bigcup_{B\in G} B = U$, то есть U максимально по включению. Тогда можно взять $H = X \setminus U$. ■

16 Функции ограниченной вариации

Напомним определение.

Определение. Говорят, что функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеют *ограниченную вариацию*, если

$$V_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| < \infty, \tag{16.1}$$

где супремум берется по всем разбиениям $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$. Будем обозначать множество функций с ограниченной вариацией берез BV.

Мы доказывали, что $f \in \mathrm{BV}$ тогда и только тогда, когда существуют неубывающие, ограниченные на $[a,b]$ функции g, h такие, что $f = g - h$ (можно просто задать $g = V_{[a,x]}(f)$ и $h = g - f$).

Определение. Пусть ψ — неубывающая непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Определим

$$\nu_\psi\colon \mathcal{P}_1 \to [0,+\infty), \quad [a,b) \mapsto \psi(b)-\psi(a). \tag{16.2}$$

Теорема 16.1. Для любой непрерывной слева неубывающей функции ψ на $\mathbb{R}$ функция множества ν_ψ счетно-аддитивна на $\mathcal{P}_1$. В частности, она продолжается единственным образом до меры ν_ψ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$:

$$\psi(b)-\psi(a) = \int\limits_{[a,b)} \mathrm{d}\nu_\psi \tag{16.3}$$

для любой ячейки $[a,b)$. Наоборот, если дана некоторая мера ν_ψ, функция ψ и выполнено равенство (16.3), то ψ — непрерывная слева неубывающая функция на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидно, что ν_ψ конечно-аддитивна на $\mathcal{P}_1$. Поэтому достаточно проверить, что ν_ψ счетно-полуаддитивна на $\mathcal{P}_1$. Пусть $[a,b) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)$. Как и при проверке счетной полуаддитивности λ_1, для всех $t<b$ и $\varepsilon>0$ можно выбрать числа $\widetilde{a}_k < a_k$ и $N\in\mathbb{N}$ так, что

$$\bigcup_{k=1}^{N}(\widetilde{a}_k,b_k) \supset [a,t], \qquad \sum_{k=1}^{N}\nu_\psi([a_k,b_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\nu_\psi([a_k,b_k]) + \varepsilon \tag{16.4}$$

(здесь мы воспользовались компактностью $[a,t]$ и непрерывностью слева ψ). Поскольку $\bigcup_{k=1}^{N}(\widetilde{a}_k,b_k)$ конечно и содержит $[a,t]$, то

$$\nu([a,t)) \leqslant \sum_{k=1}^{N}\nu([\widetilde{a}_k,b_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\nu([a_k,b_k)) + \varepsilon, \tag{16.5}$$

а потому

$$\nu([a,t)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\nu([a_k,b_k)) \qquad (\forall t: a\leqslant t<b). \tag{16.6}$$

Поскольку ψ непрерывна слева, $\psi(t)\to\psi(b)$ при $t\to b,\ t<b$, то есть $\nu([a,t))\to\nu([a,b))$. По теореме Каратеодори ν_ψ продолжается на некоторую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{P}_1$, а значит и на $\mathfrak{B}(\mathcal{P}_1)$.

Пусть теперь для некоторых ψ и ν выполнено

$$\psi(b)-\psi(a) = \int\limits_{[a,b)} \mathrm{d}\nu. \tag{16.7}$$

Этот интеграл равен $\nu([a,b))$, а потому $\psi(b)-\psi(a)\geqslant 0$, то есть ψ неубывает. Так как ν — мера, то

$$\psi(b)-\psi(a) = \nu([a,b)) = \lim_{\substack{t\to b\\ a\leqslant t<b}} \nu([a,t)) = \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}}(\psi(t)-\psi(a)), \tag{16.8}$$

что равносильно тому, что

$$\lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \psi(t) = \psi(b), \tag{16.9}$$

то есть непрерывности ψ слева. ■

Упражнение. Доказать, что для любой меры ν, конечной на $\mathcal{P}_1$, существует единственное отображение ψ такое, что $\psi(b) - \psi(a) = \nu([a,b))$, $\psi(0) = 0$.

Утверждение 16.2. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой, в котором все одноточечные множества измеримы. Тогда существуют меры μ_c, μ_p на $\mathfrak{A}$ такие, что $\mu = \mu_c + \mu_p$, $\mu_c(\{x\}) = 0\ \forall x \in X$, а

$$\mu_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{x_k}, \tag{16.10}$$

где $a_k \geqslant 0$.

Отображение μ_p из этого утверждения называется *чисто точечной* частью μ.

Доказательство. Так как μ — σ-конечна, существует не более чем счетный набор точек x_k таких, что $\mu(\{x_k\}) \neq 0$. Действительно, найдем такие множества X_j, что $\bigsqcup X_j = X$, $\mu(X_k) < \infty$ для всех j. Тогда для любого конечного набора $\{x_{k_s}\}_{s=1}^M \subset \{x_k\}$, лежащего в X_j, выполнено неравенство

$$\sum_{s=1}^{M} \mu(x_{k_s}) \leqslant \mu(X_j), \tag{16.11}$$

значит в каждом X_j содержится не более чем счетное число точек x_j. Тогда мы можем просто взять

$$\mu_p = \sum \mu(\{x_k\})\delta_{x_k}, \tag{16.12}$$

$$\mu_c = \mu - \mu_p. \tag{16.13}$$

Очевидно, что это как раз те функции, которые требовалось найти. ■

Определение. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой, в котором все одноточечные множества $\{x\}$ измеримы, $\mu = \mu_c + \mu_p$ — разложение μ из предыдущего утверждения. Тогда μ_c называется *непрерывной частью* меры μ.

Замечание. Любая борелевская σ-конечная мера на $\mathbb{R}$ может быть представлена в виде $f\, \mathrm{d}\lambda_1 + \mu_{sc} + \mu_{sp}$, где $\mu_s = \mu_{sc} + \mu_{sp} \perp \lambda_1$, и μ_{sc}, μ_{sp} — непрерывная и чисто точечная части μ_s (это следствие теоремы Радона-Никодима и утверждения 16.2).

Пример 16.1 (Канторова мера). Пусть ψ — “канторова лестница”. Построим $\tilde{\psi}$ на дополнении канторова множества, так что $\tilde{\psi}(0) = 0$, $\tilde{\psi}(1) = 1$, $\tilde{\psi}$ на среднем интервале равно $1/2$, на интервалах длины $1/9$ $\tilde{\psi}$ равно $1/4$ и $3/4$, и т.п. Далее определим функцию

$$\psi(x) = \sup_{y \leqslant x} \widetilde{\psi(y)}$$

которую и называют “канторова лестница”. По построению понятно, что ψ монотонна. Можно также проверить, что $\psi \in C[0,1]$, так как если $x \in (0,1)$, то на шаге построения m канторова множества (когда построено $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^m$ интервалов) найдутся дополнительные интервалы J_1, J_2 такие, что $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2\ \forall x_1 \in J_1,\ x_2 \in J_2$, и $\widetilde{\psi}(x_2) - \widetilde{\psi}(x_1) \leqslant \frac{1}{2^m}$ (для больших m). $\widetilde{\psi}(x_1) = \psi(x_1) \leqslant \psi(x_0) \leqslant \psi(x_2) = \widetilde{\psi}(x_2) \implies \forall y \in [x_1^*, x_2^*]$, где x_{12}^* — центры отрезков J_1 и J_2, $|\psi(y) - \psi(x_0)| \leqslant \frac{1}{2^m}$.

Продолжим ψ на $\mathbb{R}$ следующим образом: $\psi(x) = 0\ \forall x < 0$ и $\psi(x) = 1\ \forall x > 1$. Тогда $\psi \in C(\mathbb{R})$, причем ψ не убывает на $\mathbb{R}$, то есть существует мера μ такая, что $\psi(b) - \psi(a) = \mu([a,b))\ \forall a \leqslant b$. В частности, $\mu([1,+\infty)) = 0$, $\mu((\infty,0]) = 0$, $\mu(I_k) = 0$ для любого дополнительного интервала I_k. Таким образом, $\mu(\mathbb{R} \setminus C) = 0$. Значит, $\mu \perp \lambda_1$, так как $\lambda_1(C) = 0$.

Поймем, что чисто точечная часть этой меры равна нулю. Пусть $\exists x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0$. Тогда $\lim_{\delta \to 0^+} (\psi(x+\delta) - \psi(x)) = \mu([x, x+\delta]) \geqslant \mu(\{x\})$, что приводит к противоречию. Осталось заметить, что $1 = \psi(1) - \psi(0) = \mu([0,1))$, то есть мера ненулевая.

Теорема 16.3. Пусть $\psi \in \mathrm{BV}[a,b]$, причем ψ непрерывна слева. Тогда существует единственный заряд ν на $\mathfrak{B}([a,b))$ такой, что

$$\psi(x) = \psi(a) + \nu([a,x)) \qquad (\forall x \in [a,b]). \tag{16.14}$$

Доказательство. $\psi = h - g$, где h, g — нестрого возрастающие ограниченные функции, h, g — непрерывны слева ($h = V_{[a,x)}\psi$, $g = h - \psi$). Продолжим эти функции на $\mathbb{R}$ так, что

$$\begin{aligned} h(x) &= h(a), \quad g(x) = g(a) \qquad (\forall x < a),\\ h(x) &= h(b), \quad g(x) = g(b) \qquad (\forall x > b). \end{aligned}$$

Тогда существуют меры μ_h, μ_g такие, что

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= \mu_h([x_1, x_2)),\\ g(x_2) - g(x_1) &= \mu_g([x_1, x_2)). \end{aligned}$$

Тогда $\nu = \mu_h - \mu_g$, и

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \nu([x_1, x_2)) \qquad (\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 \leqslant x_2). \tag{16.15}$$

Значит,

$$\psi(x) = \psi(a) + \nu([a,x)) \qquad (\forall x \in [a,b]). \tag{16.16}$$

Очевидно, что если есть мера $\widetilde{\nu}$, удовлетворяющая равенству (16.16), то

$$\nu[a,x) = \widetilde{\nu}[a,x) \qquad (\forall x \in [a,b]), \tag{16.17}$$

откуда очевидно, что $\nu[x_1, x_2) = \widetilde{\nu}[x_1, x_2)$ и $\nu = \widetilde{\nu}$ на $\mathfrak{B}([a,b))$. ■

Замечание. Если ν — заряд на $\mathfrak{B}([a,b))$, то $\psi\colon x \mapsto \psi(a) + \nu([a,x))$ — непрерывная слева функция ограниченной вариации.

Упражнение. Доказать, что $|\nu|([a,b)) = V_{[a,b]}\psi$.

Теорема 16.4. Пусть $\psi \in \mathrm{BV}[a,b]$ — непрерывная слева функция, ν — такой заряд, что выполнено равенство

$$\psi(x) = \psi(a) + \nu([a,x)) \qquad (\forall x \in [a,b]). \tag{16.18}$$

Пусть $\nu = f\,\mathrm{d}\lambda_1 + \nu_s$ — разложение из теоремы Радона-Никодима. Тогда для почти всех (по мере Лебега) $x \in [a,b]$ существует предел

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in[a,b]}} \frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y} = f(x). \tag{16.19}$$

Доказательство. Можно считать, что ψ — возрастающая функция на $[a,b]$ (иначе $\psi = g - h$ и $\mu_{a,\psi} = \mu_{a,g} - \mu_{a,h}$ в силу единственности в теореме Радона-Никодима). Рассмотрим $\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y}$ для $x < y$, где $x, y \in (a,b)$.

$$\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y} = \frac{\nu([x,y))}{\lambda_1([x,y))} \xrightarrow[y\to x]{} f(x)$$

для λ_1-почти всех $x \in (a,b)$, так как $\{[x,y)\}_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x<y}}$ — регулярно стягиваемое семейство и можно воспользоваться теоремой о дифференцировании мер.

Если же $y < x$ и $y, x \in (a,b)$, то

$$\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y} = \frac{\nu([y,x))}{\lambda_1[y,x)}. \tag{16.20}$$

Отсюда

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} \frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\nu(E_{x,\varepsilon})}{\lambda_1(E_{x,\varepsilon})}, \tag{16.21}$$

где $E_{x,\varepsilon} = [x - \frac{\varepsilon}{2}, x)$. Тогда $\{E_{x,\varepsilon}\}$ — регулярно стягиваемое семейство относительно λ_1 (так как $E_{x,\varepsilon} \subset B(x,\varepsilon)$, $\lambda_1(E_{x,\varepsilon}) > \frac{1}{10}\lambda_1(B(x,\varepsilon))$). Значит, при почти всех x существует искомый предел, и он равен $f(x)$. ∎

Следствие 16.5. Если $\psi \in \mathrm{BV}[a,b]$, то для почти всех $x \in [a,b]$ существует $\psi'(x)$.

Доказательство. Как и раньше, можно считать, что ψ возрастает. Положим $\widetilde{\psi} = \sup_{y<x}\psi(y)$. Тогда $\widetilde{\psi}$ — непрерывная слева ограниченная неубывающая на $[a,b]$ функция, в частности, $\widetilde{\psi} \in \mathrm{BV}[a,b]$, и по предыдущей теореме существует $\widetilde{\psi}'(x)$ при почти всех $x \in [a,b]$. Осталось понять, что $h = \psi - \widetilde{\psi}$ дифференцируема почти всюду. Это так, поскольку у возрастающей функции не более счетное число разрывов и $\widetilde{\psi} \leqslant \psi$, то есть $h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\{x_k\}}$, $c_k \geqslant 0$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, так как c_k — скачок ψ в x_k. Возьмем меру $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \delta_{x_k}$. По построению, $\nu([a,b]) < \infty$, $\nu \perp \lambda_1$.

$$\left|\frac{h(x)-h(y)}{x-y}\right| \leqslant \frac{\nu(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}{2\varepsilon} \cdot 2, \tag{16.22}$$

где $\varepsilon = |x - y|$. Правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ почти всюду относительно λ_1 по теореме о дифференцировании мер, так как $\nu \perp \lambda_1$. ■

17 Меры Хаусдорфа

Определение. *Диаметром* множества F называется число

$$\operatorname{diam} F = \sup_{x,y\in F} (\|x - y\|). \tag{17.1}$$

Определение. Пусть $p > 0$, $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Определим функцию

$$H^*_{p,\varepsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2} \right)^p \right\}, \tag{17.2}$$

где инфимум берется по всем счетным *ε-покрытиям* A, то есть по всем семействам $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ таким, что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k$, $\operatorname{diam} e_k \leqslant \varepsilon$.

Определение. *Внешней p-мерой Хаусдорфа* на $\mathbb{R}^m$ называется функция

$$H^*_p(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} H^*_{p,\varepsilon}(A) \qquad (\forall A \subset \mathbb{R}^m). \tag{17.3}$$

Очевидно, что $H^*_{p,\varepsilon}$ — невозрастающая функция по ε, а потому такой предел существует и определение корректно.

Отметим также, что функция $H^*_{p,\varepsilon}(A)$ не зависит от того, в какое пространство вложено A.

Теорема 17.1. H^*_p — внешняя мера на $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Очевидно, что $H^*_p(\varnothing) = 0$. Пусть теперь $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Будем считать, что $\sum_{k=1}^{\infty} H^*_p(A_k) < +\infty$, так как иначе неравенство (2) в определении внешней меры очевидно. Тогда по определению предела для каждого $k \in \mathbb{N}$ и фиксированного числа $\varepsilon > 0$ существует набор $\{e_{kj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ такой, что $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} e_{kj}$, $\operatorname{diam} e_{kj} < \varepsilon$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_{kj}}{2} \right)^p \leqslant H^*_{p,\varepsilon}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{17.4}$$

Ясно, что $\{e_{kj}\}_{k,j\in\mathbb{N}}$ — покрытие A. Поэтому

$$H^*_{p,\varepsilon}(A) \leqslant \sum_{k,j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_{kj}}{2} \right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(H^*_{p,\varepsilon}(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} H^*_p(A_k) + \varepsilon. \tag{17.5}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое неравенство. ■

Определение. Для $p > 0$ через $\mathfrak{A}_{H^*_p}$ будем обозначать σ-алгебру H^*_p-измеримых множеств. Мера $H_p = H^*_p|\mathfrak{A}_{H^*_p}$ называется *мерой Хаусдорфа* с показателем p.

Определение. Множества $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^m$ называются *разделенными*, если

$$\operatorname{dist}(A_k, A_j) > 0 \qquad (\forall k \neq j). \tag{17.6}$$

Лемма 17.2. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — разделенные множества в $\mathbb{R}^m$. Тогда

$$H_p^*\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} H_p^*(A_k) \tag{17.7}$$

Доказательство. По индукции все сводится к случаю $n = 2$. Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}^m$ таковы, что $\operatorname{dist}(A, B) = \delta > 0$. Если $\varepsilon < \delta$ и $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ — ε-покрытие $A \sqcup B$, то для любого k либо $e_k \cap B = \varnothing$, либо $e_k \cap A = \varnothing$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2}\right)^p \geqslant \sum_{k: e_k\cap A\neq\varnothing}\left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2}\right)^p + \sum_{k: e_k\cap B\neq\varnothing}\left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2}\right)^p \tag{17.8}$$

$$\geqslant H_{p,\varepsilon}^*(A) + H_{p,\varepsilon}^*(B). \tag{17.9}$$

Беря инфимум по ε-покрытиям в левой части и переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство $H_p^*(A \sqcup B) \geqslant H_p^*(A) + H_p^*(B)$. Обратное неравенство выполняется, поскольку H_p^* — внешняя мера. ∎

Теорема 17.3. Пусть μ^* — внешняя мера на $\mathbb{R}^m$, конечно-аддитивная на разделенных множествах; $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mu^*)$ — σ-алгебра множеств, измеримых относительно μ^*. Тогда $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathfrak{U}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что замкнутые множества μ^*-измеримы. Пусть F — замкнуто в $\mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное множество. Покажем, что $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F)$. Положим для $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, F) \leqslant \frac{1}{n}\right\}. \tag{17.10}$$

Тогда $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, а множества $E \cap F$ и $E \setminus F_n$ разделены. Значит,

$$\mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F_n) = \mu^*\big((E \cap F) \sqcup (E \setminus F_n)\big) \leqslant \mu^*(E). \tag{17.11}$$

Таким образом, достаточно показать, что $\mu^*(E \setminus F_n) \to \mu^*(E \setminus F)$ при $n \to \infty$, причем можно считать, что $\mu^*(E) < \infty$ (иначе требуемое неравенство очевидно). Заметим, что[26]

$$E \setminus F = (E \setminus F_n) \sqcup \bigsqcup_{k=n}^{\infty} \big((E \cap F_k) \setminus F_{k+1}\big). \tag{17.12}$$

Поэтому

$$\mu^*(E \setminus F_n) \leqslant \mu^*(E \setminus F) \leqslant \mu^*(E \setminus F_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*\big((E \cap F_k) \setminus F_{k+1}\big). \tag{17.13}$$

[26]Здесь полезно нарисовать картинку.

Таким образом, достаточно доказать, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\big((E \cap F_k) \setminus F_{k+1}\big) < \infty$ (так как хвост сходящегося ряда стремится к нулю). Возьмем $M \in \mathbb{N}$ и рассмотрим семейство разделенных множеств $\{(E \cap F_{2k}) \setminus F_{2k+1}\}_{k=1}^{M}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*((E \cap F_{2k}) \setminus F_{2k+1}) = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \mu^*((E \cap F_{2k}) \setminus F_{2k+1}) \leqslant \mu^*(E) < \infty. \tag{17.14}$$

Аналогично, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap F_{2k+1} \setminus F_{2k+2}) < \infty$, а значит сходится весь ряд. ■

В частности, из этой теоремы следует, что $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathfrak{U}(H_p^*)$.

Наша следующая цель — доказать, что σ-алгебры, на которых определены мера Лебега и мера Хаусдорфа, совпадают. Для этого понадобятся несколько лемм.

Лемма 17.4. Для любого множества $e \in \mathbb{R}^m$ $\lambda_m^*(e) = 0 \iff H_m^*(e) = 0$.

Доказательство.

$\implies$ Пусть $\lambda_m^*(e) = 0$. Тогда существует набор кубических ячеек $\{Q_j\}_{j\geqslant 1}$ такой, что $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$, $\sum \lambda_m(Q_j) < \varepsilon$, $\operatorname{diam} Q_j < \varepsilon\ \forall j$. Нетрудно видеть, что

$$H_{m,\varepsilon}^*(e) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} Q_j}{2}\right)^m \leqslant c_m \sum \lambda_m(Q_j) \leqslant c_m\varepsilon, \tag{17.15}$$

где c_m зависит лишь от m (у кубической ячейки заданного диаметра легко посчитать меру Лебега). Значит, $H_m^*(e) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_{m,\varepsilon}^*(e) = 0$.

$\impliedby$ Наоборот, пусть $H_m^*(e) = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует такой набор множеств $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$, что $\bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \supset e$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_j}{2}\right)^m < \varepsilon. \tag{17.16}$$

Тогда

$$\lambda_m^*(e) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m^*(e_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m\big(B(0, \operatorname{diam} e_j)\big) \tag{17.17}$$

$$\leqslant \widetilde{c}_m \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_j}{2}\right)^m \leqslant \widetilde{c}_m \cdot \varepsilon, \tag{17.18}$$

где $\widetilde{c}_m$ зависит только от m. После этого остается лишь перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$. Неравенство (17.17) выполнено, так как

$$\lambda_m\big(B(0, \operatorname{diam} e_j)\big) = \lambda_m\big(\operatorname{diam} e_j \cdot B(0,1)\big) = (\operatorname{diam} e_j)^m \cdot \lambda_m\big(B(0,1)\big), \tag{17.19}$$

то есть $\widetilde{c}_m = 2^m \cdot \lambda_m\big(B(0,1)\big)$. ■

Лемма 17.5. Пусть $Q = [0,1]^m$ — единичный куб. Тогда $0 < H_m^*(Q) < +\infty$.

Доказательство. Первое неравенство напрямую следует из леммы 17.4, так как $\lambda_m(Q) = 1$. Осталось проверить второе неравенство. Для этого разобьем Q на N^m одинаковых кубов Q_j диаметра $\frac{\sqrt{m}}{N}$. Они образуют $\frac{\sqrt{m}}{N}$-покрытие Q, а потому

$$H^*_{m,\frac{\sqrt{m}}{N}} \leqslant \sum_{j=1}^{N^m} \left(\frac{\operatorname{diam}(Q_j)}{2}\right)^m = N^m \left(\frac{\sqrt{m}}{2N}\right)^m = 2^{-m} m^{\frac{m}{2}}. \tag{17.20}$$

Значит,

$$H^*_m(Q) = \lim_{N\to\infty} H_{m,\frac{\sqrt{m}}{N}}(Q) \leqslant 2^{-m} m^{\frac{m}{2}} < +\infty, \tag{17.21}$$

что и требовалось. ■

Лемма 17.6. Для любого H^*_m-измеримого множества E существуют такие множества C и e, что $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, $H^*_m(e) = 0$ и $C = E \sqcup e$.

Доказательство. Можно считать, что E ограничено (иначе можно разбить на $E \cap [-n, n]^m$). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $C_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{e}_j$, где $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ — $1/k$-покрытие E такое, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_j}{2}\right)^m \leqslant H^*_{m,\frac{1}{k}}(E) + \frac{1}{k}.$$

Как счетное объединение замкнутых множеств, $C_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Значит, $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ тоже лежит в $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Отметим, что $C_k \supset E$ для всех k, а потому $C \supset E$.

$$H^*_{m,\frac{1}{k}}(E) \leqslant H^*_{m,\frac{1}{k}}(C) \leqslant H^*_{m,\frac{1}{k}}(C_k) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} \overline{e}_j}{2}\right)^m \tag{17.22}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_j}{2}\right)^m \leqslant H^*_{m,\frac{1}{k}}(E) + \frac{1}{k}. \tag{17.23}$$

Переходя к пределу $k \to \infty$, получаем равенство $H_m(E) = H_m(C)$.

Из леммы 17.5 и ограниченности E следует, что $H_m(E) = H_m(C) < \infty$. Значит, можно взять $e = C \setminus E$, $H_m(e) = H_m(C) - H_m(E) = 0$. ■

Утверждение 17.7. Мера Лебега определена на той же σ-алгебре, что и мера Хаусдорфа, то есть $\mathfrak{U}_{H^*_m} = \mathfrak{U}_{\lambda^*_m}$.

Доказательство. Если $E \in \mathfrak{U}_{H^*_m}$, то по предыдущей лемме $E = C \setminus e$, где $H^*_m(e) = 0$, $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\lambda^*_m(e) = 0$, в частности, $e \in \mathfrak{U}_{\lambda^*_m}$, и $E \in \mathfrak{U}_{\lambda^*_m}$.

В обратную сторону: если $E \in \mathfrak{U}_{\lambda^*_m}$, то $E = C \sqcup e$, где $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, $\lambda^*_m(e) = 0$, откуда точно также следует $H^*_m(e) = 0$ и $E \in \mathfrak{U}_{H^*_m}$. ■

Лемма 17.8. Для некоторого $k \in (0, +\infty)$ выполнено равенство $k\lambda_m = H_m$ на $\mathfrak{U}_{\lambda^*_m} = \mathfrak{U}_{H^*_m}$.

Доказательство. Это очевидным образом следует из того, что мера H_m инвариантна относительно сдвигов, теоремы **??** и леммы 17.5. ■

Осталось вычислить меру Хаусдорфа единичного куба.

Теорема 17.9 (изодиаметрическое неравенство). Если $e \subset \mathbb{R}^m$, $\operatorname{diam} e \leqslant h$. Тогда

$$\lambda_m(\overline{e}) \leqslant \lambda_m\big(B(0, h/2)\big). \tag{17.24}$$

Иначе говоря, шар — наибольший по мере Лебега компакт фиксированного диаметра.

Доказательство.

(1) *Если K — замкнуто в $\mathbb{R}$, $\operatorname{diam}(K) < \infty$, то $\lambda_1(K - K) \geqslant 2\lambda_1(K)$.*[27]

Действительно,

$$K - K \supset A_1 \sqcup A_2 = (K \setminus \{\min K\} - \min K) \sqcup (K \setminus \{\max K\} - \max K),$$

где $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, так как если $x - \min K = y - \max K$, то $y - x = \max K - \min K$, то есть $y = \max K$, а $x = \min K$, что невозможно. Значит,

$$\lambda_1(A_1) + \lambda_1(A_2) \leqslant \lambda_1(K - K), \tag{17.25}$$

откуда $2\lambda_1(K) \leqslant \lambda_1(K - K)$, так как $\lambda_1(A_1) = \lambda_1(A_2) = \lambda_1(K)$.

(2) *Пусть E — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^m$, $\operatorname{diam} E < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant m$,*

$$\Omega_i(E) = \left\{\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \frac{x_i - \widetilde{x}_i}{2}, x_{i+1}, \ldots, x_m\right)\right\},$$

где множество $\Omega_i(E)$ берется по всем наборам

$$(x_1, \ldots, x_m) \in E \quad \text{и} \quad (x_1, \ldots, x_{i-1}, \widetilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in E.$$

Тогда $\Omega_i(E)$ — замкнуто в $\mathbb{R}^m$, и $\lambda_m(E) \leqslant \lambda_m(\Omega_i(E))$.[28]

Докажем сначала замкнутость. Если есть последовательность точек

$$\left\{\left(x_{1j}, \ldots, x_{i-1,j}, \frac{x_{ij} - \widetilde{x}_{ij}}{2}, x_{i+1,j}, \ldots, x_{mj}\right)\right\}_{j \geqslant 1},$$

то пользуясь компактностью $[-\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} E]^m$ можно выбрать общую сходящуюся подпоследовательность в $\{x_j\}$ и $\{\widetilde{x}_j\}$, и получить последовательность точек выше сходится к какому-то элементу из E. Таким образом, множество $\Omega_i(E)$ замкнуто. Неравенство следует из теоремы Тонелли:

$$\lambda_m(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_E \, \mathrm{d}\lambda_m(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \, \mathrm{d}x_i\right) \mathrm{d}\lambda_{m-1} \tag{17.26}$$

[27] Здесь $K - K = \{x - y \mid x, y \in K\}$ — замкнутое, а потому измеримое множество.
[28] Это утверждение — упрощенный вариант симметризации Штейнера.

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega_i(E)}(x)\,\mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}\lambda_{m-1} = \lambda_m(\Omega_i(E)), \tag{17.27}$$

где неравенство в (17.27) следует из пункта (1), где в качестве K нужно взять проекцию E на i-ую координату при фиксированных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$.

(3) $\operatorname{diam} \Omega_i(E) \leqslant \operatorname{diam} E$, *где* $\Omega_i(E)$ *— множество из предыдущего пункта.*

Для упрощения записи будем считать, что $i = m$. Тогда:

$$\left\| \left(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \frac{x_m - \widetilde{x}_m}{2} \right) - \left(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, \frac{y_m - \widetilde{y}_m}{2} \right) \right\|^2 = \tag{17.28}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - y_k)^2 + \left(\frac{x_m - \widetilde{x}_m}{2} - \frac{y_m - \widetilde{y}_m}{2} \right)^2 = \tag{17.29}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - y_k)^2 + \left(\frac{x_m - y_m}{2} - \frac{\widetilde{x}_m - \widetilde{y}_m}{2} \right)^2 \leqslant \tag{17.30}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - y_k)^2 + \max\bigl((x_m - y_m)^2, (\widetilde{x}_m - \widetilde{y}_m)^2\bigr), \tag{17.31}$$

так как

$$\frac{1}{4}(a-b)^2 \leqslant \frac{1}{4}(|a| + |b|)^2 \leqslant \frac{1}{4}(2\max(|a|, |b|))^2 = \max(a^2, b^2). \tag{17.32}$$

Отсюда нетрудно вывести требуемое неравенство.

(4) Рассмотрим последовательность множеств

$$E_0 = \overline{e}, \qquad E_k = \Omega_k(E_{k-1}),$$

где $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда E_m — замкнуто, $\operatorname{diam} E_m \leqslant \operatorname{diam} \overline{e}$, $\lambda_m(E_m) \geqslant \lambda_m(\overline{e})$. По построению, если $x \in E_m$, то $-x \in E_m$, а потому

$$2\|x\| = \|x - (-x)\| \leqslant \operatorname{diam} E_m \leqslant h. \tag{17.33}$$

Таким образом, $\|x\| \leqslant \frac{h}{2}$ для всех $x \in E_m$, то есть $E_m \subset \overline{B}(0, \frac{h}{2})$, и $\lambda_m(\overline{e}) \leqslant \lambda_m(E_m) \leqslant \lambda_m(B(0, h/2))$. ∎

Лемма 17.10. Пусть G — открыто в $\mathbb{R}^m$. Тогда существует такой дизъюнктный набор замкнутых шаров $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $B_k \subset G$ для всех k, и $\lambda_m(G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$.

Доказательство. Можно считать, что G ограничено. Пусть $Q = [0, 1)^m$. Тогда существует шар B такой, что $\overline{B} \subset Q$ и $\lambda_m(Q \setminus B) < \theta\lambda_m(Q) = \theta$, где $\theta \in (0, 1)$. Значит, любой кубической ячейки Q' существует шар B' такой, что $\overline{B'} \subset Q'$ и

$$\lambda_m(Q' \setminus B') < \theta\lambda_m(Q'). \tag{17.34}$$

Рассмотрим разбиение G на кубические ячейки. Выберем в каждой ячейке Q_k шар B_k такой, что выполнено (17.34). Тогда существует $N \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_m\left(G \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} B_k\right) < \widetilde{\theta} \cdot \lambda_m(G), \tag{17.35}$$

где $\widetilde{\theta} \in (\theta, 1)$ (здесь использовано то, что $\operatorname{diam} G < \infty$).

Возьмем $G_1 = G \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N} B_k$ и применим предыдущее рассуждение к G_1. Соответственно, найдем такие B_2', N_2, что

$$\lambda_m(G_2) < \widetilde{\theta}\lambda_m(G_1),$$

где $G_2 = G_1 \setminus \bigsqcup_{k=1}^{N_2} B_k'$. И так далее. Получим счетное дизъюнктное семейство шаров

$$F = \bigsqcup_{k=1}^{N_1} \overline{B_k'} \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{N_2} \overline{B_k''} \sqcup \ldots \tag{17.36}$$

При этом

$$\lambda_m(G \setminus F) \leqslant \lambda_m(G_j) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0, \tag{17.37}$$

что и требовалось. ■

Теорема 17.11. Пусть $m \in \mathbb{N}$ — произвольное число. Тогда $\lambda_m = \alpha_m H_m$ на $\mathfrak{U}_{\lambda_m^*} = \mathfrak{U}_{H_m^*}$, где $\alpha_m = \lambda_m(B(0,1))$.

Доказательство. Мы уже доказывали, что существует $k \in (0, +\infty) : H_m = k\lambda_m$. Значит, осталось показать, что $\alpha_m H_m(G) = \lambda_m(G)$ для любого открытого множества G (например, шара). Пусть G — открыто, $\operatorname{diam} G < \infty$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$. Выберем δ-покрытие $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ множества G, удовлетворяющее свойству

$$H_{m,\delta}^*(G) + \varepsilon \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_j}{2}\right)^m. \tag{17.38}$$

Воспользуемся изодиаметрическим неравенством:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_j}{2}\right)^m = \frac{1}{\alpha_m} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m\big(B(0, \operatorname{diam} e_j/2)\big) \tag{17.39}$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha_m} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m(\overline{e}_j) \geqslant \frac{1}{\alpha_m} \lambda_m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{e}_j\right) \geqslant \frac{\lambda_m(G)}{\alpha_m}. \tag{17.40}$$

После перехода к пределам $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$ получаем $\alpha_m H_m^*(G) \geqslant \lambda_m(G)$.

В обратную сторону: пусть $\delta > 0$, $\{B_k\}_{k\geqslant 1}$ — дизъюнктный набор шаров диаметра $< \delta$, причем $\lambda_m(G \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$ (такой набор существует по лемме 17.10), и $\bigsqcup B_k \subset G$.

Тогда

$$\lambda_m(G) = \lambda_m\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(B_k) \tag{17.41}$$

$$= \alpha_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} B_k}{2}\right)^m \geqslant \alpha_m H^*_{m,\delta}\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \tag{17.42}$$

$$= \alpha_m H^*_{m,\delta}(G \setminus e_\delta), \tag{17.43}$$

где $e_\delta : \lambda_m(e_\delta) = 0$. Для каждого $\delta_k = 1/k$, где $k \in \mathbb{N}$, построим такое множество e_{δ_k}, и тогда

$$\lambda_m(G) \geqslant \alpha_m H_{m,\delta_k}\left(G \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} e_{\delta_j}\right) \qquad (\forall k \in \mathbb{N}). \tag{17.44}$$

Устремляя k к бесконечности, получаем, что

$$\lambda_m(G) \geqslant \alpha_m H_m\left(G \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} e_{\delta_j}\right) = \alpha_m H_m(G), \tag{17.45}$$

так как $\lambda_m\left(\bigcup e_{\delta_j}\right) = 0 = H_m\left(\bigcup e_{\delta_j}\right)$. Таким образом, теорема доказана. ■

Определение. k-мерной *площадью* (*поверхностной мерой*) в $\mathbb{R}^m$ будем называть меру $S_k = \alpha_k H_k$.

Из предыдущей теоремы следует, что k-мерная площадь лебеговских подмножеств подпространства $\mathbb{R}^m$ размерности k совпадает с их мерой Лебега λ_k.

Определение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытое множество, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $m \geqslant k$, — гладкая биекция на свой образ. *Матрицей Грама* отображения φ в точке $x \in \mathbb{R}^m$ называется линейное отображение $[\mathrm{d}_x\varphi]^*[\mathrm{d}_x\varphi] \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$.

Напомним, что если $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$, то $A^* \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ — это такой оператор, что $(Ax, y)_{\mathbb{R}^m} = (x, A^*y)_{\mathbb{R}^k}$ для всех $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$.

$\det(A^*A) \geqslant 0$ для любого $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$, так как если λ — собственное число A^*A, соответствующее собственному вектору e_λ, то

$$(Ae_\lambda, Ae_\lambda) = (A^*Ae_\lambda, e_\lambda) = (\lambda e_\lambda, e_\lambda) = \lambda(e_\lambda, e_\lambda) \geqslant 0, \tag{17.46}$$

откуда $\lambda \geqslant 0$, а значит и $\det(A^*A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m \geqslant 0$.

Лемма 17.12. Пусть $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m$, $g\colon E_1 \to E_2$ — билипшицево отображение, то есть

$$\tfrac{1}{k}\|x - y\| \leqslant \|g(x) - g(y)\| \leqslant k\|x - y\| \qquad (\forall x, y \in E_1). \tag{17.47}$$

Тогда

$$\frac{1}{k^p} H^*_p(E_1) \leqslant H^*_p(E_2) \leqslant k^p H^*_p(E_1). \tag{17.48}$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ — δ-покрытие E_1. Тогда $\operatorname{diam}(g(e_k)) \in \left[\frac{1}{k}\delta, k\delta\right]$ для всех k, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} g(e_k) \supset E_2$.

$$H^*_{k,\delta}(E_2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam} g(e_k)}{2}\right)^p \leqslant k^p \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_k)}{2}\right)^p, \tag{17.49}$$

то есть $H^*_{p,\delta}(E_2) \leqslant k^p H^*_{p,\delta}(E_1)$. При $\delta \to 0$ получаем правое из двух требуемых неравенство. Левое доказывается аналогично (или можно рассмотреть отображение $g^{-1}\colon E_2 \to E_1$). ∎

Из доказательства видно, что если $\|g(x) - g(y)\| \leqslant k\|x - y\|$, то $H^*_p(E_1) \leqslant k^p H^*_p(E_2)$.

Следствие 17.13. Если T — изометрия, то для любого $p > 0$:

1. $H^*_p(E) = H^*_p(T(E))$.
2. $T(\mathfrak{U}_{H^*_p}) = \mathfrak{U}_{H^*_p}$.

Доказательство.

1. Напрямую следует из леммы для $k = 1$.
2. Для любого $A \in \mathfrak{U}_{H^*_p}$ верно

$$H^*_p(E) = H^*_p(E \cap A) + H^*_p(E \setminus A) \qquad (\forall E \subset \mathbb{R}^m), \tag{17.50}$$

а значит

$$H^*_p(T(E)) = H^*_p(T(E) \cap T(A)) + H^*_p(T(E) \setminus T(A)) \qquad (\forall E \subset \mathbb{R}^m), \tag{17.51}$$

Поскольку $T(E)$ — произвольное подмножество $\mathbb{R}^m$, то $T(A) \in \mathfrak{U}_{H^*_p}$, то есть имеет место включение $T(\mathfrak{U}_{H^*_p}) \subset \mathfrak{U}_{H^*_p}$. Для доказательства обратного включения можно рассмотреть обратное отображение T^{-1}. ∎

Следствие 17.14. Пусть M — гладко параметризованное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^m$; $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм между $U \subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi(U) = M$. Тогда $\varphi(\mathfrak{B}(U)) \subset \mathfrak{U}_{H^*_k}$ и $\mathfrak{B}(M) \subset \varphi(\mathfrak{B}(U))$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{B}(U)$. Можно считать, что A ограничено и $\overline{A} \subset U$ (иначе рассмотрим разбиение A на такие множества). Разобьем $A = K \cup e$, где $e \in \mathfrak{U}_{\lambda^*_k}$: $\lambda_k(e) = 0 = H^*_k(e)$, K — компакт в $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$\varphi(K \cup e) = \varphi(K) \cup \varphi(e),$$

$\varphi(K)$ — компакт, а потому $\varphi(K) \in \mathfrak{U}_{H^*_k}$. $H^*_k(\varphi(e)) = 0$ по лемме 17.12, так как $H^*_k(e) = 0$ и φ — липшицева на $\overline{A}$. В частности, $e \in \mathfrak{U}_{H^*_k}$, а значит и $A = K \cup e \in \mathfrak{U}_{H^*_k}$. Итого, мы доказали, что $\varphi(\mathfrak{B}(U)) \subset \mathfrak{U}_{H^*_k}$.

Поскольку φ — биекция, $\varphi(\mathfrak{B}(U))$ — σ-алгебра. Кроме того, эта σ-алгебра содержит открытые множества в M, так как φ — диффеоморфизм между U и M. Значит, $\mathfrak{B}(M) \subset \varphi(\mathfrak{B}(U))$. ∎

Лемма 17.15. Пусть $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$, $T \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. Тогда $T(E) \in \mathfrak{U}_{H_k^*}$ и

$$S_k(TE) = \alpha_k H_k(TE) = \sqrt{\det(T^*T)} \cdot \lambda_k(E). \tag{17.52}$$

Доказательство. T — диффеоморфизм на свой образ в $\mathbb{R}^m$, а значит $TE \in \mathfrak{U}_{H_k^*}$ по предыдущему следствию. Кроме того, существует изометрия $\widetilde{T}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ такая, что $\widetilde{T}(TE) = \mathbb{R}^k$, где $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_{k+1}, \ldots, x_m = 0\}$. Так как $\widetilde{T}$ — изометрия, $H_k(TE) = H_k(\widetilde{T}TE) = H_k(\widetilde{T}TE) = \frac{1}{\alpha_k}\lambda_k(\widetilde{T}TE)$, и

$$\frac{1}{\alpha_k}\lambda_k(\widetilde{T}TE) = \frac{1}{\alpha_k}|\det(\widetilde{T}T)| \cdot \lambda_k(E) \tag{17.53}$$
$$= \frac{1}{\alpha_k}\sqrt{\det(T^*\widetilde{T}^*\widetilde{T}T)} \cdot \lambda_k(E) \tag{17.54}$$
$$= \frac{1}{\alpha_k}\sqrt{\det(T^*T)} \cdot \lambda_k(E) \tag{17.55}$$

В последнем переходе использовано, что $\widetilde{T}^*\widetilde{T} = I$. ■

Лемма 17.16. Пусть M — гладко параметризованное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^m$; $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм между $U \subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi(U) = M$. Пусть также $p \in M$, $p = \varphi(a)$, и задано отображение

$$g\colon M \to \mathbb{R}^m,\ y \mapsto \varphi(a) + [\mathrm{d}_a\varphi]h(y),$$

где $h(y) \in \mathbb{R}^k$ таково, что $\varphi(a + h(y)) = y$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V_\varepsilon(p)$ точки p такая, что для всех $y_1, y_2 \in V_\varepsilon(p)$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|y_1 - y_2\| \leqslant \|g(y_1) - g(y_2)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y_1 - y_2\|. \tag{17.56}$$

Доказательство. По определению, $g(y_1) - g(y_2) = [\mathrm{d}_a\varphi](h(y_1) - h(y_2))$.

$$y_1 - y_2 = \varphi(a + h(y_1)) - \varphi(a + h(y_2)) = \tag{17.57}$$
$$= \varphi\big(a + h(y_1)\big) - \varphi\big(a + h(y_1) + h(y_2) - h(y_1)\big) \tag{17.58}$$
$$- [\mathrm{d}_a\varphi](h(y_1) - h(y_2)) + [\mathrm{d}_a\varphi](h(y_1) - h(y_2)) \tag{17.59}$$
$$= F(0) - F(1) + g(y_1) - g(y_2), \tag{17.60}$$

где

$$F(t) = \varphi\big(a + h(y_1) + th(y_2) - th(y_1)\big) - [\mathrm{d}_a\varphi]\big(th(y_1) - th(y_2)\big). \tag{17.61}$$

Тогда по неравенству Лагранжа

$$\|F(0) - F(1)\| \leqslant \|F'(t_0)\| = ([\mathrm{d}_z\varphi] - [\mathrm{d}_a\varphi])(h(y_2) - h(y_1)), \tag{17.62}$$

где $z = a + h(y_1) + t_0h(y_2) - t_0h(y_1)$.

При достаточно близких к p y_1 и y_2 $\|\mathrm{d}_z\varphi - \mathrm{d}_a\varphi\| < \widetilde{\varepsilon}$, так как $\varphi \in C^1(U)$ и h — гладкое отображение, удовлетворяющее условию $h(p) = 0$. Значит, неравенство

$$c(1-\widetilde{\varepsilon})\|y_1 - y_2\| \leqslant \|g(y_1) - g(y_2)\| \leqslant c(1+\widetilde{\varepsilon})\|y_1 - y_2\|$$

верно в малой окрестности p с универсальной константой c. ■

Теорема 17.17. Пусть M — гладко параметризованное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^m$; $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм между $U \subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi(U) = M$. Тогда для любого борелевского $E \subset M$:

$$S_k(E) = \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{\det([\mathrm{d}_x\varphi]^*[\mathrm{d}_x\varphi])}\,\mathrm{d}\lambda_k(x). \tag{17.63}$$

Доказательство. Вместо формулы (17.63) будем доказывать следующую:

$$S_k(\varphi(E)) = \int\limits_E \sqrt{\det G(x)}\,\mathrm{d}\lambda_k(x) \qquad (\forall E \in \mathfrak{B}(U)), \tag{17.64}$$

где $G(x) = [\mathrm{d}_x\varphi]^*[\mathrm{d}_x\varphi]$. Очевидно, что они эквивалентны. Для этого рассмотрим меру $\mu(E) = S_k(\varphi(E))$. Если $\lambda_k(e) = 0 = H_k(e)$, то, поскольку φ — диффеоморфизм, $H_k(\varphi(e)) = 0$, откуда следует, что $S_k(\varphi(e)) = 0$. Значит, мера μ абсолютна непрерывна относительно λ_k. В частности, в ее разложении Радона – Никодима нет сингулярной части относительно λ_k:

$$\mu(E) = \int\limits_E \omega(x)\,\mathrm{d}x \tag{17.65}$$

для некоторой функции $\omega > 0$, локально интегрируемой на U.[29] Осталось показать, что $\omega(x) = \sqrt{\det G(x)}$. По теореме о дифференцировании мер, почти везде

$$\omega(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_k(B(x,r))}. \tag{17.66}$$

При этом

$$\mu(B(x,r)) = S_k(\varphi(B(x,r))) = \alpha_k H_k(\varphi(B(x,r))). \tag{17.67}$$

Остается найти предел:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_k(B(x,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_k H_k(g(\varphi(B(x,r))))}{\lambda_k(B(x,r))} \tag{17.68}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_k H_k\big(\varphi(x) + [\mathrm{d}_x\varphi](B(0,r))\big)}{\lambda_k(B(0,r))} \tag{17.69}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_k H_k\big([\mathrm{d}_x\varphi](B(0,r))\big)}{\lambda_k(B(0,r))} \tag{17.70}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{\det\,[\mathrm{d}_x\varphi]^*[\mathrm{d}_x\varphi]}\cdot\lambda_k(B(0,r))}{\lambda_k(B(0,r))} \tag{17.71}$$

[29] Это значит, что $\omega \in L^1(E)$, если $\mu(E) < \infty$.

$$= \sqrt{\det G(x)}, \tag{17.72}$$

что и требовалось. Здесь в (17.68) функция g определена так же, как в лемме 17.16, и это равенство выполнено, так как

$$\frac{1}{(1+\varepsilon(r))^k} H_k(\varphi(B(x,r))) \leqslant H_k(g(\varphi(B(x,r)))) \leqslant (1+\varepsilon(r))^k H_k(\varphi(B(x,r))) \tag{17.73}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$. В (17.70) используется инвариантность относительно сдвигов, а в (17.71) — лемма 17.15. ■

Следствие 17.18. Пусть M — гладко параметризованное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^m$; $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм между $U \subset \mathbb{R}^k$ и $\varphi(U) = M$; f — борелевская функция на M. Тогда

$$\int_E f \, \mathrm{d}S_k = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi)\sqrt{\det G}\, \mathrm{d}\lambda_k \tag{17.74}$$

Доказательство. Применить абстрактную теорему о замене меры для мер S_k и $\sqrt{\det G}\,\mathrm{d}\lambda_k$ (интегрирование по взвешенному образу меры). ■

Утверждение 17.19. Пусть $p > 0$, $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Если $H_p(E) < \infty$, то для всех $p' > p$ $H_{p'}(E) = 0$. Если $H_p(E) > 0$, то $H_{p'}(E) = +\infty$ для всех $p' \in (0, p)$.

Доказательство. Пусть $H_p(E) < \infty$ и $p' > p$. Рассмотрим δ-покрытие $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ множества E. Тогда

$$\varepsilon + H^*_{p,\delta}(E) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2}\right)^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2}\right)^{p'} \cdot \left(\frac{2}{\operatorname{diam} e_k}\right)^{p'-p} \tag{17.75}$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^{p'-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} e_k}{2}\right)^{p'} \geqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^{p'-p} H^*_{p',\delta}(E), \tag{17.76}$$

откуда $H^*_p(E) \geqslant \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{2}{\delta}\right)^p H^*_{p',\delta}(E)$. Значит, $H_{p'}(E) = 0$ — иначе бы справа стояла бесконечность, а слева — конечное число.

Если $H_p(E) \in (0, \infty]$, то при $p' < p$, то $H_{p'}(E) = +\infty$, так как иначе можно применить первую часть доказательства для p' и получить, что $H_p(E) = 0$, а это неверно. ■

В связи с этим утверждением естественным образом возникает следующее определение:

Определение. Число

$$\dim_H(E) = \inf\{p \mid H_p(E) = 0\} = \sup\{p \mid H_p(E) = +\infty\}$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$.

Утверждение 17.20. Пусть M — гладко параметризованное многообразие размерности k. Тогда $H_p(M) = 0$ для любого числа $p > k$.

Доказательство. Переходя к картам, можно считать, что M — простое гладко параметризованное многообразие размерности k, причем $S_k(M) < \infty$. Но тогда $H_k(M) < \infty$ и $H_p(M) = 0$ для всех $p > k$ по утверждению 17.19. ∎

Утверждение 17.21. Пусть C — обычное канторово множество. Тогда

$$\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3} = \alpha, \tag{17.77}$$

а $H_\alpha(C) = 2^{-\alpha}$.

Доказательство. Если $k \in \mathbb{N}$, то C можно накрыть 2^k отрезками длины $1/3^k$, а потому

$$H^*_{\alpha,\frac{1}{3^k}}(C) \leqslant \sum_{n=1}^{2^k} \left(\frac{1/3^k}{2}\right)^\alpha = 2^{k-\alpha} \cdot 3^{-\alpha k} = 2^{k-\alpha} \cdot 3^{-k\log_3 2} = 2^{-\alpha}. \tag{17.78}$$

Справа стоит число, не зависящее от k, а потому $H_\alpha(C) \leqslant 2^{-\alpha}$ и $\dim_H(C) \leqslant \alpha$. Осталось доказать неравенство в обратную сторону.

Поскольку C компактно, достаточно рассматривать случай, когда C покрыто конечным числом открытых интервалов. Пусть $C \subset \bigcup_{k=1}^N I_k$. Будем доказывать по индукции неравенство

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\operatorname{diam} I_k}{2}\right)^\alpha \geqslant 2^{-\alpha}. \tag{17.79}$$

Если $N = 1$, то диаметр I_1 должен быть $\geqslant 1$, и неравенство (17.79) превращается в тривиальное $2^{-\alpha} \geqslant 2^{-\alpha}$. Пусть неравенство доказано для N интервалов. Переходим к $N+1$-ому. Либо среди I_j нет ни одного интервала, содержащего $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, то можно уменьшить $N+1$, разбив сумму на две, каждая из которых содержит левую и правую часть C соответственно:

$$\sum_{I_k \supset C_L} \left(\frac{\operatorname{diam} I_k}{2}\right)^\alpha + \sum_{I_k \supset C_R} \left(\frac{\operatorname{diam} I_k}{2}\right)^\alpha \geqslant 2^{-\alpha} \cdot (\tfrac{1}{3})^\alpha + 2^{-\alpha} \cdot (\tfrac{1}{3})^\alpha \tag{17.80}$$

$$\geqslant 2^{-\alpha}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = 2^{-\alpha}. \tag{17.81}$$

Если же отрезок $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ встречается среди I_k, то заменим его на интервалы $I_{k_0L} = I_{k_0} \cap [0, \frac{1}{3}]$, $I_{k_0R} = I_{k_0} \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Тогда

$$\left(\frac{|I_{k_0L}|}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{|I_{k_0R}|}{2}\right)^\alpha \leqslant \left(\frac{|I_{k_0L}|}{2} + \frac{|I_{k_0R}|}{2} + \frac{1}{3}\right)^\alpha \leqslant \frac{2^\alpha}{3^\alpha} = 2^{\alpha-1}. \tag{17.82}$$

Численное неравенство $x^\alpha + y^\alpha \leqslant (x + y + \frac{1}{3})^\alpha$ для $x, y \in [0, 1/3]$, можно доказать, например, с помощью неравенства Йенсена:

$$x^\alpha + y^\alpha \leqslant 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha = \frac{3^\alpha}{2^\alpha}(x+y)^\alpha = \left(\frac{3}{2}(x+y)\right)^\alpha \leqslant \left(x + y + \frac{1}{3}\right)^\alpha, \tag{17.83}$$

так как $\frac{3}{2}(x+y) = x + y + \frac{x+y}{2} \leqslant x + y + \frac{1}{3}$.

Далее надо рассмотреть C_L или C_R вместо C и применить предыдущее рассуждение. Либо на одном из N шагов не встретится интервал, накрывающий среднюю треть, либо мы придем к естественному накрытию, для которого $\sum\left(\frac{|I_j|}{2}\right)^{\alpha} = 2^{-\alpha}$. ■

Утверждение 17.22. Пусть $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, где $U \subset \mathbb{R}^k$, $k \leqslant m$. Тогда матрица Грама φ имеет вид $((\varphi'_{x_s}, \varphi'_{x_j}))_{1 \leqslant s,j \leqslant k}$,[30] где

$$\varphi'_{x_i} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$G = [\mathrm{d}_x\varphi]^*[\mathrm{d}_x\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi'_{ix_1} & \varphi'_{ix_2} & \ldots & \varphi'_{ix_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_{1x_j} \\ \varphi'_{2x_j} \\ \vdots \\ \varphi'_{mx_j} \end{pmatrix} = ((\varphi'_{x_i}, \varphi'_{x_j})).$$

■

Утверждение 17.23 (длина гладкой кривой). Пусть $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}^m$ — гладкая инъекция[31]. Тогда

$$S_1\big(\varphi(a,b)\big) = \int\limits_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{17.84}$$

Доказательство. В данном случае,

$$G = (\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_m)\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \vdots \\ \varphi'_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m (\varphi'_i)^2, \tag{17.85}$$

а потому $\sqrt{\deg G} = \|\varphi'(t)\|$ и утверждение из одной из предыдущих теорем. ■

Утверждение 17.24 (площадь графика гладкого отображения).
Пусть $g \in C^1(U, \mathbb{R})$, где $U \subset \mathbb{R}^k$; $M = \{(u, g(u)) \mid u \in U\}$ — многообразие, гладко параметризованное отображением $u \mapsto (u, g(u))$. Тогда

$$S_k(M) = \int\limits_U \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, gu)\|^2}\,\mathrm{d}\lambda_k(u). \tag{17.86}$$

[30] Здесь внешние скобки обозначают матрицу, а внутренние — скалярное произведение.
[31] Условие на φ можно сильно ослабить.

Доказательство. Найдем матрицу Якоби:

$$[\mathrm{d}_x\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g'_{x_1} & g'_{x_2} & g'_{x_3} & \dots & g'_{x_k} \end{pmatrix} \in M_{(k+1)\times k}. \tag{17.87}$$

По формуле Бине – Коши:

$$\det([\mathrm{d}_x\varphi]^*[\mathrm{d}_x\varphi]) = \sum_{i=1}^{k+1} (\det A_i)^2, \tag{17.88}$$

где A_i — матрица $[\mathrm{d}_x\varphi]$, из которой выкинули строчку с номером i. Ясно, что $|\det A_{k+1}| = |\det I_{k\times k}| = 1$, $|\det A_i| = |g'_{x_i}|$, откуда

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\det A_i)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{k} (g'_{x_i})^2 = 1 + \|\operatorname{grad} gu\|^2. \tag{17.89}$$

■

Пример 17.1. Пусть $M = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z < 1\}$. Посчитаем $S_2(M)$.

Обозначим $\widetilde{M} = M \setminus \big\{(x, 0, x^2) \mid x \in (0,1)\big\} \cup \{0\}$. Ясно, что $S_2(M) = S_2(\widetilde{M})$, так как мы вычли гладко параметризованное многообразие размерности 1. $\widetilde{M}$ — простое многообразие, задающееся отображением

$$\Phi\colon (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2), \quad r \in (0,1), \quad \varphi \in (0, 2\pi). \tag{17.90}$$

Пусть $U = (0,1) \times (0, 2\pi)$. Тогда

$$S_k(\widetilde{M}) = \int\limits_U \sqrt{\det G}\, \mathrm{d}\lambda_2. \tag{17.91}$$

Осталось посчитать матрицу Грама.

$$\Phi'_r(r,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2r), \tag{17.92}$$

$$\Phi'_\varphi(r,\varphi) = (-\sin\varphi, r\cos\varphi, 0). \tag{17.93}$$

Значит,

$$G = \begin{pmatrix} (\Phi'_r, \Phi'_r) & (\Phi'_r, \Phi'_\varphi) \\ (\Phi'_\varphi, \Phi'_r) & (\Phi'_\varphi, \Phi'_\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \tag{17.94}$$

то есть $\sqrt{\det G} = r\sqrt{1 + 4r^2}$. По теореме Тонелли,

$$\int\limits_U \sqrt{\det G} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = [t = r^2] \tag{17.95}$$

$$= \frac{2\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1+4t}\, \mathrm{d}t \tag{17.96}$$

$$= \frac{\pi(1+4t)^{3/2}}{4} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1). \tag{17.97}$$

18 Формула коплощади

Лемма 18.1 (о разложении единицы).

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое отображение $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, что $\varphi(x) > 0 \iff x \in (-\varepsilon, \varepsilon)^m$; $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на $\mathbb{R}^m$; $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}^m} \varphi(x - \varepsilon n) = 1$.

2. Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие K, то существуют функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ такие, что $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$, $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\varphi_j(x) = 0$ на $\mathbb{R}^m \setminus U_{\alpha_j}$ для некоторого α_j, и $\sum\limits_{j=1}^N \varphi_j = 1$ на K.

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon = 1$,
$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases}$$
Очевидно, что $\psi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Положим
$$\widetilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{k=1}^m \psi(1 - x_k^2).$$
Тогда $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ для всех $x \notin (-1, 1)^m$. Возьмем теперь
$$\Phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \widetilde{\varphi}(x - n).$$
$\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 < \Phi < C$ для некоторой константы C (так как любая точка $x \in \mathbb{R}^m$ лежит в некотором кубе вида $n + (-1, 1)^m$, и число кубов, в которых лежит x, конечно и не зависит от x). Определяя $\varphi(x) = \frac{\widetilde{\varphi}(x)}{\Phi(x)}$, получаем
$$1 = \frac{\Phi(x)}{\Phi(x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \frac{\widetilde{\varphi}(x-n)}{\Phi(x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \frac{\varphi(x-n)}{\Phi(x-n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \varphi(x-n), \tag{18.1}$$
то есть для $\varepsilon = 1$ утверждение доказано. В общем случае надо рассмотреть функции $x \mapsto \varphi(x/\varepsilon)$.

2. Можно считать, что I конечно, так как K — компакт, и можно выбрать конечное подпокрытие. По лемме Лебега $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in K$ $\exists \alpha \in I : x + (-\delta, \delta)^m \subset U_\alpha$. Построим разложение единицы как в пункте (1) для $\varepsilon = \frac{\delta}{2\sqrt{m}}$. Выберем

из функций $\{\varphi(x-\delta n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ те, для которых $\exists x_0 \in K : \varphi(x_0-\delta n) > 0$. Назовем такие n "хорошими". Тогда сумма $\varphi(x-\delta n)$ по всем хорошим n равна единице на K (так как на K это просто сумма по $\mathbb{Z}^m$). Кроме того, для каждой функции $\varphi(x-\delta n)$ найдется окрестность $U_\alpha : \varphi(x-\delta n) = 0\ \forall x \notin U_\alpha$, так как $\{x : \varphi(x-\delta n) > 0\} \subset x_0 + (-\delta,\delta)^m$, где $x_0 : \varphi(x_0-\delta n) \neq 0$, $x_0 \in K$. ∎

Определение. Если (X,ρ) — метрическое пространство, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение на X, то *носителем* φ будем называть замыкание $\overline{\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}}$ и обозначать его $\operatorname{supp}\varphi$.

Замечание. В последней лемме $\operatorname{supp}\varphi_k \subset U_{\alpha_k}$.

Теорема 18.2 (формула коплощади Кронрода – Федерера). Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^{k+1}$, $h \in C^1(U,\mathbb{R})$, $\operatorname{grad} h(u) \neq 0$ для $u \in U$. Пусть также g — суммируемая относительно λ_{k+1} борелевская функция на U. Тогда

$$\int\limits_U g\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{h^{-1}(t)} \frac{g}{\|\operatorname{grad} h\|}\,\mathrm{d}S_k \right) \mathrm{d}t.$$

Замечание. $h^{-1}(t)$ — это либо пустое множество, либо множество уровня гладкого отображения с невырожденным градиентом, то есть $h^{-1}(t)$ — гладкое параметризованное многообразие размерности k.

Доказательство.

1. Предположим, что U — выпуклое множество, $h'_{x_{k+1}}(x) \neq 0$ для всех $x \in U$. Рассмотрим отображение

   $$\Phi\colon (x_1,\dots,x_{k+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_k,h(x_1,\dots,x_{k+1})).$$

   Понятно, что $\Phi \in C^1(U,\mathbb{R}^{k+1})$. Более того, Φ — диффеоморфизм. Действительно, по теореме об обратном отображении, Φ — локальный диффеоморфизм, так как матрица Якоби $\mathrm{d}_x\Phi$ единична во всех строках, кроме последней, а в последней это она равна $(h'_{x_1},h'_{x_2},\dots,h'_{x_{k+1}})$, то есть определитель не равен нулю по предположению $h'_{x_{k+1}} \neq 0$. Если $\Phi(x) = \Phi(\widetilde{x})$, то $x_i = \widetilde{x}_i$ для всех $i \in \{1,\dots,k\}$, и

   $$h(x_1,\dots,x_k,x_{k+1}) = h(x_1,\dots,x_k,\widetilde{x}_{k+1}),$$

   откуда следует, что либо $x_{k+1} = \widetilde{x}_{k+1}$, либо для некоторого $t \in [x_{k+1},\widetilde{x}_{k+1}] : h'_{x_{k+1}}(x_1,\dots,x_k,t) = 0$, что невозможно по выпуклости и второму предположению. Таким образом, Φ — инъекция.

   Обратное отображение Φ^{-1} имеет вид

   $$\Phi^{-1}(y_1,\dots,y_{k+1}) = (y_1,\dots,y_k,u(y_1,\dots,u_{k+1})).$$

$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x$ для всех $x \in U$, поэтому (по теореме об обратном отображении) если $y = \Phi(x)$, то $[\mathrm{d}_y\Phi^{-1}][\mathrm{d}_x\Phi] = I_{(k+1)\times(k+1)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ u'_{y_1} & u'_{y_2} & \dots & u'_{y_k} & u'_{y_{k+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ h'_{x_1} & h'_{x_2} & \dots & h'_{x_k} & h'_{x_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем получающиеся из этого равенства уравнения на u'_{y_k} и h'_{x_k}:

$$\begin{cases} u'_{y_1} + u'_{y_{k+1}} h'_{x_1} = 0, \\ \dots \\ u'_{y_k} + u'_{y_{k+1}} h'_{x_k} = 0, \\ u'_{y_{k+1}} \cdot h'_{x_{k+1}} = 1. \end{cases} \tag{18.2}$$

Значит,

$$\left(\det[\mathrm{d}_y\Phi^{-1}]\right)^2 \cdot \|\mathrm{grad}\, h(x)\|^2 = (u'_{y_{k+1}})^2 \cdot \sum_{i=1}^{k+1} (h'_{x_i})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{k} (u'_{y_i})^2. \tag{18.3}$$

Теперь можно доказать формулу коплощади в этом случае[32]:

$$\int\limits_U g\, \mathrm{d}\lambda_{k+1} = \int\limits_{\Phi(U)} g\big(\Phi^{-1}(y)\big) \cdot |\det[\mathrm{d}_y\Phi^{-1}]|\, \mathrm{d}\lambda_{k+1}(y) \tag{18.4}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} \chi_{\Phi(U)}(\frown, t) \cdot g(\Phi^{-1}(\frown, t)) \cdot \frac{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^k (u'_{y_i}(\frown, t))^2}}{\|\mathrm{grad}\, h(\Phi^{-1}(\frown, t))\|}\, \mathrm{d}\lambda_k(\frown) \right) \mathrm{d}\lambda_1(t) \tag{18.5}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{h^{-1}(t)} \frac{g}{\|\mathrm{grad}\, h\|}\, \mathrm{d}S_k \right) \mathrm{d}t. \tag{18.6}$$

Пояснение: $(y_1, \dots, y_k, u(y_1, \dots, y_k, t))$ — карта для многообразия $h^{-1}(t)$, а функция $\sqrt{1 + \sum (u_{y_i})^2}$ совпадает с $\sqrt{\det G}$ для матрицы Грама отображения Φ^{-1}, как мы видели ранее. Это объясняет появление S_k в формуле выше.

2. В общем случае достаточно рассмотреть функцию g такую, что $g = 0$ вне неко-

[32] Во второй строчке из-за нехватки места используется сокращение $\frown = (y_1, \dots, y_k)$.

торого компакта K. Если докажем для таких функций, то

$$\int\limits_U g\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_U g\chi_{K_n}\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} \tag{18.7}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^k}\frac{g\cdot\chi_{K_n}}{\|\operatorname{grad} h\|}\,\mathrm{d}S_k\right)\mathrm{d}t \tag{18.8}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{h^{-1}(t)}\frac{g}{\|\operatorname{grad} h\|}\,\mathrm{d}S_k\right)\mathrm{d}t, \tag{18.9}$$

— следствие теоремы Леви, где K_n — компакты, $K_{n+1}\supset K_n$, $\bigcup K_n = U$.

Пусть $g = 0$ на $U\setminus K$, где K — компакт в $\mathbb{R}^{k+1}$, $K\subset U$. Покроем K выпуклыми окрестностями $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ такими, что

$$\forall\alpha\in I\ \exists i\in\{1,\dots,k+1\}:\ \left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{U_\alpha}\neq 0.$$

Тогда построим разложение единицы для семейства $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и применим пункт (1) доказательства к функциям $\varphi_\alpha g$, где φ_α — функции из разложения единицы. Тогда:

$$\int\limits_U g\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} = \int\limits_K g\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} = \int\limits_K\left(\sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha g\right)\mathrm{d}\lambda_{k+1} \tag{18.10}$$

$$= \int\limits_U\left(\sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha g\right)\mathrm{d}\lambda_{k+1} = \sum_{\alpha\in I}\int\limits_{U_\alpha}\varphi_\alpha g\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} \tag{18.11}$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{h^{-1}(t)}\frac{\varphi_\alpha g\,\mathrm{d}S_k}{\|\operatorname{grad} h\|}\right)\mathrm{d}t \tag{18.12}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{h^{-1}(t)}\frac{\sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha g}{\|\operatorname{grad} h\|}\,\mathrm{d}S_k\right)\mathrm{d}t, \tag{18.13}$$

что и требовалось. ■

Следствие 18.3 (интеграл по шару через интегралы по сферам). Пусть $B(0,1)$ — единичный шар в $\mathbb{R}^m$, $S(0,r)$ — сфера радиуса r в $\mathbb{R}^m$. Тогда для любой борелевской функции $g\in L^1\big(B(0,1),\lambda_m\big)$

$$\int\limits_{B(0,1)} g\,\mathrm{d}\lambda_m = \int\limits_0^1\left(\int\limits_{S(0,r)} g\,\mathrm{d}S\right)\mathrm{d}r. \tag{18.14}$$

Доказательство. Пусть $U = B(0,1) \setminus B(0,\varepsilon)$, $h\colon U \to \mathbb{R} : h(x) = \|x\|$. Тогда

$$\operatorname{grad} h = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}, \dots, \frac{x_m}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}} \right), \tag{18.15}$$

то есть $\|\operatorname{grad} h(x)\| = 1$ для всех $x \in U$. $h^{-1}(t) = \varnothing$, если $t \in (-\infty, \varepsilon] \cup [1, +\infty)$; $h^{-1}(t) = S(0,t)$, если $t \in (\varepsilon, 1)$. Значит, устремляя ε к нулю, видим, что (18.14) следует из формулы коплощади. ■

19 Формула Стокса

В этом параграфе мы будем доказывать (а точнее, формулировать необходимые для ее понимания определения) формулу Стокса —

$$\int\limits_M \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial M} \omega,$$

где M — ориентированное гладкое многообразие с краем размерности k, ∂M — край M (многообразие размерности $k-1$), ω — внешняя дифференциальная форма порядка $k-1$, $\mathrm{d}\omega$ — внешний дифференциал. Эта формула — обобщение формулы Ньютона – Лейбница для $M = [a,b]$:

$$\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Определение. Топологическое пространство M со счетной базой называется (топологически) *гладким многообразием* с краем размерности $k \in \mathbb{N}$ класса C^n, если существует набор карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, где $U_\alpha = \mathbb{R}^k$ или

$$U_\alpha = -\mathbb{H}^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_1 \leqslant 0\},$$

$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, $V_\alpha \subset M$ — гомеоморфизмы, $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta) \in C^n(\varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta), U_\alpha)$, $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = M$.

Замечание. Множество $\varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$ не обязательно открыто в $\mathbb{R}^k$ (может совпадать с $-\mathbb{H}_k$), но открыто в топологии $-\mathbb{H}_k$, индуцированной из $\mathbb{R}^k$. Функция φ_β^{-1} дифференцируема, в частности, на границе $-\mathbb{H}_k$. Гладкой структурой на M будем называть все возможные атласы, объединение которых с заданным атласом образует атлас гладкости класса C^n. В дальнейшем гладкая структура на M считается зафиксированной, и все рассматриваемые атласы выбираются из нее.

Определение. Пусть M — C^1-гладкое многообразие с краем, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — C^1-гладкий атлас. Будем называть карты $(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1})$ и $(U_{\alpha_2}, \varphi_{\alpha_2})$ *согласованными*, если выполнено одно из двух следующих условий:

1. $\varphi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap \varphi_{\alpha_2}(U_{\alpha_2}) = \varnothing$;

2. якобиан отображения $\varphi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_2})$ положителен на области определения $\varphi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_2})$.

Атлас $\mathcal{A}$ называется *ориентирующим*, если любая пара карт в $\mathcal{A}$ согласована.

Определение. Будем называть C^1-гладкие ориентирующие атласы $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ на M *эквивалентными*, если $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ — ориентирующий атлас.

Примеры 19.1. Пусть $M = \mathbb{R}^2$.

1. Атлас $\mathcal{A}_1 = \left\{(\mathbb{R}^2, \varphi_1(x,y) = (x,y)),\ (\mathbb{R}^2, \varphi_2(x,y) = (2x, 2y))\right\}$ — ориентирующий, так как $\varphi_2^{-1}(\varphi_1(x,y)) = \varphi_2^{-1}(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, то есть
$$\det(\mathrm{d}_{(x,y)}\varphi_2^{-1}(\varphi_1)) = \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{4} > 0.$$

2. Атлас $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}^2, \varphi_1(x,y) = (x,y)),\ (\mathbb{R}^2, \varphi_2(x,y) = (-x, y))\}$ — не ориентирующий, так как определитель выше равен -1.

3. Атлас $\mathcal{A}_3 = \{(\mathbb{R}^2, \varphi_1(x,y) = (x,y)),\ (\mathbb{R}^2, \varphi_2(x,y) = (y, x))\}$ — не ориентирующий, так как в этом случае $\varphi_2^{-1}\big(\varphi_1(x,y)\big) = (y,x)$, то есть
$$\det \mathrm{d}_{(x,y)}(\varphi_2^{-1}\varphi_1) = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1.$$

Определение. C^1-гладкое многообразие M, на котором имеется ориентирующий атлас, называется *ориентируемым*. Если выбран класс эквивалентности ориентирующих атласов, то M называется *ориентированным* многообразием, а этот класс — *ориентацией* на M.

Теорема 19.1. Пусть M — ориентируемое связное многообразие, $\dim M \geqslant 2$. Тогда на M есть ровно две ориентации.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь ориентирующий атлас $\mathcal{A}$. Пусть $p \in M$, $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ — такая карта, что $\varphi_\alpha(x) = p$ для некоторой точки $x \in U_\alpha$. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}$ — другой ориентирующий атлас на M, причем существует карта $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ такая, что $\widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{x}) = p$ для некоторой точки $\widetilde{x} \in \widetilde{U}_\alpha$, и, кроме того, $\det \mathrm{d}_x(\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}\varphi_\alpha) > 0$. Покажем, что эти два атласа эквивалентны. Заметим, что для любых карт $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$, $(\widetilde{U}_\beta, \widetilde{\varphi}_\beta) \in \widetilde{\mathcal{A}} : p \in \varphi_\beta(U_\beta)$, $p \in \widetilde{\varphi}_\beta(\widetilde{U}_\beta)$ карты (U_β, φ_β), $(\widetilde{U}_\beta, \widetilde{\varphi}_\beta)$ согласованы. Действительно,
$$\begin{aligned}\det\left[\mathrm{d}_{x_\beta}(\widetilde{\varphi}_\beta^{-1}(\varphi_\beta))\right] &= \det\left[\mathrm{d}_{x_\beta}(\widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)\right]\\ &= \det\left[\mathrm{d}_{\widetilde{x}_\alpha}(\widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_\alpha)\right] \cdot \det\left[\mathrm{d}_{x_\alpha}(\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)\right] \cdot \det\left[\mathrm{d}_{x_p}(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)\right],\end{aligned}$$
где $\varphi_\beta(x_\beta) = p, \ldots, \varphi_\alpha(x_\alpha) = p$. По определению определитель $\mathrm{d}_x(\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta))$ не обращается в ноль в любой точке из области задания $\widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ (все отображения — диффеоморфизмы), то есть он всюду положителен.

Рассмотрим теперь множество Ω, состоящее из "хороших точек", то есть таких точек, для которых любая пара карт $(U_\gamma, \varphi_\gamma)$, $(\widetilde{U}_\gamma, \widetilde{\varphi}_\gamma)$, где $\varphi_\gamma(U_\gamma) \cap \widetilde{\varphi}_\gamma(\widetilde{U}_\gamma) \neq \varnothing$, согласована. $\Omega \neq \varnothing$, так как $p \in \Omega$. Кроме того, Ω открыто: если $q_1 \in \Omega$ и $(U_{\gamma_1}, \varphi_{\gamma_1}) \in \mathcal{A}$, $(\widetilde{U}_{\gamma_1}, \widetilde{\varphi}_{\gamma_1}) \in \widetilde{\mathcal{A}} : q_1 \in \varphi_{\gamma_1}(U_{\gamma_1}) \cap \widetilde{\varphi}_{\gamma_1}(\widetilde{U}_{\gamma_1}) = V$, то для любой точки $q_2 \in V$ имеем $q_2 \in \Omega$, так как

$$\det\left[\mathrm{d}_{x_{\gamma_2}}(\widetilde{\varphi}_{\gamma_2}^{-1} \circ \varphi_{\gamma_2})\right]$$

— произведение трех множителей, каждый из которых положителен, так как карты $(U_{\gamma_1}, \varphi_{\gamma_1})$, $(\widetilde{U}_{\gamma_2}, \widetilde{\varphi}_{\gamma_1})$ согласованы не только в точке q_1, но и в точке q_2. Значит $\det > 0$, и $q_2 \in \Omega$.

Поймем теперь, что Ω замкнуто. Если $q \in \overline{\Omega}$, то $\exists\{q_j\} \subset \Omega$, сходящаяся к q в топологии M, то есть если $(U_\zeta, \varphi_\zeta) \in \mathcal{A}$, $(\widetilde{U}_\zeta, \widetilde{\varphi}_\zeta) \in \widetilde{\mathcal{A}}$, $q \in \varphi_\zeta(U_\zeta) \cap \widetilde{\varphi}_\zeta(\widetilde{U}_\zeta) = W$, то с некоторого момента $q_j \in W$, и если $x_{\zeta_j} \in U_\zeta : \varphi_\zeta(x_{\zeta_j}) = q_j$, то

$$0 < \det \mathrm{d}_{\zeta_j}(\widetilde{\varphi}_\zeta^{-1} \circ \varphi_\zeta) \xrightarrow{j\to\infty} \det \mathrm{d}_{x_\zeta}(\widetilde{\varphi}_\zeta^{-1} \circ \varphi_\zeta) \geqslant 0,$$

где $x_\zeta : \varphi(x_\zeta) = q$. Равенства нулю не может быть, так как $\widetilde{\varphi}_\zeta^{-1} \circ \varphi_\zeta$ — диффеоморфизм.

Ω — открыто-замкнутое непустое множество, а потому из связности M следует, что $\Omega = M$. Для завершения доказательства, поймем, что если есть пара атласов, у которых определители отрицательны, то они эквивалентны. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}$ — такой атлас, что $\det \mathrm{d}_x[\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha] < 0$. Рассмотрим атлас $\mathcal{B} = (U_\beta, \varphi_\beta)$, где

$$\varphi_\beta(x_1, \ldots, x_k) = \widetilde{\varphi}_\beta(x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k),$$

откуда $\mathcal{B}$ эквивалентно $\mathcal{A}$. Поэтому имеется не более двух классов эквивалентности. Рассматривая преобразование $\widetilde{\varphi}_\beta$ в φ_β, убеждаемся, что классов эквивалентности ровно два. ■

Замечание. Чтобы доказательство о количестве ориентаций ориентированного многообразия работало для случая $k = 1$, надо рассматривать атласы многообразий с краем, состоящие из пространств $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{H}^k$ и $-\mathbb{H}^k$ (чтобы иметь возможность менять знак координаты). При этом условии отрезок $[0, 1]$ имеет два неэквивалентных ориентирующих атласа.

Определение. Пусть M — гладко параметризованное многообразие в $\mathbb{R}^{k+1}$ размерности k. *Единичной нормалью* в точке $p \in M$ будем называть любой из двух векторов в $\mathbb{R}^m$ единичной длины, ортогональных T_pM.

Теорема 19.2. Если M — гладко параметризованное многообразие размерности $k \geqslant 2$ в $\mathbb{R}^{k+1}$, на котором имеется непрерывное поле единичных нормалей, то M ориентируемо.

Замечание. Под "полем нормалей" понимается отображение $p \mapsto N(p)$, где $N(p)$ — единичная нормаль.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — какой-то атлас M. В каждой карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ при необходимости сделаем замену последней координаты x_k на $-x_k$, чтобы добиться неравенства

$$T = \begin{pmatrix} N_1(p) & \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\alpha_1}}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{k+1}(p) & \frac{\partial f_{\alpha_{k+1}}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{\alpha_{k+1}}}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \qquad \det T > 0 \tag{19.1}$$

в точке p. Здесь $N(p) = (N_1(p), \dots, N_{k+1}(p))^T, \varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_{k+1}}$ — координатные функции отображения φ_α. Покажем, что получившийся атлас будет ориентирующим. Обозначим его той же буквой $\mathcal{A}$.

Определим отображение $V \in L(\mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R}^{k+1}) : V(N(p)) = N(p)$,

$$V\left(\underbrace{[\mathrm{d}_p\varphi_\alpha](0,0,\dots,1,\dots,0)^T}_{\in\mathbb{R}^{k+1}}\right) = [\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha](0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T,$$

где $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ — пара карт, про которую мы хотим проверить, что они согласованы в p.

$$\widetilde{T}^{-1}VT = I_{k+1}, \qquad \underbrace{\det \widetilde{T}^{-1}}_{>0} \cdot \det V \cdot \underbrace{\det T}_{>0} = 1,$$

откуда $\det V > 0$. Рассмотрим U — ортогональное преобразование $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1} : U(N(p)) = (1,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{k+1}$. $UT_pM = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : x = (0, x_2, \dots, x_{n+1})\}$. Рассмотрим

$$\det(\mathrm{d}(\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}\varphi_\alpha)) = \det\left[(\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha)^{-1}\big|_{T_pM} \cdot [\mathrm{d}_x\varphi_\alpha]\right] \overset{?}{>} 0. \tag{19.2}$$

По построению,

$$\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \cdot V \cdot \mathrm{d}_x\varphi_\alpha = I_k$$

Обозначим через $\tilde{U}$ оператор из T_pM в $\mathbb{R}^k$ такой, что $Uy = (0, \tilde{U}y) \in \mathbb{R}^{k+1}$ для всех $y \in T_pM$. Тогда предыдущее равенство влечет

$$I_k = (\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}U^{-1})(UVU^{-1})(U\mathrm{d}_x\varphi_\alpha) = \underbrace{(\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}\tilde{U}^{-1})}_{L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)}(\tilde{U}V\tilde{U}^{-1})\underbrace{(\tilde{U}\mathrm{d}_x\varphi_\alpha)}_{L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)}.$$

Заметим, что

$$UVU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U}V\tilde{U}^{-1} \end{pmatrix}$$

Значит, $\det V = \det UVU^{-1} = \det \tilde{U}V\tilde{U}^{-1}$ и поэтому

$$\begin{aligned} 1 = \det I_k &= \det(\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}\tilde{U}^{-1}) \cdot \det(\tilde{U}V\tilde{U}^{-1}) \cdot \det(\tilde{U}\mathrm{d}_x\varphi_\alpha) \\ &= \det(\mathrm{d}_p\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \cdot \mathrm{d}_x\varphi_\alpha) \cdot \underbrace{\det V}_{>0} \end{aligned}$$

$$\implies \det(\mathrm{d}_p\varphi_\alpha^{-1}\mathrm{d}_x\varphi_\alpha) > 0.$$

Итак, карты согласованы в точке p. Мы пользовались неравенством (19.1), которое имеет место во всей карте, содержащей p, так как det и $N(p)$ — непрерывные отображения, поэтому левая часть в (19.1) не может менять знак на связном множестве $\varphi(U_\alpha) \cap \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}_\alpha)$, то есть карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ согласованы. ∎

Следствие 19.3. Пусть $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $X = \{x : F(x) = c\}$. Если $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$ в X, то множество X либо пусто, либо является ориентируемым гладко параметризованным многообразием.

Доказательство. Из предыдущего семестра знаем, что если $X \neq \varnothing$, то это гладко параметризованное многообразие. Остается проверить, что на этом множестве есть непрерывное поле нормалей. Можно взять $\frac{\operatorname{grad} F(x)}{\|\operatorname{grad} F(x)\|}$ (мы знаем, что $\operatorname{grad} F(x)$ — нормаль в точке x). ∎

Пример 19.2. Сфера $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — ориентируемое гладко параметризованное многообразие по предыдущему следствию, так как $M = \{x : F(x, y, z)^T = 1\}$, где $F(x, y, z)^T = x^2 + y^2 + z^2$; $\operatorname{grad} F = (2x, 2y, 2z)^T \neq 0$ на M.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие с краем с атласом

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha),\ U_\alpha \in \{\mathbb{R}^k, -\mathbb{H}^k\}\}.$$

Краем M называется топологическое пространство

$$\partial M = \bigcup \varphi_\alpha(\partial U_\alpha),$$

где объединение берется по таким α, что $U_\alpha = -\mathbb{H}_k$, и

$$\partial(-\mathbb{H}^k) = \{x \in \mathbb{R}^k : x = (0, x_2, \ldots, x_k)\},$$

с топологией, индуцированной из M.

Утверждение 19.4. Определение края многообразия корректно (не зависит от выбранного атласа).

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}$ — другой атлас M, $\widetilde{\partial M}$ — соответствующий ему край. Покажем, что $\widetilde{\partial M} \subset \partial M$ (из этого по симметрии будет следовать равенство). Пусть $\widetilde{p} \in \widetilde{\partial M}$. Тогда существует карта $(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ такая, что $\widetilde{U}_\alpha = -\mathbb{H}^k$, $\widetilde{p} = \widetilde{\varphi}_\alpha(\widetilde{x})$, где $\widetilde{x} \in \partial(-\mathbb{H}^k)$. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта в $\mathcal{A}$, содержащая $\widetilde{p}$, то есть $\varphi_\alpha(x) = \widetilde{p}$ для некоторого $x \in U_\alpha$. Предположим, что x лежит в U_α с некоторой окрестностью пространства $\mathbb{R}^k$. Тогда $\widetilde{p} \notin \partial M$. $\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha$, суженное на окрестность x, — диффеоморфизм на свой образ в $\mathbb{R}^k$, причем этот образ открыт в $\mathbb{R}^k$ по теореме об обратном отображении (или по теореме об открытости отображений с невырожденным дифференциалом). Значит, $\widetilde{x}$ лежит в $-\mathbb{H}^k$ с некоторой окрестностью в пространстве $\mathbb{R}^k$, что невозможно. ∎

Теорема 19.5. Пусть $k \geqslant 2$, M — C^n-гладкое многообразие размерности k с краем. Тогда ∂M — C^n-гладкое многообразие размерности $k - 1$, причем $\partial(\partial M) = \varnothing$. Если M ориентируемо, то ∂M — тоже ориентируемо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — C^n-гладкий атлас для M; ориентирующий, если M — ориентируемо. $U_\alpha \in \{\mathbb{R}^k, -\mathbb{H}^k\}$. Тогда множество

$$\mathcal{A}_0 = \{(\partial U_\alpha), \varphi_\alpha\}_{\alpha : U_\alpha = -\mathbb{H}^k}$$

— (ориентирующий) атлас для ∂M, где ∂U_α отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{k-1}$. Очевидно, что это C^n-гладкий атлас для ∂M. Проверим, что он ориентирующий. Рассмотрим пару таких карт $(\partial U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(\partial U_\beta, \varphi_\beta)$ из этого атласа, что

$$\varphi_\alpha(\partial U_\alpha) \cap \varphi_\beta(\partial U_\beta) \neq \varnothing.$$

Положим $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ там, где это определено. Так как M — ориентируемо, то $\det \mathrm{d}_x(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta) > 0$ для всех x из области определения $\psi_{\alpha\beta}$. Если $x \in \partial U_\beta$, то

$$\mathrm{d}_x\psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\psi_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad \det(\mathrm{d}_x\psi_{\alpha\beta}) = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) \cdot \det J.$$

Поймем, что $\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) > 0$. Он не равен нулю, так как $\psi_{\alpha\beta}$ — диффеоморфизм. Предположим, что $\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) < 0$, $U_\alpha = U_\beta = -\mathbb{H}^k$. $\psi_1(x) = 0$, так как $x \in \partial U_\beta$, $\psi(x) \in \partial U_\alpha$. Но если $\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) < 0$, то в U_α найдется точка, в которой $\psi_1(y) > 0$, что невозможно, так как $\psi_{\alpha\beta}(U_\alpha) \subset U_\beta = -\mathbb{H}^k$. Значит, $\det J > 0$, а J — матрица Якоби отображения $\varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta\big|_{\partial(-\mathbb{H}^k)} : \partial(-\mathbb{H}^k) \to \partial(-\mathbb{H}^k)$, если $\partial(-\mathbb{H}^k)$ отождествить с $\mathbb{R}^k$. Значит, отображения перехода в атласе $\mathcal{A}$ имеют положительный якобиан. Значит, $\mathcal{A}_0$ — ориентирующий атлас. $\mathcal{A}_0$ состоит из карт с пустой границей, а потому это многообразие без края. ■

Определение. Ориентация ∂M, построенная в предыдущей теореме, называется *согласованной* с ориентацией M.

Утверждение 19.6. Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $k = 1$. Тогда ∂M состоит не более чем из двух точек.

Доказательство. M — линейно связно, так как множество точек, которые можно соединить путем с заданной точкой M является открытым, замкнутым и непустым. Если ∂M состоит содержит точки a_1, a_2, то для любой точки $a_3 \neq a_1,\ a_2$ рассмотрим пути $\gamma_1\colon [t_1, t_2] \to M : \gamma(t_1) = a_1,\ \gamma(t_2) = a_2$ и $\gamma_2\colon [t_3, t_4] \to M : \gamma(t_3) = a_3,\ \gamma(t_4) = a_1$. Если $a_3 \in \gamma_1(t_1, t_2)$, то a_3 не может быть граничной точкой, так как в этом случае прообраз $\varphi_\alpha^{-1}(V \setminus \{a_3\})$ небольшой проколотой окрестности V в a_3 состоит из двух компонент связности, а не из одной, как должно было бы быть, если бы a_3 лежало на границе.

Если $a_3 \notin \gamma_1(t_1, t_2)$, то возможны 2 варианта: либо первое пересечение γ_1 с γ_2 (обозначим его через x) совпадает с a_1 или a_2, либо лежит внутри $\gamma_1(t_1, t_2)$. Во втором случае прообраз малой проколотой окрестности x имеет три компоненты связности, вместо двух, а в первом — две, вместо одной. ■

Следствие 19.7. Пусть M — гладкое связное многообразие размерности 1, $\partial M = \{a_1, a_2\}$. Тогда M — ориентируемо, на ∂M определена ориентация $(a_1, -)$, $(a_2, +)$, если атлас для M состоит из карты $\{([0, \frac{3}{4}], \gamma),\ [\frac{1}{2}, 1], \gamma\}$, где $\gamma(0) = a_1$, $\gamma(1) = a_2$. ∎

Лемма 19.8. Существует функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что $f(x) = 1$ на $[-1, 1]$, $f(x) = 0$ при $|x| \geqslant 3$ и $0 < f(x) < 1$ на $(-3, -1) \cup (1, 3)$. Такая функция называется *гладким спуском с единицы*.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_0 = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$; по построению, $f_0(x) = 0\ \forall x : |x| \geqslant 1$. Теперь рассмотрим

$$f_1(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_0(t)\,\mathrm{d}t}{\int\limits_{-\infty}^{x} f_0(t)\,\mathrm{d}t} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Теперь $f_1(x) = 0\ \forall x \leqslant -1$, $f_1(x) = 1\ \forall x \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$f_2(x) = f_1(x+2) + f_1(-x-2) - 1$ — искомая функция. ∎

Следствие 19.9. Существует функция $f_m\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ такая, что $f_m(x) = 1$ на $[-1, 1]^m$ и $f_m(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus (-3, 3)^m$; $0 \leqslant f_m(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^m$, $f_m \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. Возьмем функцию f из предыдущей леммы и рассмотрим

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_m).$$

Она удовлетворяет всем нужным свойствам. ∎

Теорема 19.10 (о разложении единицы на многообразии). Пусть M — C^n-гладкое многообразие, $K \subset M$ — компакт, $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — некоторый атлас M. Тогда существует конечный набор карт $(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}), \ldots, (U_{\alpha_N}, \varphi_{\alpha_N})$ и набор функций $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_N} \in C^n(M, \mathbb{R})$ такой, что $K \subset \bigcup_{k=1}^N \varphi_{\alpha_k}(U_{\alpha_k})$, $\operatorname{supp} e_{\alpha_k} \subset \varphi_{\alpha_k}(U_{\alpha_k})$, причем $\sum_{k=1}^N e_{\alpha_k}(x) = 1\ \forall x \in K$, $0 \leqslant e_{\alpha_k} \leqslant 1$ всюду на M.

Замечание. Если $g\colon M \to N$, где M, N — C^n-гладкие многообразия, то будем писать, что $g \in C^k(M, N)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, если отображения $\psi_\beta^{-1} \circ g \circ \varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\beta$ лежат в C^k на области своего определения, где $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — произвольная карта для M, (V_β, ψ_β) — произвольная карта в N.

Доказательство. Для каждой точки $p \in K$ построим окрестность $V(p) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ для некоторого $\alpha \in I$ следующим образом: сначала найдем α такое, что $\varphi_\alpha(U_\alpha) \ni p$. $U_\alpha = \mathbb{R}^k$ или $-\mathbb{H}^k$, где k — размерность многообразия M. Рассмотрим $x \in U_\alpha : \varphi_\alpha(x) = p$. Пусть $f_\alpha(y) = f_k(y - x)$ для $y \in \mathbb{R}^k$, где f_k — гладкий спуск с единицы в $\mathbb{R}^k$. $\widetilde{f_\alpha} =$

$f_\alpha|_{U_\alpha}$. Если $U_\alpha = \mathbb{R}^k$, то $\widetilde{f_\alpha} = f_\alpha$. $V(p) = \varphi_\alpha((x + (-1,1)^k) \cap U_\alpha)$. Выберем конечное число окрестностей вида $V(p)$, покрывающих K. Назовем карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \varphi_\alpha(U_\alpha)$ содержит это конечное семейство окрестностей, $(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}), \ldots, (U_{\alpha_n}, \varphi_{\alpha_n})$. Пусть $\widetilde{f_{\alpha_j}}$ — соответствующие отображения в U_{α_j}. Положим

$$\theta_{\alpha_j}(z) = \begin{cases} \widetilde{f_{\alpha_j}}(\varphi_{\alpha_j}^{-1}), & z \in U_{\alpha_j}, \\ 0, z \notin U_\alpha, \end{cases}$$

при $j \in \{1, \ldots, N\}$. $\theta_j \in C^n(M, \mathbb{R})$. Положим $e_{\alpha_1} = \theta_{\alpha_1}$, $e_{\alpha_2} = \theta_{\alpha_2}(1 - \theta_{\alpha_1})$, $e_{\alpha_3} = \theta_{\alpha_3}(1 - \theta_{\alpha_1})(1 - \theta_{\alpha_2})$ и так далее. Тогда $1 - \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j} = 1 - \theta_{\alpha_1} - \theta_2(1 - \theta_{\alpha_1}) - \cdots - \theta_{\alpha_N}(1 - \theta_{\alpha_{N-1}}) \cdot \ldots \cdot (1 - \theta_{\alpha_1}) = (1 - \theta_{\alpha_2})(1 - \theta_{\alpha_1}) - \theta_{\alpha_3}(1 - \theta_{\alpha_2})(1 - \theta_{\alpha_1}) - \cdots = \cdots = (1 - \theta_{\alpha_N})(1 - \theta_{\alpha_{N-1}}) \ldots (1 - \theta_{\alpha_1})$. Значит, $1 - \sum_{j=1}^N e_{\alpha_j}(z) = 0 \, \forall z \in K$, поскольку для некоторого индекса j $1 - \theta_{\alpha_j}(z) = 0$. По построению, $\operatorname{supp} e_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_j}) \subset \varphi_{\alpha_j}(U_{\alpha_j})$, так как $\operatorname{supp} e_{\alpha_j} \subset \varphi_{\alpha_j}(U_{\alpha_j})$. ■

Определение. Пусть X — конечномерное линейное пространство. *Полилинейной формой* ω порядка k на X называется отображение $\omega\colon X^k \to \mathbb{R}$ такое, что оно линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных.

Определение. Пусть $\omega_1\colon X^k \to \mathbb{R}$, $\omega_2\colon Y^m \to \mathbb{R}$ — полилинейные формы порядков k и m. Определим $\omega_1 \otimes \omega_2$ как форму порядка $k + m$ на $X^k \times Y^m$ такую, что

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) = \omega_1(x_1, \ldots, x_k)\omega_2(y_1, \ldots, y_m).$$

Определение. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — базис в X. Двойственным базисом к $\{f_i\}$ называется набор линейных функционалов $e_1, \ldots, e_n$ таких, что $e_i(f_j) = \delta_{ij}$.

Заметим, что e_j определяет 1-форму $e_j\colon x \mapsto e_j(x)$ на X. Значит, $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ — k-форма на X для любых $i_1, \ldots, i_k \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.

Определение. Формы вида $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ называются базисными формами в пространстве полилинейных форм на X.

Эти формы действительно образуют базис.

Определение. Пусть ω — полилинейная форма на X. Она называется *кососимметрической*, если она изменяет знак при перестановке любой пары соседних координат.

Пример 19.3. Определитель.

Определение. Если ω — k-форма на X, то

$$\operatorname{Alt}(\omega)\colon (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \omega(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(t)}) \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Отображение $\omega \mapsto \operatorname{Alt}(\omega)$ называется *оператором альтернирования*.

Замечание. $\operatorname{Alt}(\omega)$ — кососимметрическая форма для любой полилинейной формы ω. $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega)) = \operatorname{Alt}(\omega)$.

Определение. Внешнее произведение форм ω_1, ω_2, где ω_1 — k-форма, ω_2 — m-форма, определяется равенством

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\operatorname{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2).$$

Пример 19.4.

$$e_1 \wedge e_2 = \frac{(1+1)!}{1!1!} \cdot \frac{1}{2!}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1),$$

$$(e_1 \wedge e_2)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 19.11. Пусть X — конечномерное линейное пространство с базисом $f_1, \ldots, f_n$, $e_1, \ldots, e_n$ — двойственный базис. Тогда $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = \det()_{i_1 \ldots i_k}$, то есть

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}(x_1, \ldots, x_k) = \det \begin{pmatrix} x_{1i_1} & \ldots & x_{1i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{ki_1} & \ldots & x_{ki_k} \end{pmatrix},$$

где $x_j = \sum x_{js} f_s \; \forall j = 1, \ldots, k$, то есть $x_{js} = e_s(x_j)$.

Доказательство. По индукции, смотрим курс алгебры. ■

Следствие 19.12. Если $i_{j_1} = i_{j_2}$, то $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = 0$. ■

Следствие 19.13. Если $k > n$, то любая полилинейная кососимметрическая форма равна нулю.

Следствие 19.14. Любая кососимметрическая форма ω порядка k имеет вид

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}.$$

Доказательство. Знаем, что любая полилинейная форма имеет вид

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n} b_{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}.$$

Кроме того, так как $\omega = \operatorname{Alt}(\omega)$ для кососимметрических форм, $\omega = \sum b_{i_1 \ldots i_k} \operatorname{Alt}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k})$, но $\operatorname{Alt}(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}) = \frac{1}{k!} \det()_{i_1 \ldots i_k}$ по определению det и Alt. ■

Замечание. Это разложение единственно.

Определение. *Дифференциальной формой* порядка k на $E \subset \mathbb{R}^n$ называется отображение, сопоставляющее точке $x \in E$ полилинейную форму. Если эта форма является кососимметрической, то дифференциальная форма называется *внешней*.

В дальнейшем мы часто будем опускать либо опускать слово “внешняя”, говоря о внешних дифференциальных формах, либо говорить просто о “внешних формах”.

Обозначение. $\mathrm{d}x_i$ — форма на $\mathbb{R}^n$, сопоставляющая вектору x его i-ую координату.

Пример 19.5. $(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(x+z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ — внешняя дифференциальная на $\mathbb{R}^3$ порядка 2. Вычислим значение этой формы в точке $x_0=(1,1,1)$ на векторах $v_1=(1,0,1)^T$, $v_2=(0,0,1)^T$: $\omega(x_0)=2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$,

$$\omega(x_0)(v_1,v_2)=2\det\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=0. \tag{19.3}$$

Теорема 19.15. Любая внешняя дифференциальная форма порядка k на $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} f_{i_1\ldots i_k}(x)\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}, \tag{19.4}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$.

Доказательство. В каждой точке $x\in\mathbb{R}^n$ $\omega(x)$ — форма порядка k, а значит, $\omega(x)=$ правой части с некоторыми коэффициентами, зависящими от x. ∎

Замечание. Представление, построенное в теореме выше, единственно (так как единственно соответствующее представление для алгебраических форм).

Определение. Внешняя дифференциальная форма ω лежит в классе C^l, если $f_{i_1\ldots i_k}\in C^l(\mathbb{R}^n)$ для всех функций $f_{i_1\ldots i_k}$ из разложения. Аналогично определяется гладкость форм, заданных на подмножестве $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть ω имеет вид (19.4), ω — форма класса C^1. *Внешний дифференциал* ω — это форма $\mathrm{d}\omega$ порядка $k+1$, определенная равенством

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}(\mathrm{d}f_{i_1\ldots i_k})\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}, \tag{19.5}$$

где

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \tag{19.6}$$

для любой $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Пример 19.6. Посчитаем дифференциал формы из предыдущего примера:

$$\mathrm{d}\big((x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(x+z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\big)= \tag{19.7}$$

$$=(2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z= \tag{19.8}$$

$$=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z. \tag{19.9}$$

Определение. Пусть M — гладкое многообразие с краем, $\gamma_1,\gamma_2\colon[0,1]\to M$ — некоторые пути в M, $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p\in M$. Тогда пути γ_1,γ_2 называются *эквивалентными*, если для любой карты $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha(U_\alpha)\ni p$, многообразия M выполняется равенство

$$\varphi_\alpha^{-1}(\gamma_1(t))'\big|_{t=0}=\varphi_\alpha^{-1}(\gamma_2(t))'\big|_{t=0}. \tag{19.10}$$

Определение. Пусть M — гладкое многообразие с краем, $p \in M$. Тогда через $T_p(M)$ обозначается множество классов эквивалентности гладких путей, проходящих через p.

Обозначение. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта некоторого атласа многообразия M, $\xi \in U_\alpha$. Тогда через $[\varphi_\alpha(t\xi)]$ будем обозначать класс эквивалентности путей, содержащий путь $t \mapsto \varphi_\alpha(t\varepsilon\xi)$, $t \in [0,1]$, где $\varepsilon > 0$ — такое число, что $t\xi \in U_\alpha$ для $t \in [0,\varepsilon]$.[33]

Утверждение 19.16. Если $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — такая карта M, что $\varphi_\alpha(0) = p$, то

$$T_p(M) = \left\{[\varphi_\alpha(t\xi)] \,\middle|\, \xi \in U_\alpha\right\}. \tag{19.11}$$

Доказательство. Включение $\supset$ очевидно. В обратную сторону: если $[\gamma] \in T_p(M)$, то $[\gamma] = [\varphi_\alpha(t\xi_\gamma)]$, где

$$\xi_\gamma = \varphi_\alpha^{-1}(\gamma(t))'\big|_{t=0}, \tag{19.12}$$

так как

$$\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(t\xi_\gamma))'\big|_{t=0} = \xi_\gamma, \tag{19.13}$$

то есть выполнено (19.10). ∎

Следствие 19.17. $T_p(M)$ можно отождествить с U_α: либо с $\mathbb{R}^k$, либо с $-\mathbb{H}^k$. ∎

Значит, если $p \in M \setminus \partial M$, то $T_p(M)$ — линейное пространство, и определены операции сложения и умножения на скаляр элементов $T_p(M)$.

Упражнение. Надо проверить, что эти операции не зависят от выбора карты — для этого нужно использовать линейность отображения $\mathrm{d}_x(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)$ и цепное правило.

Определение. ω — *внешняя дифференциальная форма* порядка k на многообразии M размерности n, если для любой точки $p \in M$ определена внешняя форма $\omega(p)$ порядка k на $T_p(M)$. Если $p \notin \partial M$, то $T_p(M) = \mathbb{R}^n$ — линейное пространство, если же $p \in \partial M$, то значение формы на векторах $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus (-\mathbb{H}^n)$ определяются по линейности: $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ либо $\xi \in -\mathbb{H}^n$, либо $-\xi \in -\mathbb{H}^n$.

Определение. Пусть M — многообразие, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта на M, $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, ω — внешняя форма порядка k на M. *Переносом* ω в U_α называется форма ω_α^* на U_α такая, что

$$\omega(\varphi_\alpha(a))([\varphi_\alpha(t\xi_1)], \dots, [\varphi_\alpha(t\xi_k)]) = \omega_\alpha^*(a)(\xi_1, \dots, \xi_k), \tag{19.14}$$

где $a \in U_\alpha$, $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$, $n = \dim M$.

Определение. Говорят, что ω — форма гладкости C^l на M, если ω_α^* — форма гладкости C^l для переноса ω в любую карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Определение корректно, если l не превосходит гладкости многообразия M.

Определение. Если ω — C^1-гладкая форма порядка k на гладком многообразии M, то ее внешний дифференциал — это форма порядка $k+1$ такая, что

$$\mathrm{d}\omega([\varphi_\alpha(t\xi_1)], \dots, [\varphi_\alpha(t\xi_{k+1})]) = \mathrm{d}\omega_\alpha^*(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}). \tag{19.15}$$

[33] Если $U_\alpha = -\mathbb{H}_k$, то это может быть не выполнено для $\varepsilon = 1$.

Пример 19.7. Пусть M — гладко параметризованное многообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности k, $\widetilde{\omega}$ — форма в $\mathbb{R}^n$ порядка m. Эта форма порождает форму ω на M следующим образом:

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = \widetilde{\omega}(y_1, \dots, y_m), \quad x_i \in T_p(M), \quad y_i = x_i \in \mathbb{R}^n.$$

Если $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта M, и $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, то

$$\omega(p)([\varphi_\alpha(t\xi_1)], \dots, [\varphi_\alpha(t\xi_m)]) \tag{19.16}$$

$$= \sum f_{i_1 \dots i_m}(p)(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_m})\big((\mathrm{d}_a\varphi_\alpha)\xi_1, \dots, (\mathrm{d}_a\varphi_\alpha)\xi_m\big) \tag{19.17}$$

$$= \sum f_{i_1 \dots i_m}(p) \det \begin{pmatrix} (\mathrm{d}_a\varphi_\alpha)\xi_1 \\ \vdots \\ (\mathrm{d}_a\varphi_\alpha)\xi_m \end{pmatrix}_{i_1 \dots i_m} \tag{19.18}$$

$$= \sum f_{i_1 \dots i_m}(p) \det(\mathrm{d}_x\varphi_\alpha)_{i_1 \dots i_m} \det \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}. \tag{19.19}$$

Следствие 19.18. Пусть M — гладко параметризованное многообразие размерности m в $\mathbb{R}^n$,

$$\omega = \sum f_{i_1 \dots i_m} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}.$$

Тогда ее сужение на M действует по формуле

$$\begin{aligned} &\omega(p)([\varphi_\alpha(t\xi_1)], \dots, [\varphi_\alpha(t\xi_m)]) \\ &\quad = \sum f_{i_1 \dots i_m}(p) \det(\mathrm{d}_x\varphi_\alpha)_{i_1 \dots i_m} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \, \mathrm{d}x_{i_m}(\xi_1, \dots, \xi_m), \end{aligned}$$

где $\varphi_\alpha(a) = p$, $(\mathrm{d}_a\varphi_\alpha)_{i_1 \dots i_m}$ — матрица, полученная из матрицы Якоби выкидыванием всех строк, кроме имеющих номера $i_1, \dots, i_m$. ■

Следствие 19.19. Пусть $M, \widetilde{\omega}, \omega$ — как раньше. Тогда перенос с ω_α^* формы ω в карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ имеет вид

$$\omega_\alpha^*(x)(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum f_{i_1 \dots i_m}(\varphi_\alpha(x)) \det(\mathrm{d}_x\varphi)_{i_1 \dots i_m} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_m}(\xi_1, \dots, \xi_m)$$

— вытекает из определения переноса формы и предыдущего следствия. ■

Пример 19.8. Пусть $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\widetilde{\omega} = y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$. Найдем перенос этой формы в карту $U_\alpha = (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$,

$$\varphi_\alpha : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\omega^*_\alpha = -\sin u \sin v \det\begin{pmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ 0 & -\sin v \end{pmatrix}_{1,3} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \tag{19.20}$$

$$= \sin u \sin v(-\sin u \sin v \cdot (-\sin v))\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \tag{19.21}$$

$$= -\sin^2 u \cdot \sin^3 v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v. \tag{19.22}$$

Другой способ[34]:

$$\omega^* = \sin u \cdot \sin v \cdot (\mathrm{d}\cos v \wedge \mathrm{d}(\cos u \sin v)) \tag{19.23}$$

$$= \sin u \cdot \sin v(-\sin v\,\mathrm{d}v \wedge (-\sin u \sin v\,\mathrm{d}u + \cos u \cdot \cos v\,\mathrm{d}v)) \tag{19.24}$$

$$= \sin u \cdot \sin v(\sin^2 v \cdot \sin u\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u) \tag{19.25}$$

$$= \sin^2 u \cdot \sin^3 v\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u. \tag{19.26}$$

Упражнение. Понять, что второй способ работает всегда.

Определение. Пусть ω — дифференциальная форма порядка k в области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k$, где $f \in L^1(\Omega, \lambda_k)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega \omega = \int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\lambda_k. \tag{19.27}$$

Определение. Пусть M — ориентированное гладкое компактное многообразие размерности k, ω — гладкая форма на M порядка k, $\operatorname{supp}\omega = \{x : \omega(x) \neq 0\}$, и пусть существует карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ из ориентирующего атласа такая, что $\operatorname{supp}\omega \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Тогда

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{U_\alpha} \omega^*_\alpha, \tag{19.28}$$

где ω^*_α — перенос ω в $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

В общем случае выберем набор карт $(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}), \ldots, (U_{\alpha_N}, \varphi_{\alpha_N}) : \bigcup_{j=1}^N \varphi_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}) \supset M$, найдем разбиение единицы $\{e_{\alpha_j}\}_{j=1}^N$, подчиненное $\{(U_{\alpha_j}, \varphi_{\alpha_j})\}$, и положим

$$\int\limits_M \omega = \sum_{j=1}^N \int\limits_M e_{\alpha_j}\omega. \tag{19.29}$$

Замечание. Существование разбиения единицы доказывали ранее. Можно найти гладкое разбиение единицы, хотя (19.29) верна для произвольного борелевского разбиения единицы.

Теорема 19.20. Все введенные определения корректны.

Доказательство.

[34]Видимо, просто подставить вместо x, y, z их выражение через u и v — ОМ.

1. Сначала проверим, что (19.28) не зависит от выбора карты. Пусть (U_β, φ_β) : $\operatorname{supp}\omega \subset \varphi_\beta(U_\beta)$, $\omega^*_\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega([\varphi_\alpha(t\xi_1)], \ldots, [\varphi_\alpha(t\xi_k)])$. Покажем, что для любого $j : 1 \leqslant j \leqslant k$

$$[\varphi_\alpha(t\xi_j)] = [\varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(t\xi_j)))] = [\varphi_\beta((\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_j)], \tag{19.30}$$

где $\varphi_\alpha(a) = p$. Проверим (19.30) по определению эквивалентности путей:

$$(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(t\xi_i)))'\Big|_{t=0} = \xi_j = (\varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta(\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_j t)_t\Big|_{t=0}.$$

Итак,

$$\omega^*_\alpha(a)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega^*_\beta(\widetilde{a})\big((\mathrm{d}_\alpha\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_1, (\mathrm{d}_\alpha\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_2, \ldots, (\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_k\big),$$

где $\widetilde{a} = \varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha(a)$. Если

$$\omega^*_\alpha(a) = f_\alpha(a)(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$

и

$$\omega^*_\beta(\widetilde{a}) = f_\beta(\widetilde{a})(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

то

$$\begin{aligned}\omega^*_\alpha(a) &= f_\beta(\widetilde{a})(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k)\big((\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_1, \ldots, (\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\xi_k\big),\\ &= f_\beta(\widetilde{a}) \det(\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)(\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k)\end{aligned}$$

(общий факт: $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k(L\xi_1, \ldots, L\xi_k) = \det L \cdot (\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, так как $\det(AB) = \det A \det B$). Значит, $f_\alpha(a) = f_\beta(\widetilde{a}) \det\, \mathrm{d}_a(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)$. Тогда

$$\int\limits_{U_\alpha} \omega^*_\alpha = \int\limits_{U_\alpha} f_\alpha(a)\mathrm{d}\lambda_k = \int\limits_{U_\alpha} f_\beta(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha(a)) \det(\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\, \mathrm{d}\lambda_k \tag{19.31}$$

$$= \int\limits_{(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)(U_\alpha)} f_\beta\, \mathrm{d}\lambda_k = \int\limits_{U_\beta} f_\beta\, \mathrm{d}\lambda_k = \int\limits_{U_\beta} \omega^*_\beta. \tag{19.32}$$

Здесь использовалась формула для замены переменной в интеграле: в ней нужно, что было выполнено $\det(\mathrm{d}_a\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha) > 0$, а это так, поскольку атлас ориентирующий (состоит из согласованных карт).

2. Независимость от разбиения. Пусть $\{e_{\alpha_j}\}_{j=1}^N$, $\{e_{\beta_j}\}_{j=1}^N$ — два разбиения, соответствующие картам $(U_{\alpha_j}, \varphi_{\alpha_j})$, $(U_{\beta_j}, \varphi_{\beta_j})$. Тогда:

$$\int\limits_M \omega = \sum_j \int\limits_{U_{\alpha_j}} (e_{\alpha_j}\omega)^*_{\alpha_j} = \sum_j \int\limits_{U_{\alpha_j}} \left(\left(\sum_s e_{\beta_s}\right) e_{\alpha_j}\omega\right)^*_{\alpha_j} \tag{19.33}$$

$$= \sum_{j,s} \int\limits_{U_{\alpha_j} \cap \varphi_{\alpha_j}^{-1}(\varphi_{\beta_s}(U_{\beta_s}))} (e_{\beta_s} e_{\alpha_j} \omega)^*_{\alpha_j} \tag{19.34}$$

$$= [\text{по независимости интеграла от карты}] \tag{19.35}$$

$$= \sum_{j,s} \int\limits_{\varphi_{\beta_s}^{-1} \varphi_\alpha(U_{\alpha_j} \cap \varphi_{\alpha_j}^{-1}(\varphi_{\beta_s}(U_{\beta_s})))} (e_{\beta_s} e_{\alpha_j} \omega)^*_{\alpha_j} \tag{19.36}$$

$$= \sum_{j,s} \int\limits_{\varphi_{\beta_s}^{-1} \varphi_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}) \cap U_{\beta_s}} (e_{\beta_s} e_{\alpha_j} \omega)^*_{\alpha_j} \tag{19.37}$$

$$= \sum_{s} \int\limits_{\varphi_{\beta_s}^{-1} \varphi_{\alpha_j}(U_{\alpha_j}) \cap U_{\beta_s}} (e_{\beta_s} e_{\alpha_j} \omega)^*_{\alpha_j} \tag{19.38}$$

$$= \sum_{s} \int\limits_{U_{\beta_s}} (e_{\beta_s} \omega)^*_{\beta_s}, \tag{19.39}$$

что и требовалось.

∎

Пример 19.9. Как в предыдущем примере: $\omega = y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, $\omega^* = -\sin^2 u \cdot \sin^3 v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$, $M = \Phi((0, 2\pi) \times (0, \pi))$, где

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \cos v \\ \cos v \end{pmatrix}.$$

Посчитаем интеграл этой формы:

$$\int\limits_M \omega = \iint\limits_{(0,2\pi)\times(0,\pi)} (-\sin^2 u \sin^3 v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{19.40}$$

$$= -\left(\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^3 v\,\mathrm{d}v\right) = -\frac{4}{3}\pi. \tag{19.41}$$

Определение. Напомним, что если M — многообразие с краем и ориентирующим атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где $U_\alpha = \mathbb{R}^k$ или $U_\alpha = -\mathbb{H}^k$, то согласованная ориентация края ∂M задается атласом $\{(\partial(-\mathbb{H}^k), \varphi_\alpha)\}$ по таким α, что $U_\alpha = -\mathbb{H}^k$.

Теорема 19.21 (Стокса). Пусть M — компактное C^1-гладкое ориентированное многообразие размерности $k \geqslant 2$ с краем ∂M, на котором задана согласованная ориентация. Пусть ω — C^1-гладкая форма на M размерности $k - 1$. Тогда

$$\int\limits_M \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Доказательство. Используя разбиение единицы и линейность интеграла, можно ограничиться случаем, когда $\operatorname{supp} \omega \subset U_\alpha$ для некоторой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Так как ω —

форма порядка $k-1$, то

$$\omega_\alpha^* = \sum f_{i_1\ldots i_k}\,\mathrm{d}\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\xi_{i_{k-1}}$$

представляется сумма форм вида

$$\widetilde{\omega}^* = f(x)\,\mathrm{d}\xi_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}\xi_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\xi_k.$$

Рассмотрим каждое такое слагаемое отдельно. Есть два случая: $U_\alpha = \mathbb{R}^k$ и $U_\alpha = -\mathbb{H}^k$. В случае $U_\alpha = \mathbb{R}^k$:

$$\int\limits_{U_\alpha}\mathrm{d}\omega_\alpha^* = \int\limits_{\mathbb{R}^k}\cdots\int\frac{\partial f}{\partial\xi_j}\,\mathrm{d}\xi_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\xi_k = 0,$$

так как можно проинтегрировать по ξ_j и воспользоваться тем, что $\int_{\mathbb{R}} g'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ для всех $g\in C^1(\mathbb{R})$: $\operatorname{supp} g$ — компакт (это следует из формулы Ньютона – Лейбница). С другой стороны,

$$\int\limits_{\partial U_\alpha}\widetilde{\omega}_\alpha^* = \int\limits_{\varnothing}\widetilde{\omega}_\alpha^* = 0. \tag{19.42}$$

Таким образом, в этом случае формула Стокса доказана.

Пусть $U_\alpha = -\mathbb{H}^k$. Тогда

$$\int\limits_{U_\alpha}\mathrm{d}\widetilde{\omega}_\alpha^* = 0 = \int\limits_{\partial U_\alpha}\widetilde{\omega}_\alpha^*, \tag{19.43}$$

если $j\neq 1$. Действительно, интеграл в левой части равен нулю, так как мы интегрируем производную функции с компактным носителем, а интеграл в правой части равен нулю, так как ξ_1 не меняется на $\partial(-\mathbb{H}^k)$. Если $j=1$, то

$$\int\limits_{U_\alpha}\mathrm{d}\omega_\alpha^* = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}\times(-\infty,0]}\cdots\int\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1\ldots\mathrm{d}\xi_k \tag{19.44}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} f(0,\xi_2,\ldots,\xi_k)\,\mathrm{d}\xi_2\ldots\mathrm{d}\xi_k = \int\limits_{\partial(-\mathbb{H}^k)}\widetilde{\omega}_\alpha^*. \tag{19.45}$$

Таким образом, теорема доказана. ■

Пример 19.10. Применим формулу Стокса к форме $y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ на сфере:

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\mathrm{d}(y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x) = \pm\int\limits_{x^2+y^2+z^2=1} y\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x = \pm\frac{4\pi}{3}. \tag{19.46}$$

(плюс или минус выбирается в зависимости от ориентации, выбранной на сфере).

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\mathrm{d}(y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x) = \int\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} = \frac{4}{3}\pi(1^3). \tag{19.47}$$

(сошлось)[35]

Определение. *Векторное поле* в $U \subset \mathbb{R}^n$ — это отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^n$. *Работа постоянного поля F вдоль вектора $v \in \mathbb{R}^n$* — это скалярное произведение $F \cdot v$.

Работа может быть отрицательной.

Определение. Работа непрерывного векторного поля вдоль кривой γ — это интеграл

$$\int\limits_{\gamma} (F, \tau)\, \mathrm{d}s, \tag{19.48}$$

где $\tau(p)$ — единичный касательный вектор, направленный в сторону прохождения кривой. Если $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, то

$$\tau(p) = \frac{(\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0))}{\sqrt{\gamma_1'(t_0)^2 + \ldots + \gamma_n'(t_0)^2}}, \quad t_0 \in [0,1] : \gamma(t_0) = p.$$

Определение. *Форма работы поля $F = (F_1, \ldots, F_n)$* — это дифференциальная форма

$$\omega = F_1\, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\, \mathrm{d}x_n.$$

Утверждение 19.22. Пусть γ — гладкая простая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть гладко параметризованное многообразие размерности 1 с заданной ориентацией. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma} (F, \tau)\, \mathrm{d}s, \tag{19.49}$$

где ω — форма работы поля F.

Доказательство. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — параметризация кривой γ, соответствующая ее ориентации. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{[0,1]} F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t)\, \mathrm{d}t + \ldots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\, \mathrm{d}t \tag{19.50}$$

$$= \int\limits_{[0,1]} \left(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right) \cdot \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int\limits_{[0,1]} \left(F \cdot \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\right) \mathrm{d}s, \tag{19.51}$$

где $\mathrm{d}s = \mathrm{d}S_1$, а S_1 — поверхностная мера на γ. ∎

Определение. *Поток постоянного векторного поля $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$* через параллелограмм, натянутый на вектора $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, в направлении вектора $v_1 \times v_2$ — это

$$\det \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix}.$$

[35] Я не понял, о чем это — ОМ.

Геометрический смысл потока — объем параллелепипеда, натянутого на вектора F, v_1, v_2 (объем жидкости, протекающей через параллелограмм в единицу времени).

Определение. Пусть S — гладко параметризованное ориентированное компактное многообразие размерности $k = m - 1$ в $\mathbb{R}^m$, $V \subset S$ — открытое множество, $\vec{n}$ — поле единичных нормалей на S, согласованное с исходной ориентацией S. Тогда *поток непрерывного поля* через V в направлении $\vec{n}$ — это интеграл

$$\int\limits_V (F \cdot \vec{n})\, \mathrm{d}S_k. \tag{19.52}$$

Определение. *Форма потока* $F = (F_1, \ldots, F_m)$ — это дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} F_j\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m.$$

Утверждение 19.23. Имеет место равенство

$$\int\limits_V \omega = \int\limits_V (F, \vec{n})\, \mathrm{d}S_k. \tag{19.53}$$

Доказательство. Можно считать, что $V \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ для некоторой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ (иначе рассмотрим разбиение единицы). Тогда

$$\int\limits_V \omega = \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(V)} \omega_\alpha^* = \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(V)} \sum_{j=1}^{m} F_j(\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_k)) \det(\mathrm{d}_a \varphi_\alpha)_{1,\ldots,\hat{j},\ldots,m}\, \mathrm{d}\lambda_k. \tag{19.54}$$

По условию,

$$\vec{n} = \frac{\det\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{k+1} \\ & \varphi'_{u_1} & \\ & \vdots & \\ & \varphi'_{u_k} & \end{pmatrix}}{\sqrt{\det\begin{pmatrix} \varphi'_{2u_1} & \varphi'_{3u_1} & \cdots & \varphi_{k+1,u_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi'_{2u_k} & \varphi_{3u'_k} & \cdots & \varphi_{k+1,u_k} \end{pmatrix}^2 + \ldots + \det\begin{pmatrix} \varphi'_{1u_1} & \varphi'_{2u_1} & \cdots & \varphi_{k,u_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi'_{1u_k} & \varphi_{2u'_k} & \cdots & \varphi_{k,u_k} \end{pmatrix}^2}} \tag{19.55}$$

$$= [\text{формула Бине – Коши}] = \frac{\det\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{k+1} \\ & \varphi'_{u_1} & \\ & \vdots & \\ & \varphi'_{u_k} & \end{pmatrix}}{\sqrt{\det J_\varphi^* J_\varphi}} \tag{19.56}$$

Продолжим:

$$= \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(V)} \left(F \cdot \det \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{k+1} \\ & \varphi'_{u_1} & \\ & \vdots & \\ & \varphi'_{u_k} & \end{pmatrix} \right) \mathrm{d}\lambda_k = \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(V)} (F \cdot \vec{n}) \cdot \sqrt{\det J_\varphi^* J_\varphi}\, \mathrm{d}\lambda_k = \int\limits_V (F \cdot \vec{n})\, \mathrm{d}S_k.$$

■

Замечание. В случае $m = 3$, $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} F \\ \varphi'_{u_1} \\ \varphi'_{u_2} \end{pmatrix} = (F \cdot \vec{n}) \cdot c,$$

если F — постоянное поле, V — плоский кусок S. Таким образом, интеграл формы потока действительно соответствует количеству жидкости, протекающему через S в единицу времени.

Определение. Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое поле. Его *дивергенцией* называется

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \operatorname{tr} J_F.$$

Теорема 19.24 (Гаусса – Остроградского). Пусть S — ориентированное гладко параметризованное многообразие размерности $k = m - 1$, существует область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ такая, что $\operatorname{diam} \Omega < \infty$ и $\overline{\Omega} \setminus \Omega = S$. Пусть F — C^1-гладкое поле в $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\int\limits_\Omega \operatorname{div} F\, \mathrm{d}\lambda_m = \int\limits_S (F \cdot \vec{n})\, \mathrm{d}S_k, \tag{19.57}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S.

Замечание. Поле нормалей $\{n(x)\}_{x \in S}$, ориентирующих S, называется *внешним*, если $n_1(a) > 0$ для нормали $n(a) = (n_1(a), \ldots, n_m(a))$ в точке $a = (a_1, \ldots, a_m) : a_1 = \max\{b_1 : (b_1, \ldots, b_m) \in \overline{\Omega}\}$.

Доказательство. Упражнение: проверить, что $M = \Omega \cup S$ — гладкое ориентируемое многообразие с краем $\partial M = S$ размерности m в $\mathbb{R}^m$.[36] Пусть

$$\omega = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} F_j\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m.$$

Тогда:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} (\mathrm{d}F_j) \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m \tag{19.58}$$

[36] Надо использовать, что локально S является графиком отображения из $T_p(M) = \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{k+1}$.

$$= F'_{x_1}\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge \mathrm{d}x_m + F'_{x_2}\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge \mathrm{d}x_m + \ldots + F'_{x_m}\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge \mathrm{d}x_m \tag{19.59}$$
$$= (\operatorname{div} F)\,\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge \mathrm{d}x_m. \tag{19.60}$$

По формуле Стокса:

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} F = \int\limits_{M} \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{S} \omega = \pm \int\limits_{S} (F\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S_k. \tag{19.61}$$

Остается проверить знак. Можно считать, что окрестность в Ω крайней правой точки области строго выпукла. Рассмотрим поле $F = (F_1, 0, \ldots, 0)$, где $F_1 : F_1 \geqslant 0$, F_1 возрастает по x_1 при остальных фиксированных координатах, и F_1 локализовано в окрестности точки a (аппроксимирует характеристическую функцию луча $(a_1, +\infty)$). В силу возрастания $\operatorname{div} F = F'_{x_1} > 0$, следовательно,

$$0 < \pm \int\limits_{S} (F\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S_k \approx \pm S_k(\operatorname{supp} F) F_1 n_1(a).$$

Так как $n_1(a) > 0$, в формуле действительно надо выбирать знак +. ■

Упражнение (формула Грина). Если D — это область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная гладкой кривой γ, ориентированной против часовой стрелки ($\gamma_2'(t_0) > 0$ для $t_0 : \gamma(t_0) = a$, где a — правая крайняя точка), то

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{D} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Индекс