Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и компьютерных наук

Комплексный анализ

Конспект основан на лекциях
Романа Викторовича Бессонова

3 сентября 2020 г.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Факультет
математики
и компьютерных
наук СПбГУ

Конспект основан на лекциях по комплексному анализу, прочитанных Романом Викторовичем Бессоновым студентам Факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета в весеннем семестре 2019–2020 учебного года.

В конспекте содержится материал 4ого семестра курса математического анализа.

Авторы:

Михаил Опанасенко
Роман Бессонов

Помощник:

Станислав Крымский

Авторы рисунков:

Михаил Опанасенко
Вячеслав Тамарин

Последняя версия конспекта и исходный код:

https://www.overleaf.com/read/ftfgybcrthgs

Сайт СПБГУ: https://spbu.ru.
Сайт факультета МКН: https://math-cs.spbu.ru.

Оглавление

Комплексный анализ **1**

1 Точные и замкнутые дифференциальные формы 1
2 Аналитические функции 11
3 Гармонические функции 21
4 Интегральная теорема Коши 33
5 Ряды Лорана 41
6 Принцип аргумента и теорема Руше 54
7 Аналитическое продолжение 62
8 Римановы поверхности аналитических функций 69
9 Преобразования Мёбиуса и их произведения 79
10 Теорема Римана 87
11 Теорема Каратеодори 91
12 Модулярная функция и её применения 98
13 Принцип Фрагмена–Линделёфа 102
14 Теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера 105
15 Рост и коэффициенты ряда Тейлора целых функций 108
16 Формула Йенсена 111
17 Теорема Адамара о факторизации целых функций 115
18 Граничное поведение гармонических функций в единичном круге . . 122

A Графики комплексных функций **131**

Комплексный анализ

1 Точные и замкнутые дифференциальные формы

Определение. *Гладким путём* в $\mathbb{R}^2$ называется отображение $\gamma \in C^1([0,1],\mathbb{R}^2)$, для которого выполнено условие $\gamma'(t) \neq 0$ для всех $t \in (0,1)$. Если $\gamma([0,1]) \subset \Omega$, то γ называется путём *в области* Ω.

Определение. Пусть γ_1, γ_2 — пути, причём $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. *Суммой* γ_1 и γ_2 называется путь

$$\gamma_1 + \gamma_2 \colon t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1), & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Определение. *Кусочно-гладкий путь* — конечная сумма гладких путей.

Определение. Если γ — путь, то $(-\gamma)$ — путь, заданный следующим образом:

$$(-\gamma)(t) = \gamma(1-t).$$

Если $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ — некоторый путь, то его конец $\gamma(1)$ будем обозначать через $e(\gamma)$, а начало — через $b(\gamma) = \gamma(0)$. Путь γ называется *замкнутым*, если $b(\gamma) = e(\gamma)$.

Определение. Если Ω — область в $\mathbb{C}$, то отображение $H \in C([0,1]\times[0,1],\Omega)$ называется *гомотопией* в Ω.

Определение. Будем говорить, что кусочно-гладкие пути γ_0, γ_1 *гомотопны* в Ω, если между ними существует гомотопия H в Ω, такая, что

$$\begin{aligned} &H(0,t) = \gamma_0(t), && H(1,t) = \gamma_1(t), \\ &H(\,\cdot\,,0) \equiv \text{const}, && H(\,\cdot\,,1) \equiv \text{const}. \end{aligned}$$

Будем также считать, что $H(s,t)$ — кусочно-гладкий путь для любого $s \in [0,1]$.[1]

Упражнение. В $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ верхняя и нижняя полуокружности не гомотопны.

Определение. *Дифференциальной 1-формой* ω в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется отображение из Ω в пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}$.

[1] Можно доказать, что все результаты из топологии, которые мы будем использовать, верны при этом условии. (ОМ)

Пример 1.1. $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$ — дифференциальные 1-формы, где

$$(\mathrm{d}x)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a, \qquad (\mathrm{d}y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b.$$

Ясно, что $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\overline{z}$ — постоянные формы на $\mathbb{C}$. Примеры непостоянных форм: $z\,\mathrm{d}z$, $y\,\mathrm{d}x$.

В этом курсе мы будем рассматривать только формы с непрерывными коэффициентами.

Определение. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ — гладкий путь в Ω,

$$\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

— непрерывная дифференциальная форма в Ω. Определим *интеграл ω по пути γ* следующим образом:

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_0^1 P(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t.$$ [2]

Если же $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ — кусочно-гладкий путь, то интеграл определяется по формуле

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \dots + \int\limits_{\gamma_n} \omega.$$

Утверждение 1.1 (основная оценка интеграла). Пусть γ — кусочно-гладкий путь, ω — дифференциальная 1-форма. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\left| \int\limits_\gamma \omega \right| \leqslant \ell(\gamma) \cdot \max_{t \in [0,1]} \sqrt{|P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))|^2 + |Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t))|^2},$$

где $\ell(\gamma)$ — длина пути γ.

Доказательство. Ясно, что можно считать, что γ — гладкий путь. В этом случае

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_\gamma \omega \right| &\leqslant \int\limits_0^1 (|P(\gamma) \cdot \gamma_1'| + |Q(\gamma) \cdot \gamma_2'|)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int\limits_0^1 \sqrt{|P(\gamma)|^2 + |Q(\gamma)|^2} \cdot \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

[2] Если γ — простой путь, то γ — гладко параметризованное многообразие в $\mathbb{R}^2$, и интеграл $\int_\gamma \omega$ совпадает с интегралом ω по многообразию $\gamma([0,1])$. Тем не менее, нам гораздо проще работать с определением выше, чем думать о многообразиях.

Значит,

$$\left|\int\limits_{\gamma}\omega\right| \leqslant \int\limits_0^1 \max_{t\in[0,1]}\sqrt{|P(\gamma)|^2+|Q(\gamma)|^2}\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}\;\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[0,1]}\sqrt{|P(\gamma)|^2+|Q(\gamma)|^2}\cdot\int\limits_0^1\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}\;\mathrm{d}t$$

$$= \max_{t\in[0,1]}\sqrt{|P(\gamma)|^2+|Q(\gamma)|^2}\cdot\ell(\gamma),$$

что и требовалось. $\not<$

Определение. 1-форма ω называется *точной* в области Ω, если существует функция $F\colon\Omega\to\mathbb{C}$, где $F\in C^1(\Omega)$, такая, что $\mathrm{d}F=\omega$.

Определение. 1-форма ω называется *замкнутой* в области Ω, если для любой точки $p\in\Omega$ существует такая окрестность $U(p)\subset\Omega$, что форма ω точна в $U(p)$.

Теорема 1.2. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, ω — непрерывная дифференциальная 1-форма в Ω. Следующие условия эквивалентны:

(1) форма ω точна в Ω;

(2) для любых кусочно-гладких путей γ_1,γ_2 с совпадающими концами выполнено равенство

$$\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_2}\omega.$$

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $\omega=\mathrm{d}F$ для некоторого отображения $F\in C^1(\Omega,\mathbb{C})$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_0^1 F_x'(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t+F_y'(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int\limits_0^1\big(F(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\big)_t'\,\mathrm{d}t=F(e(\gamma))-F(b(\gamma)),$$

для любого гладкого пути γ в Ω. Значит, то же самое верно для кусочно-гладких путей (телескопическая сумма), и выполнено свойство (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Зафиксируем точку $a\in\Omega$. Для любого $p\in\Omega$ обозначим через γ_p произвольный путь, соединяющий a и p; и определим $F(p)=\int_{\gamma_p}\omega$. Это определение корректно по условию (2). Ясно, что

$$\frac{F(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th},y_0+\delta\,\mathrm{th})-F(x_0,y_0)}{\mathrm{th}}=\frac{1}{\mathrm{th}}\int\limits_{\gamma_{(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th},y_0+\delta\,\mathrm{th})}}\omega-\frac{1}{\mathrm{th}}\int\limits_{\gamma_{(x_0,y_0)}}\omega.$$

Представим путь $\gamma_{(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th}, y_0+\delta\,\mathrm{th})}$ следующим образом:

$$\gamma_{(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th}, y_0+\delta\,\mathrm{th})} = \gamma_{(x_0,y_0)} + [(x_0,y_0),(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th}, y_0+\delta\,\mathrm{th})] = \gamma_{(x_0,y_0)} + I(\mathrm{th}).$$

Тогда

$$\int\limits_{I(\mathrm{th})} \omega = \int\limits_{\gamma_{(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th}, y_0+\delta\,\mathrm{th})}} \omega - \int\limits_{\gamma_{(x_0,y_0)}} \omega = F(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th}, y_0+\delta\,\mathrm{th}) - F(x_0,y_0).$$

Пусть $\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{I(\mathrm{th})} \omega &= \int\limits_0^1 P(x_0+\varepsilon t\,\mathrm{th}, y_0+\delta t\,\mathrm{th})\varepsilon\,\mathrm{th}\ \mathrm{d}t + Q(x_0+\varepsilon t\,\mathrm{th}, y_0+\delta t\,\mathrm{th})\delta\,\mathrm{th}\ \mathrm{d}t\\ &= \mathrm{th}\int\limits_0^1 P(x_0+\varepsilon t\,\mathrm{th}, y_0+\delta t\,\mathrm{th})\varepsilon\,\mathrm{d}t + Q(x_0+\varepsilon t\,\mathrm{th}, y_0+\delta t\,\mathrm{th})\delta\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

то есть

$$\lim_{\mathrm{th}\to 0} \frac{\int_{I(\mathrm{th})}\omega}{\mathrm{th}} = P(x_0,y_0)\varepsilon + Q(x_0,y_0)\delta,$$

так как P и Q непрерывны в точке (x_0,y_0). Таким образом, для любых ε и δ

$$\mathrm{d}F(\varepsilon,\delta) = \lim_{\mathrm{th}\to 0} \frac{F(x_0+\varepsilon\,\mathrm{th}, y_0+\delta\,\mathrm{th}) - F(x_0,y_0)}{\mathrm{th}} = P(x_0,y_0)\varepsilon + Q(x_0,y_0)\delta.$$

Значит, $\mathrm{d}F = \omega$. $\not<$

Теорема 1.3. Пусть Ω — область, ω — непрерывная дифференциальная 1-форма в Ω. Следующие условия эквивалентны:

(1) ω — замкнутая форма;

(2) для любых гомотопных в Ω путей γ_1 и γ_2 выполнено равенство $\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$.

(3) для любого прямоугольника $\Pi \subset \Omega$ выполнено равенство $\int_{\partial\Pi}\omega = 0$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2). Пусть H — гомотопия между γ_1 и γ_2. Покажем, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $p \in H([0,1]\times[0,1]) = K$ форма ω точна в круге $B(p,\varepsilon)$. По определению замкнутости для любого $p \in K$ существует такое $\varepsilon(p)$, что форма ω точна в $B(p, 2\varepsilon(p))$. Заметим, что K компактно как непрерывный образ компакта. Значит, существует набор $p_1,\ldots,p_N \in K$, такой, что $\{B(p_k,\varepsilon(p_k))\}$ — покрытие K. Тогда нетрудно убедиться, что подходит $\varepsilon = \min(\varepsilon(p_1),\ldots,\varepsilon(p_k))$.

По равномерной непрерывности H можно выбрать такое $\delta \in (0,\varepsilon/4)$, что для всех (s_1,t_1), $(s_2,t_2) \in [0,1]\times[0,1]$, удовлетворяющих условию $\|(s_1,t_1)-(s_2,t_2)\| < \delta$, имеет место неравенство $|H(s_1,t_1) - H(s_2,t_2)| < \varepsilon/4$.

Для произвольного $s \in [0,1]$ через γ_s будем обозначать путь

$$\gamma_s\colon t \mapsto H(s,t), \qquad t \in [0,1].$$

Зафиксируем $s_1 \in [0,1]$. Возьмём $N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \delta$; покажем, что для любого $s_2 \in [0,1]$ такого, что $|s_1 - s_2| < \frac{1}{N}$, верно равенство $\int_{\gamma_{s_1}} \omega = \int_{\gamma_{s_2}} \omega$. Рассмотрим сужения

$$\gamma_{1k} = \gamma_{s_1}\big|\left[\tfrac{k}{N}, \tfrac{k+1}{N}\right], \qquad \gamma_{2k} = \gamma_{s_2}\big|\left[\tfrac{k}{N}, \tfrac{k+1}{N}\right].$$

Ясно, что

$$\gamma_{s_1} = \gamma_{1,0} + \cdots + \gamma_{1,N-1}, \qquad \gamma_{s_2} = \gamma_{2,0} + \cdots + \gamma_{2,N-1}.$$

Для каждого k рассмотрим путь

$$\Gamma_k = \gamma_{1k} + [e(\gamma_{1k}), e(\gamma_{2k})] - \gamma_{2k} - [b(\gamma_{1k}), b(\gamma_{2k})].$$

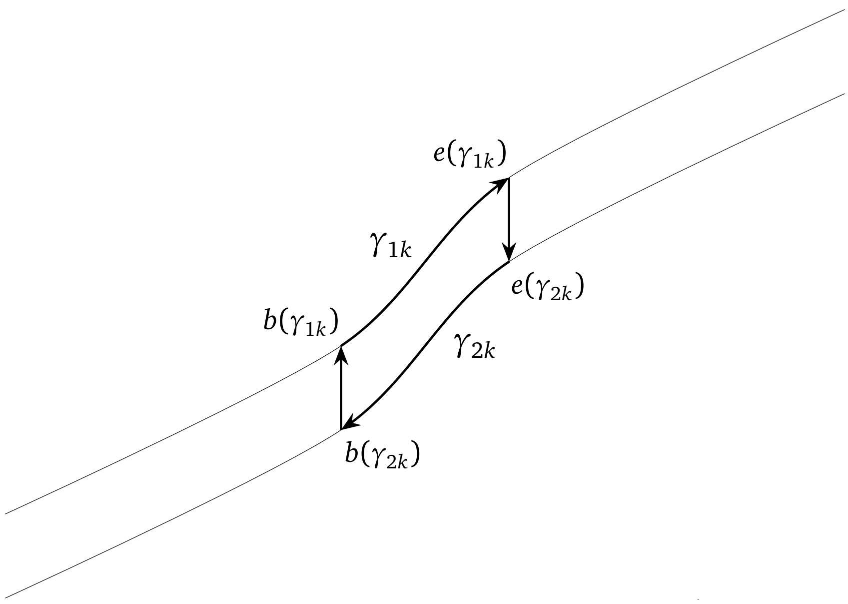


Рис. 1: Контур Γ_k

По построению, Γ_k — кусочно-гладкий замкнутый контур. Нетрудно проверить, что

$$\Gamma_k \subset B\big(b(\gamma_{1k}), 2(\varepsilon/4) + 2\delta\big) \subset B(b(\gamma_{1k}), \varepsilon) = B,$$

а форма ω точна в B. По теореме 1.2 получаем $\int_{\Gamma_k} \omega = 0$ и

$$\int\limits_{\gamma_{s_1} - \gamma_{s_2}} \omega = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\Gamma_k} \omega = 0.$$

Таким образом, $\int_{\gamma_{s_1}} \omega = \int_{\gamma_{s_2}} \omega$, когда $|s_1 - s_2| < \frac{1}{N}$. Отсюда следует, что это равенство выполнено и для $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, так как отображение $s \mapsto \int_{\gamma_s} \omega$ локально постоянно на связном топологическом пространстве, то есть постоянно.

(2) $\implies$ (3). Граница любого прямоугольника в Ω стягиваема в точку, а интеграл формы по постоянному пути равен нулю, поскольку производная по обеим коорди-

натам равна нулю.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Зафиксируем $(x_0, y_0) \in \Omega$. Рассмотрим функцию $F(x, y) = \int_{\gamma(x,y)} \omega$, где $\gamma(x, y)$ — путь из двух отрезков, соединяющих (x_0, y_0) и (x, y). Если (x, y) близко к (x_0, y_0), то такой путь всегда существует и соответствующий прямоугольник П лежит в Ω. Можно проверить, что $\mathrm{d}F = \omega$ в некоторой окрестности П.[3] $\nprec$

Следствие 1.4. В односвязной области любая замкнутая форма точна.

Доказательство. В односвязной области любые два пути с совпадающими концами гомотопны, а потому по теореме 1.2 форма ω точна. $\nprec$

Теорема 1.5. Пусть ω — C^1-гладкая дифференциальная форма в Ω. Тогда ω замкнута в Ω в том и только том случае, когда $\mathrm{d}\omega = 0$.

Доказательство. Пусть $p \in \Omega$ и $\omega = \mathrm{d}F$ в $U(p)$, где $U(p)$ — окрестность p. Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(F'_x \,\mathrm{d}x + F'_y \,\mathrm{d}y) \\ &= (F''_{xx} \,\mathrm{d}x + F''_{xy} \,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (F''_{yx} \,\mathrm{d}x + F''_{yy} \,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y \\ &= (-F''_{xy} + F''_{yx}) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

Наоборот, пусть форма $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ такова, что $\mathrm{d}\omega = 0$. Проверим, что интеграл по любому прямоугольнику $\Pi \subset \Omega$ равен нулю. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega = 0 &\iff (P'_x \,\mathrm{d}x + P'_y \,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (Q'_x \,\mathrm{d}x + Q'_y \,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y = 0 \\ &\iff P'_y \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + Q'_x \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0 \\ &\iff Q'_x = P'_y. \end{aligned}$$

Пусть $\Pi = [a, b] \times [c, d]$. Рассмотрим контур $\Gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, показанный на рисунке 2.

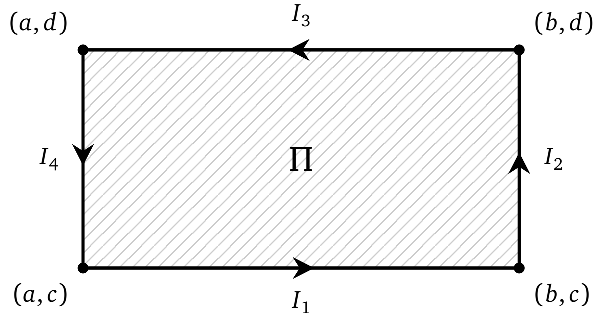


Рис. 2: Обход $\partial\Pi$

Имеем:

$$\int\limits_{\partial\Pi} \omega = \int\limits_{I_1} \omega + \int\limits_{I_2} \omega + \int\limits_{I_3} \omega + \int\limits_{I_4} \omega$$

[3]Доказательство аналогично предыдущей теореме.

$$= \int\limits_a^b \underbrace{P(x,c)\cdot(x')}_{=P(x,c)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{Q(x,c)\cdot(c')}_{=0}\,\mathrm{d}y + \int\limits_{I_2}\omega + \int\limits_{I_3}\omega + \int\limits_{I_4}\omega$$

$$= \int\limits_a^b P(x,c)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^d Q(b,y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_a^b P(x,d)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^d Q(a,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_a^b (P(x,c)-P(x,d))\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^d (Q(b,y)-Q(a,y))\,\mathrm{d}y$$

$$= -\int\limits_a^b\int\limits_c^d P'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_c^d\int\limits_a^b Q'_x(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

и последнее выражение равно нулю, так как можно переставить интегралы по теореме Фубини и $Q'_x = P'_y$. $\not<$

Примеры.

1. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$. Покажем, что форма $(a+bz)\,\mathrm{d}z$ точна в $\mathbb{C}$. Это следует из замкнутости $(a+bz)\,\mathrm{d}z$, так как $\mathbb{C}$ односвязно; а замкнутость следует из того, что $\mathrm{d}\omega = 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}((a+bz)\,\mathrm{d}z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(a+b(x+iy))\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(a+b(x+iy))\,\mathrm{d}y\right)\wedge(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)\\ &= b(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y) = b(i\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y + i\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x) = 0.\end{aligned}$$

2. Для любого $a \in \mathbb{C}$ форма $\omega = \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z$ замкнута, но не точна в $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Замкнутость следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\frac{1}{(x+iy)-a}\right)\wedge\,\mathrm{d}z &= \left(-\frac{1}{((x+iy)-a)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{i}{((x+iy)-a)^2}\,\mathrm{d}y\right)\wedge(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)\\ &= -\frac{1}{((x+iy)-a)^2}\,(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)\wedge(\,\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y) = 0.\end{aligned}$$

Для того, чтобы понять, что ω не точна, покажем, что

$$\int\limits_{C(a,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i,$$

где $C(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$ — окружность с центром в a, ориентированная против часовой стрелки[4]. Рассмотрим параметризацию $\gamma : t \mapsto a + re^{it}$. В этой

[4]Напомним, что интеграл точной формы по замкнутому пути должен быть равен нулю.

параметризации $C(a,r) = \gamma([0,2\pi])$, то есть

$$\int\limits_{C(a,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}(re^{it}+a)}{(re^{it}+a)-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r\cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t}{r\cdot e^{it}} = \int\limits_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$$

3. Пусть $w \in B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$. Тогда

$$\int\limits_{C(a,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = 2\pi i.$$

Рассмотрим форму $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z-w}$. Мы уже доказывали, что ω замкнута в $\mathbb{C} \setminus \{w\}$. Рассмотрим замкнутый кусочно-гладкий контур $\Gamma = C(a,r) + \gamma - C(w,\varepsilon) - \gamma$, где ε выбрано таким образом, чтобы a лежало за пределами $C(w,\varepsilon)$ — см. рисунок 3.[5]

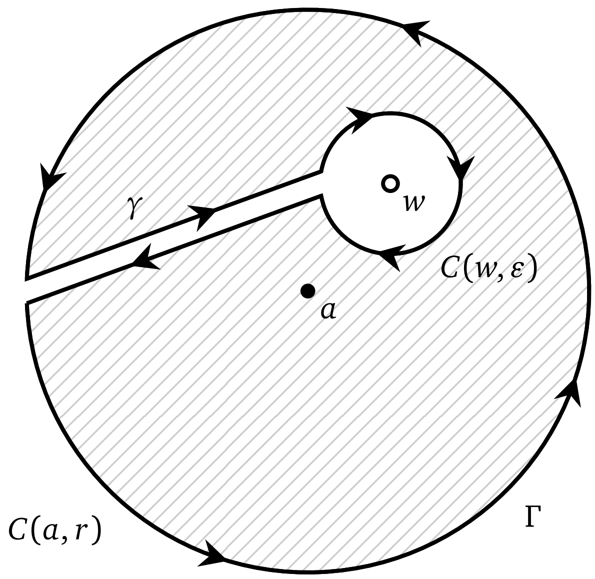


Рис. 3: Контур Γ

Видно, что Γ стягиваем в точку в $\mathbb{C} \setminus \{w\}$, а потому $\int_\Gamma \omega = 0$. Значит,

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_{C(a,r)} \omega + \int\limits_\gamma \omega - \int\limits_{C(w,\varepsilon)} \omega - \int\limits_\gamma \omega = 0,$$

то есть

$$\int\limits_{C(a,r)} \omega = \int\limits_{C(w,\varepsilon)} \omega = 2\pi i.$$

[5]На картинке путь γ расщеплён на две части для того, чтобы было видно, как он устроен; хотя на самом путь один. Далее будет использоваться это соглашение.

Лемма 1.6 (об устранении особенности). Пусть $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ — непрерывная дифференциальная форма в области Ω; пусть ω замкнута в $\Omega \setminus \{z_0\}$ для некоторого $z_0 \in \Omega$. Предположим, что

$$A = \sup_{x,y \in U(z_0)} (|P(x,y)| + |Q(x,y)|) < \infty,$$

где $U(z_0)$ — некоторая окрестность точки z_0. Тогда форма ω замкнута в Ω.

Доказательство. Надо проверить, что $\int_{\partial\Pi} \omega = 0$ для любого прямоугольника Π в Ω. Если $z_0 \notin \Pi$, то $\int_{\partial\Pi} \omega = 0$, так как ω замкнута в $\Omega \setminus \{z_0\}$. Если $z_0 \in \Pi$, то рассмотрим контур $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon^+ + \Gamma_\varepsilon^-$, как показано на рисунке 4. Поскольку контуры Γ_ε^+ и Γ_ε^- стягивае-

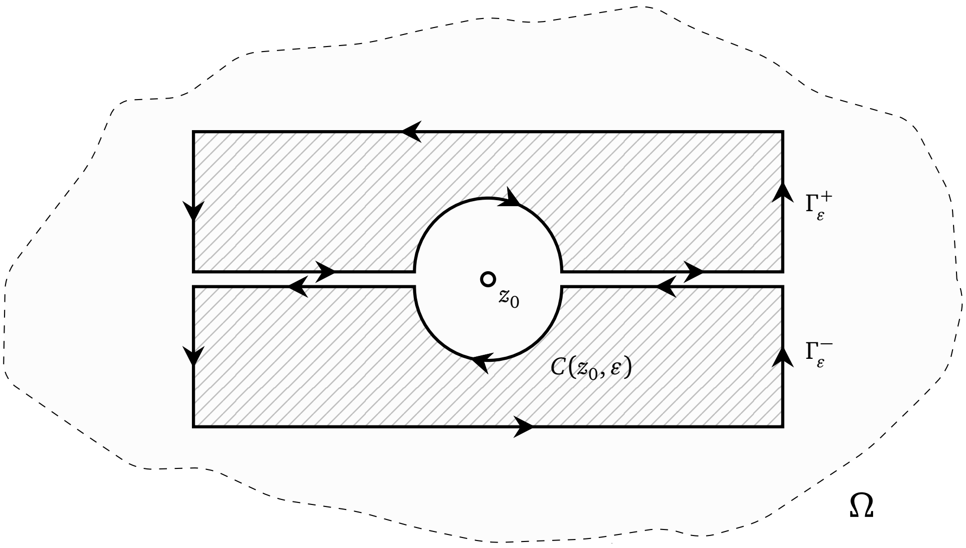


Рис. 4: Контур Γ_ε

мы,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \omega = \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \omega + \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \omega = 0.$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\int_{\partial\Pi} \omega - \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega = -\int_{C(z_0,\varepsilon)} \omega.$$

Осталось показать, что

$$\left| \int_{C(z_0,\varepsilon)} \omega \right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Действительно, из основной оценки интеграла дифференциальной формы (утверждение 1.1) получаем, что

$$\left| \int\limits_{C(z_0,\varepsilon)} \omega \right| \leqslant cA \cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

где $2\pi\varepsilon = \ell(C(z_0,\varepsilon))$, а c — некоторая константа. $\nless$

2 Аналитические функции

Теорема 2.1 (Коши, Гурса, Морера). Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Следующие утверждения равносильны:

(1) для любой точки $z_0 \in \Omega$ существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};$$

(2) $f \in C(\Omega)$ и форма $f\,\mathrm{d}z$ замкнута в Ω;

(3) для любой точки $z_0 \in \Omega$ существует такое число $r(z_0) > 0$, что

$$f(w) = \sum_{n \geqslant 0} c_n (w - z_0)^n,$$

для любого $w \in B(z_0, r(z_0)) \subset \Omega$.

Более того, если условия (1) — (3) выполнены, то в качестве $r(z_0)$ в пункте (3) можно брать любое $r \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega))$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2). Очевидно, что $f \in C(\Omega)$, так как f — дифференцируема. Проверим, что для любого прямоугольника $\Pi \subset \Omega$ интеграл $\omega = f\,\mathrm{d}z$ по границе Π равен нулю. Пусть это не так. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и такой прямоугольник Π_0, что

$$\left| \int\limits_{\partial\Pi_0} \omega \right| \geqslant \varepsilon^2 (\operatorname{diam} \Pi_0)^2.$$

Далее будем строить последовательность прямоугольников Π_n, чьи диаметры стремятся к нулю, а каждый из них лежит внутри предыдущего. Очевидно, каждый такой прямоугольник Π_n можно разбить на 4 равных прямоугольника $Q_{n1}, \ldots, Q_{n4}$ вдвое меньшего диаметра. Заметим, что один из прямоугольников Q_{ni} должен удовлетворять условию

$$\left| \int\limits_{\partial Q_{ni}} \omega \right| \geqslant \frac{\varepsilon^2 (\operatorname{diam} \Pi_n)^2}{4} = \varepsilon^2 (\operatorname{diam} Q_{ni})^2. \tag{2.1}$$

Действительно, рассмотрим контур, изображённый на рисунке 5.
Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\partial\Pi_0} \omega = \int\limits_{\Gamma_{1n}} \omega + \int\limits_{\Gamma_{2n}} \omega + \int\limits_{\Gamma_{3n}} \omega + \int\limits_{\Gamma_{4n}} \omega = \int\limits_{\partial Q_{n1}} \omega + \int\limits_{\partial Q_{n2}} \omega + \int\limits_{\partial Q_{n3}} \omega + \int\limits_{\partial Q_{n4}} \omega,$$

откуда требуемое неравенство следует очевидным образом. Именно прямоугольник Q_{ni} со свойством (2.1) мы и возьмём в качестве Π_{n+1}.

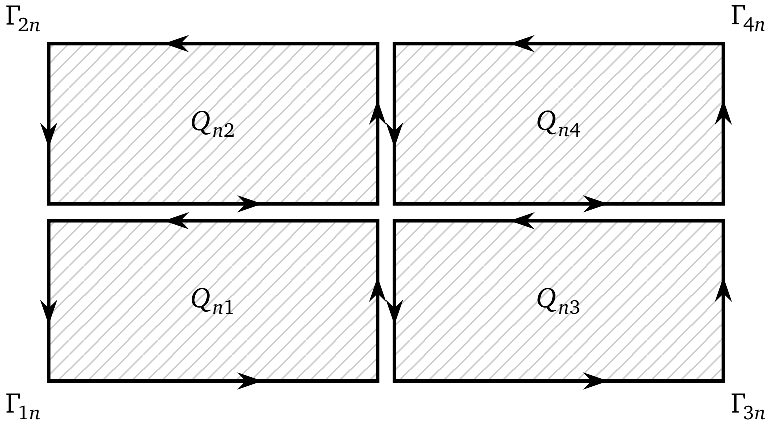


Рис. 5: Контур $\Gamma_{1n} + \Gamma_{2n} + \Gamma_{3n} + \Gamma_{4n}$

Таким образом, получаем последовательность вложенных прямоугольников $\Pi_0 \supset \Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \ldots$, причём для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$\left| \int\limits_{\partial \Pi_k} \omega \right| \geqslant \varepsilon^2 (\operatorname{diam} \Pi_k)^2.$$

Найдём $z_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ и воспользуемся условием (1):

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial \Pi_k} \omega &= \int\limits_{\partial \Pi_k} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z - z_0)\big)\, \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{\partial \Pi_k} (a + bz)\, \mathrm{d}z + \int\limits_{\partial \Pi_k} \alpha(z - z_0)\, \mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $a = f(z_0) - z_0 f'(z_0)$, $b = f'(z_0)$, и $|\alpha(z - z_0)| = o(|z - z_0|)$ при $k \to \infty$. В предыдущем параграфе мы показали, что форма $(a + bz)\, \mathrm{d}z$ точна, то есть левый интеграл в (2.2) равен нулю. По основной оценке интеграла,

$$\varepsilon^2 (\operatorname{diam} \Pi_k)^2 \leqslant \left| \int\limits_{\partial \Pi_k} f\, \mathrm{d}z \right| \leqslant 4 \operatorname{diam} \Pi_k \cdot o(\operatorname{diam} \Pi_k) = o((\operatorname{diam} \Pi_k)^2),$$

что невозможно. Таким образом, мы доказали замкнутость формы $f\, \mathrm{d}z$.

(1) $\implies$ (3). Пусть $z_0 \in \Omega$, $r = r(z_0) < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Тогда $B(z_0, r) \subset \Omega$. Рассмотрим форму

$$\widetilde{\omega} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

$\widetilde{\omega}$ — форма, замкнутая в $\Omega \setminus \{z_0\}$, так как можно применить импликацию (1) $\implies$ (2) для функции

$$g \colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}, \qquad g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

— в любой точке $z \neq z_0$ по правилу дифференцирования сложной функции существует $g'(z)$. Кроме того,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leqslant C$$

в некоторой окрестности $U(z_0)$, так как существует $f'(z_0)$. Значит, форма $\widetilde{\omega}$ замкнута в Ω по лемме об устранении особенности (1.6). Возьмём $w \in B(z_0, r)$; пусть окружность $C(z_0, r)$ ориентирована против часовой стрелки. Тогда

$$\int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0 + 2\pi i f(w),$$

так как форма $\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z$ замкнута в Ω. Значит,

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)+(z_0-w)}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)\left(1 - \dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}z \\ &= \sum_{n \geqslant 0} c_n (w-z_0)^n, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n (w-z_0)^n$, сходится, поскольку

$$|c_n(w-z_0)^n| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \right| \leqslant C \sup_{z\in\Delta} \left(|f(z)| \cdot \left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right|^n \right),$$

где $\Delta = C(z_0, r)$ — компакт; при $z \in C(z_0, r)$ выполнено неравенство $|w - z_0| < |z - z_0|$, то есть последний ряд (сумма геометрической прогрессии) сходится. Значит, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n (w - z_0)^n$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Очевидно, так как степенной ряд можно дифференцировать в круге сходимости: $f'(z_0) = c_1$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Раз $f\,\mathrm{d}z$ замкнута в Ω, в любой точке $z_0 \in \Omega$ существует окрестность $U(z_0)$, в которой форма $f\,\mathrm{d}z$ точна. Значит, по лемме 2.2 (см. ниже) существует такая F, что $F'(w) = f(w)$ для всех $w \in U(z_0)$. Применив к F импликацию (1) $\Longrightarrow$ (3), получим разложение

$$F(w) = \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{c}_n (w-z_0)^n,$$

для некоторых $\widetilde{c}_n \in \mathbb{C}$, $w \in B(z_0, \varepsilon)$. Значит,

$$f(w) = F'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n\widetilde{c}_n (w - z_0)^{n-1}$$

для всех $w \in B(z_0, \varepsilon)$. Последний степенной ряд можно продифференцировать в круге сходимости, а потому существует $f'(z_0)$. $\not<$

Лемма 2.2. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, отображение $g\colon G \to \mathbb{C}$ таково, что дифференциальная форма $\omega = g\,\mathrm{d}z$ точна в G. Тогда существует такое $h\colon G \to \mathbb{C}$, что для любого $z_0 \in G$ существует предел

$$\lim_{z\to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = g(z_0).$$

Доказательство. Раз $g\,\mathrm{d}z$ — точная форма в G, существует функция $F\colon G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $\mathrm{d}F = g\,\mathrm{d}z$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= F'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + F'_y(x,y)\,\mathrm{d}y, \\ g\,\mathrm{d}z &= g(z)\,\mathrm{d}x + ig(z)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) &= g(x+iy), \\ F'_y(x,y) &= ig(x+iy). \end{aligned}$$

Определим h по формуле

$$h(x+iy) = F(x,y).$$

По формуле Тейлора для $F \in C^1(G)$ в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ имеем

$$\begin{aligned} h(z) &= h(x+iy) = F(x,y) \\ &= F(x_0,y_0) + F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o(|x-x_0| + |y-y_0|) \\ &= h(z_0) + g(z_0)(x-x_0) + ig(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|) \\ &= h(z_0) + g(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|). \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = g(z_0) + o(1).$$

Таким образом, существует производная $h'(z_0) = g(z_0)$. $\not<$

Определение. Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется *аналитической* или *голоморфной*, если для f выполнено одно из условий (1) — (3) теоремы Коши – Гурса – Морера.

Определение. *Целой* функцией называется функция, аналитическая во всем $\mathbb{C}$.

Теорема 2.3 (Лиувилль). Если целая функция ограничена, то она постоянна.

Доказательство. По теореме Коши – Гурса – Морера,

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n,$$

причём последний ряд сходится во всей комплексной плоскости. Зафиксируем центр $z_0 = 0$. Коэффициенты

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

зависят лишь от значений f в окрестности нуля, и поэтому одинаковы для разложения f в любом круге с центром в нуле. Кроме того, из доказательства той же теоремы мы знаем, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z$$

для всех $r > 0$, где окружность ориентирована против часовой стрелки. Если существует такое M, что $|f(z)| \leqslant M$ на всем $\mathbb{C}$, то

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi r \cdot M \cdot \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{M}{ir^n}.$$

Для $n \geqslant 1$ отсюда следует, что $c_n = 0$, так как можно перейти к пределу по $r \to \infty$. Значит, $f(z) = c_0$ для всех $z \in \mathbb{C}$. $\nless$

Теорема 2.4 (основная теорема алгебры). Если p — многочлен в $\mathbb{C}$ степени $\geqslant 1$, то у него есть корень.

Доказательство. Пусть $p(z_0) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда во всех $z_0 \in \mathbb{C}$ существует производная

$$\left(\frac{1}{p}\right)'(z_0) = \frac{-p'(z_0)}{p^2(z_0)},$$

то есть $1/p$ — аналитическая функция в $\mathbb{C}$. Поскольку $\deg p \geqslant 1$, $1/p(z) \leqslant 1$ при больших z. Значит, функция $|1/p|$ ограничена некоторой константой в $\mathbb{C}$.[6] Таким образом, $1/p$ — целая ограниченная функция, и по теореме Лиувилля $1/p(z) \equiv c$. Но тогда $p(z) \equiv 1/c$, что противоречит условию на степень p. $\nless$

Теорема 2.5 (теорема единственности для аналитических функций). Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитические функции. Пусть E — множество таких точек $z \in \Omega$, что $f(z) = g(z)$. Если E имеет предельную точку в Ω, то $f \equiv g$ в Ω.

Замечание. Точка $z_0 \in \Omega$ называется *предельной точкой*[7] E, если для всех $\varepsilon > 0$ пересечение $B(z_0, \varepsilon) \cap E$ содержит бесконечно много точек. Например, множество $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не имеет предельных точек в $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

[6] Так как она ограничена в любом круге, а за пределами достаточно большого круга не превосходит единицы

[7] Или “точкой сгущения”. В нашем случае это определение эквивалентно обычному топологическому определению предельной точки.

Доказательство. Будем считать, что $g \equiv 0$ (иначе рассмотрим функцию $f - g$). Тогда E — множество нулей f. Обозначим через $G \subset \Omega$ множество точек, в окрестностях которых f равна нулю. Ясно, что G открыто, а E замкнуто и содержит G.

Пусть $z_0 \in \Omega$ — предельная точка для E. Найдём такое $\varepsilon > 0$, что

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{для всех} \quad z \in B(z_0, \varepsilon).$$

Значит,

$$c_0 = f(z_0) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = 0,$$

где $z_n \in E$, $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$. Тогда либо $f \equiv 0$ в $B(z_0, \varepsilon)$, либо для некоторого $m \in \mathbb{N}$

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad z \to z_0,\ z \in B(z_0, \varepsilon),\ c_m \neq 0.$$

Однако во втором случае

$$0 = |f(z_n)| = |c_m||z_n - z_0|^m (1 + \alpha(z_n)),$$

где $|\alpha(z_n)| < \frac{1}{2}$ при больших n, что невозможно, так как $c_m \neq 0$ и $z_n \neq z_0$. Значит, $f \equiv 0$ в $B(z_0, \varepsilon)$.

Таким образом, $z_0 \in G$, то есть G содержит множество предельных точек E. Значит, G совпадает с множеством предельных точек E (в частности, оно непусто), и потому G замкнуто в Ω. Итого, G — открыто-замкнутое непустое множество. В силу связности Ω, $G = \Omega$, и $f \equiv 0$ в Ω. $\not<$

Теорема 2.6 (о замкнутости алгебры аналитических функций относительно равномерной сходимости на компактах). Пусть Ω — область; $f, \{f_n\}_{n \geqslant 1}$ — функции из Ω в $\mathbb{C}$, причём $f_n \rightrightarrows f$ в любом компакте $K \subset \Omega$. Если функции f_n аналитичны, то и f аналитична.

Доказательство. Проверим условие (2) из теоремы Коши – Гурса – Морера, то есть докажем, что для всякого прямоугольника $\Pi \subset \Omega$ выполнено

$$\int_{\partial \Pi} f \, \mathrm{d}z = 0.$$

Поскольку Π — компакт, а f — равномерный предел непрерывных функций на Π, $f \in C(\Pi)$. Значит, интеграл $\int_{\partial \Pi} f \, \mathrm{d}z$ определён. Кроме того,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Pi} f \, \mathrm{d}z \right| &\leqslant \left| \int_{\partial \Pi} f_n \, \mathrm{d}z \right| + \left| \int_{\partial \Pi} (f - f_n) \, \mathrm{d}z \right| \\ &\leqslant 0 + \ell(\partial \Pi) \sup_{z \in \partial \Pi} |f(z) - f_n(z)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. $\not<$

Теорема 2.7. Аналитические функции в Ω дифференцируемы бесконечное число раз.

Доказательство. Очевидно в силу пункта (3) теоремы Коши – Гурса – Морера. $\not<$

Теорема 2.8. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, не равная нулю тождественно, $f(z_0) = 0$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z),$$

где g — аналитическая функция в Ω, и $g(z_0) \neq 0$.

Доказательство. В окрестности z_0 имеем:

$$f(z) = \sum_{m \geqslant 0} c_m (z - z_0)^m, \qquad c_0 = f(z_0) = 0.$$

Тогда для некоторого натурального числа n для всех $m < n$ выполнено $c_n \neq 0$, $c_m = 0$, и $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, где

$$g(z) = \sum_{m \geqslant 0} c_{m+n} (z - z_0)^m$$

в окрестности z_0. Если $z \neq z_0$, то

$$g = \frac{f}{(z - z_0)^n},$$

а последняя функция дифференцируема как производная частных. Таким образом, g дифференцируема во всех точках Ω, то есть аналитична в Ω. $\not<$

Утверждение 2.9 (неравенство Лагранжа для аналитических функций). Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, $[z_1, z_2] \subset \Omega$. Тогда

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \max_{z \in [z_1, z_2]} |f'(z)| \cdot |z_1 - z_2|.$$

Доказательство. Так как f аналитична, то функция $F(x, y) = f(x + iy)$ удовлетворяет условию $\mathrm{d}F = f'\,\mathrm{d}z$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F &= F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y \\
&= f'(x + iy) \cdot (x + iy)'_x\,\mathrm{d}x + f'(x + iy) \cdot (x + iy)'_y\,\mathrm{d}y \\
&= f'(z)\,\mathrm{d}x + i f'(z)\,\mathrm{d}y = f'(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$f(z_2) - f(z_1) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) = \int\limits_{[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]} \mathrm{d}F = \int\limits_{[z_1,z_2]} f'\,\mathrm{d}z.$$

Следовательно,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \max_{z \in [z_1, z_2]} |f'(z)| \cdot |z_1 - z_2|,$$

что и требовалось. $\not<$

Следствие 2.10. Если f аналитична в Ω и $f'(z) = 0$ на Ω, то $f \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \Omega$. В малой окрестности z_0 любой отрезок $[z_0, z_1]$ лежит в Ω; а потому $|f(z_0) - f(z_1)| = 0$ по теореме Лагранжа. Значит, в малой окрестности z_0 выполнено тождество $f \equiv f(z_0)$. Так как Ω связно, по теореме единственности для аналитических функций это значит, что $f \equiv \mathrm{const}$ всюду на Ω. $\not<$

Утверждение 2.11. Не существует аналитической функции g в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, такой, что $e^{g(z)} = z$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Предположим, что такая функция существует. Тогда имеет место равенство

$$1 = z' = (e^{g(z)})' = g'(z) \cdot e^{g(z)} = g'(z)z,$$

откуда следует, что

$$g'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\, \mathrm{d}z = 2\pi \neq 0,$$

хотя

$$\int\limits_{|z|=1} g'(z)\, \mathrm{d}z = g(1) - g(1) = 0,$$

так как $g'(z)\, \mathrm{d}z$ — точная форма. Противоречие. $\not<$

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — область. *Аналитической ветвью логарифма* будем называть любую аналитическую функцию $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, такую, что $e^{g(z)} = z$ на всем Ω.

Определение. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, где Ω — область в $\mathbb{C}$. *Аналитической ветвью* $\log f$ будем называть любую аналитическую функцию $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, удовлетворяющую условию $e^{g(z)} = f(z)$, где $z \in \Omega$.

Теорема 2.12. Пусть Ω — односвязная область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, не принимающая значение ноль на Ω. Тогда существует аналитическая ветвь $\log f$, и любые две ветви g_1, g_2 отличаются в Ω на константу $2\pi i k$, где $k \in \mathbb{Z}$. В частности, ветвь задаётся однозначно своим значением в любой точке.

Доказательство. Поскольку функция f'/f аналитична, по теореме Коши – Гурса – Морера форма $f'/f\, \mathrm{d}z$ замкнута. Но раз область Ω односвязна, эта форма точна, то есть существует такая аналитическая функция h, что $h' = f'/f$ в Ω. Проверим, что h — это аналитическая ветвь логарифма с точностью до константы, то есть, что $e^{h(z)+c} = f(z)$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$:

$$\left(\frac{e^{h(z)+c}}{f(z)}\right)' = e^c \left(\frac{e^h}{f}\right)' = e^c \frac{h'e^h f - e^h f'}{f^2} = e^c \frac{f'e^h - e^h f'}{f^2} \equiv 0.$$

Таким образом, $e^{h(z)+c} \equiv \mathrm{const} \cdot f(z)$. Осталось зафиксировать произвольное $z_0 \in \Omega$ и выбрать c таким образом, что бы значение $e^{h(z_0)+c}/f(z_0)$ равнялось единице.

Если g_1, g_2 таковы, что $e^{g_1} = e^{g_2} = f$ в Ω, то $e^{g_1-g_2} = 1$ в Ω, то есть для всех $z \in \Omega$ существует

$$k(z) \in \mathbb{Z} : g_1(z) - g_2(z) = 2\pi i k(z),$$

так как $e^w = 1$ тогда и только тогда, когда $w \in 2\pi i\mathbb{Z}$. $k(z)$ — целочисленная непрерывная функция на связном множестве, то есть константа. Если же $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ для некоторого $z_0 \in \Omega$, то $k(z) = 0$ и $g_1 \equiv g_2$. $\not<$

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — область. *Непрерывной ветвью аргумента* в Ω называется любая непрерывная функция $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, такая, что $|z|e^{i\psi(z)} \equiv z$ на Ω.

Аналогично, если $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — аналитическая функция, то *непрерывной ветвью аргумента* f в Ω называется любая непрерывная функция $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, такая, что $|f(z)|e^{i\psi(z)} = f(z)$, где $z \in \Omega$.

Теорема 2.13. Если Ω — односвязная область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — аналитическая функция, то существует непрерывная ветвь аргумента функции f в Ω. Более того, любые две ветви аргумента f отличаются на число $2\pi k$ всюду в Ω. В частности, любая ветвь аргумента однозначно определяется значением в одной точке.

Доказательство. Можно взять $\psi = \operatorname{Im} \log f$, где $\log f$ — произвольная аналитическая ветвь логарифма f. Если ψ_1, ψ_2 — две аналитические ветви, то

$$|f(z)|e^{i\psi_1(z)} = |f(z)|e^{i\psi_2(z)} \qquad (\forall z \in \Omega).$$

Значит, $\psi_1(z) - \psi_2(z) = 2\pi k(z)$, где $k(z) \in \mathbb{Z}$, и $k(z) \equiv k(z_0)$ по непрерывности. $\not<$

Определение. *Главной ветвью логарифма* в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ называется аналитическая функция $g\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям $e^{g(z)} = z$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ и $g(1) = 0$.

Соответственно, *главная ветвь аргумента* в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ — это отображение

$$\psi\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, \quad re^{i\varphi} \mapsto \varphi,$$

где $r > 0$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Утверждение 2.14. Главные ветви логарифма и аргумента существуют, причём

$$\log z = \ln|z| + i\arg(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \tag{2.3}$$

где $\ln z$ — “старый” логарифм на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $\log(z)$ и $\arg(z)$ — главные ветви логарифма и аргумента соответственно.

Доказательство. Пусть g — некоторая ветвь логарифма в односвязной области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{-}$. Тогда $e^{g(z)} \equiv z$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{-}$. В частности, $e^{g(1)} = 1$. Тогда главная ветвь логарифма — это функция

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{-} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) - g(1).$$

Действительно, $e^{h(z)} = z$, h — аналитична, и $h(1) = 0$.

Поймём, что $\psi\colon re^{i\varphi} \mapsto \varphi$ — действительно непрерывная ветвь аргумента. Если $z = re^{i\varphi}$, где $r > 0$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$, то

$$|z|e^{i\psi(z)} = |re^{i\varphi}|e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z,$$

что и требовалось.

Наконец, проверим, что выполнена формула (2.3). Очевидно, что

$$e^{\log z} = z = |z|e^{i\psi(z)} = e^{\ln|z| + i\psi(z)},$$

причём $\log 1 = 0 = \psi(1)$. Значит, $\log z - (\ln|z| + i\psi(z))$ — целочисленная непрерывная функция в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{-}$, равная нулю в точке 1. Отсюда следует, что $\log z \equiv \ln|z| + i\psi(z)$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{-}$. $\not<$

Определение. Пусть Ω — односвязная область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — аналитическая функция, $\log f$ — аналитическая ветвь логарифма f. Пусть $w \in \mathbb{C}$. Тогда функция $(f(z))^w = e^{w \log f}$ называется *степенью функции* f, *отвечающей выбранной ветви* $\log f$.

Замечание. Если $k \in \mathbb{N}$, то $z^k = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ независимо от выбора ветви логарифма, так как

$$z^k = e^{k \log z} = e^{\log z + \cdots + \log z} = e^{\log z} \cdot \ldots \cdot e^{\log z}.$$

Аналогичным образом показывается, что определение комплексной степени совпадает с обычным при $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.1. Вычислим i^i, если в зафиксирована главная ветвь логарифма для функции $f(z) = z$:

$$i^i = e^{i(\log z)(i)} = e^{i(\ln|i| + i\arg(i))} = e^{i(i \cdot \pi/2)} = e^{-\pi/2} > 0.$$

3 Гармонические функции

Определение. Говорят, что пара функций $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяет *условиям Коши – Римана* (CR), если $u, v \in C^1(\Omega)$,

$$u'_x \equiv v'_y \quad \text{и} \quad u'_y \equiv -v'_x$$

в области Ω.

Теорема 3.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область,

$$f\colon x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{для} \quad x, y \in \mathbb{R} : x + iy \in \Omega.$$

Функция f аналитична в Ω тогда и только тогда, когда функции u, v удовлетворяют условиям Коши – Римана.

Доказательство. Мы знаем, что f аналитична тогда и только тогда, когда $f\mathrm{d}z$ — замкнутая форма в Ω, что эквивалентно условию $\mathrm{d}(f\mathrm{d}z) = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(u + iv) \wedge \mathrm{d}z = 0 &\iff (u'_x\,\mathrm{d}x + u'_y\,\mathrm{d}y + iv'_x\,\mathrm{d}x + iv'_y\,\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = 0 \\
&\iff iu'_x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u'_y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - v'_x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + iv'_y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = 0 \\
&\iff (iu'_x - u'_y - v'_x - iv'_y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0,
\end{aligned}$$

а последнее — это просто условия Коши – Римана. $\not<$

Теорема 3.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, не равная тождественно константе. Тогда отображение f открыто, то есть переводит открытые множества в открытые.

Доказательство. Рассмотрим f как отображение из $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Его якобиан равен

$$\det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = [\mathrm{CR}] = \det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ -u'_y & u'_x \end{pmatrix} = (u'_x)^2 + (u'_y)^2.$$

С другой стороны, если $z = x + iy \in \Omega$, то

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\substack{w\to 0\\ w\in\mathbb{C}}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \lim_{\substack{w\to 0\\ w\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\bigl(f(x+iy)\bigr) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) \\
&= u'_x(x,y) - iu'_y(x,y).
\end{aligned}$$

Таким образом, $|f'(z)|^2 = (u'_x)^2 + (u'_y)^2$. Значит, если $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \Omega$, то отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ открыто по теореме об открытости отображений с невырожденным дифференциалом.

В общем случае, покажем, что образ диска $B(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$ под действием f содержит диск $B(f(z_0), \eta)$ для некоторого $\eta > 0$. Существует функция g, аналитическая в

Ω и удовлетворяющая условию $g(z_0) \neq 0$, и число $n \in \mathbb{N}$, для которых имеет место равенство

$$f - f(z_0) = g(z)(z - z_0)^n.$$

Тогда $f = h_1(h_2(h_3(z)))$, где

$$\begin{aligned} &h_3 \colon z \mapsto \widetilde{g}(z)(z - z_0), \\ &h_2 \colon z \mapsto z^n, \\ &h_1 \colon z \mapsto z + f(z_0), \end{aligned}$$

$\widetilde{g}$ — аналитичная функция, удовлетворяющая условию $(\widetilde{g})^n = g$ в $B(z_0, \varepsilon)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы в $B(z_0, \varepsilon)$ было выполнено $g(z) \neq 0$. Тогда

$$\widetilde{g} = \exp\left(\frac{1}{n}\log g\right),$$

где $\log g$ — аналитическая ветвь g в $B(z_0, \varepsilon)$. Заметим, что

$$h_3'(z_0) = \widetilde{g}(z_0) \neq 0.$$

Значит, уменьшая при необходимости ε, можно добиться того, чтобы $h_3'(z) \neq 0$ было выполнено для всех $z \in B(z_0, \varepsilon)$. Таким образом, отображение $h_3 \colon B(z_0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ открыто, и

$$h_3(B(z_0, \varepsilon)) \supset B(h_3(z_0), \eta_1)$$

для некоторого $\eta_1 > 0$. Отображение h_2 открыто, так как z^n — открытое отображение из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в $\mathbb{C}$ по первой части доказательства:

$$(z^n)' = nz^{n-1} \neq 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

и, кроме того, оно переводит диск $B(0, r)$ в диск $B(0, r^m)$. Наконец, h_1 — открыто, так как $h_1'(z) = 1 \neq 0$ в $\mathbb{C}$. Следовательно, f открыто как композиция открытых: $f(B(z_0, \varepsilon))$ содержит шар $B(f(z_0), \eta)$ для некоторого $\eta > 0$. $\not<$

Теорема 3.3 (принцип максимума для аналитических функций). Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция.

(1) Если существует такая точка $z_0 \in \Omega$, что $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ для всех $z \in \Omega$, то $f \equiv \mathrm{const}$ в Ω. Другими словами, *непостоянная аналитическая функция не может достигать максимума внутри области.*

(2) Если область Ω ограничена и f допускает непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$, то существует такое $z_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, что $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ для всех $z \in \overline{\Omega}$.

(3) Если $f(z) \neq 0$ в любой точке $z \in \Omega$, и существует $z_0 \in \Omega : |f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ для всех $z \in \Omega$, то $f \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Если $z_0 \in \Omega$ — максимум $|f|$, то f не может быть открытым отображением[8]. Если $f(z) \neq 0$, то, рассматривая $1/|f(z)|$, получим утверждение (3). Второе утверждение следует из первого и теоремы Вейерштрасса — максимум должен быть в $\overline{\Omega}$, но его нет в Ω. $\not<$

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$. *Оператор Лапласа* — это отображение

$$\Delta\colon C^2(\Omega) \to C(\Omega),$$

действующее по правилу

$$\Delta\colon u \mapsto u''_{xx} + u''_{yy}.$$

Определение. Функция $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *вещественной гармонической*, если $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$. Функция $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ называется *комплексной гармонической*, если $\Delta u = 0$.

Лемма 3.4. Пусть функция $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ такова, что $\alpha \in C^\infty(\mathbb{C})$, $\operatorname{supp}\alpha$ — компакт в $\mathbb{C}$. Пусть $v \in L^1(\mathbb{C}, \lambda_2)$, где λ_2 — мера Лебега на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Тогда функция

$$g\colon w \mapsto \int\limits_{\mathbb{C}} v(z)\alpha(z-w)\,\mathrm{d}\lambda_2(z)$$

корректно определена и $g \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Доказательство. Функция g корректно определена, так как

$$|v(z)\alpha(z-w)| \leqslant |v(z)| \cdot \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} |\alpha(\zeta)| \quad \text{и} \quad v \in L^1(\mathbb{C}, \lambda_2).$$

Покажем, что $g \in C^\infty(\mathbb{C})$. Рассмотрим $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда

$$g'_x(z_0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(z_0+x) - g(z_0)}{x} \tag{3.1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \int\limits_{\mathbb{C}} v(z) \frac{\alpha(z-(z_0+x)) - \alpha(z-z_0)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_2(z) \tag{3.2}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{C}} v(z) \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(z-(z_0+x)) - \alpha(z-z_0)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_2(z) \tag{3.3}$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{C}} v(z)\alpha'_x(z-z_0)\,\mathrm{d}\lambda_2(z), \tag{3.4}$$

причём $\alpha'_x \in C^\infty(\mathbb{C})$ и $\operatorname{supp}\alpha'_x$ компактен. Значит, существует g'_x. Аналогичным образом показывается, что существуют и g''_{xx}, g''_{xy} и так далее. Осталось доказать, что равенство (3.3) верно, то есть, что можно переставлять предел и интеграл. Для этого можно воспользоваться теоремой Лебега о мажорированной сходимости. Пусть

$$\varkappa_x(z) = \frac{\alpha(z-(z_0+x)) - \alpha(z-z_0)}{x}.$$

[8]А именно, у точки $f(z_0)$ нет окрестности, полностью лежащей в открытом множестве $f(\Omega)$.

Нужно найти мажоранту у функции $v(z)\varkappa_x(z)$. Так как $v \in L^1(\mathbb{C})$, достаточно показать, что
$$\sup_{x\in\mathbb{R},\, z\in\mathbb{C}} |\varkappa_x(z)| < \infty.$$
Это так по неравенству Лагранжа:
$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R},\, z\in\mathbb{C}} |\varkappa_x(z)| &\leqslant \sup_{p\in\mathbb{C}} \|\mathrm{d}_p\alpha\| \cdot \frac{|[z-(z_0+x), z-z_0]|}{x}\\ &\leqslant \sup_{p\in\mathbb{C}} \|\mathrm{d}_p\alpha\| < \infty,\end{aligned}$$
где последнее неравенство выполнено, так как у α компактный носитель. $\not\leq$

Теорема 3.5. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Следующие утверждения равносильны:

(1) $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$;

(2) $u \in C(\Omega)$ и для всех $z_0 \in \Omega$ выполнено равенство
$$u(z_0) = \frac{1}{|C(z_0,r)|} \int\limits_{C(z_0,r)} u(z)\,\mathrm{d}S_1(z), \tag{3.5}$$
где $C(z_0,r) = \{z : |z-z_0| = r\}$, $r > 0$ — любое число, такое, что $\{|z-z_0| < r\} \subset \Omega$.[9]

Более того, если Ω односвязно, то (1) и (2) равносильны условию:

(3) $u = \operatorname{Re} f$ для некоторой аналитической функции f в Ω.

Если в этих условиях выполнено $\operatorname{Re} f_1 = \operatorname{Re} f_2 = u$, где f_1, f_2 — аналитические, то $f_1 = f_2 + iy$, где $y \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для начала предположим, что область Ω односвязна.

(3) $\implies$ (2). Пусть f — аналитическая функция в Ω, $u = \operatorname{Re} f$, $z_0 \in \Omega$, $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$. Тогда
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$
где окружность $C(z_0,r)$ ориентирована против часовой стрелки. По определению,
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{z_0+re^{iz}-z_0}\,\mathrm{d}(z_0+re^{it})\\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})\cdot rie^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

[9] Отметим, что $|C(z_0,r)| = 2\pi r$ — длина окружности. Такая запись используется для наглядности.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

Значит,

$$u(z_0) = \operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(z_0 + re^{it})) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{|C(z_0, r)|} \int_{C(z_0,r)} u(z) \, \mathrm{d}S_1(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

где $\gamma\colon t \mapsto (\operatorname{Re} z_0 + r\cos t, \operatorname{Im} z_0 + r\sin t)$,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2} = \sqrt{r^2} = r.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

Таким образом, мы доказали (3.5).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Рассмотрим точку $z_0 \in \Omega$ и докажем, что $u \in C^\infty(B(z_0, \varepsilon))$ для некоторого $\varepsilon > 0 : B(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$, и, более того, $(\Delta u)(z_0) = 0$. Положим $\eta = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$. Пусть $\varepsilon = \eta/10$, $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{supp} \alpha \subset [\varepsilon/20, \varepsilon/10] \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \alpha(t) \, \mathrm{d}t = 1.$$

Тогда

$$u(z_0) = \int_0^\infty u(z_0)\alpha(r) \, \mathrm{d}r = \int_0^\infty \left(\int_{C(z_0,r)} u(z) \, \frac{\alpha(r)}{|C(z_0, r)|} \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r.$$

Продолжим u вне $B(z_0, \varepsilon/2)$ нулём; получим функцию $\widetilde{u} = L^1(\mathbb{C}, \lambda_2)$. Тогда

$$\int_0^\infty \left(\int_{C(z_0,r)} u(z) \, \frac{\alpha(r)}{|C(z_0, r)|} \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r = \int_0^\infty \int_{C(z_0,r)} u(z) \, \frac{\alpha(|z - z_0|)}{2\pi|z - z_0|} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \tag{3.6}$$

$$= \int_{\mathbb{C}} \widetilde{u}(z)\beta(z - z_0) \, \mathrm{d}\lambda_2(z), \tag{3.7}$$

где (3.7) выполнено по следствию из формулы коплощади,

$$\beta(w) = \frac{\alpha(|w|)}{2\pi|w|} \in C^\infty(\mathbb{C})$$

— функция, имеющая компактный носитель (как и α). По лемме 3.4 получаем, что отображение

$$z_0 \mapsto \int\limits_{\mathbb{C}} \widetilde{u}(z)\beta(z-z_0)\,\mathrm{d}\lambda_2(z)$$

лежит в $C^\infty(\mathbb{C})$. Заметим, что по условию на α в (3.7) нужно интегрировать только по таким z, что $\varepsilon/20 \leqslant |z-w| \leqslant \varepsilon/10$, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \widetilde{u}(z)\beta(z-w)\,\mathrm{d}\lambda_2(z) = \int\limits_{\frac{\varepsilon}{20}\leqslant|z-w|\leqslant\frac{\varepsilon}{10}} \widetilde{u}(z)\beta(z-w)\,\mathrm{d}\lambda_2(z) = \int\limits_{\frac{\varepsilon}{20}\leqslant|z-w|\leqslant\frac{\varepsilon}{10}} u(z)\beta(z-w)\,\mathrm{d}\lambda_2(z).$$

Значит,

$$u(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} \widetilde{u}(z)\beta(z-w)\,\mathrm{d}\lambda_2(z).$$

В частности, $u \in C^\infty(B(z_0, \varepsilon/10))$. Осталось показать, что $\Delta u(z_0) = 0$. Для этого разложим функцию u в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}u(z) &= u(x_0,y_0) + u'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + u'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\ &\quad+ \frac{1}{2!}\big(u''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + u''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + 2u''_{xy}(x-x_0)(y-y_0)\big) + o(r^2).\end{aligned}$$

Обозначим $u(x_0,y_0)$ через A, сумму членов, в которых присутствует первая производная — через B, а сумму, в которой вторые производные — через C. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C(z_0,r)} u(z)\,\mathrm{d}S_1(z) &= \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C(z_0,r)} \big(A+B+C+o(r^2)\big)\,\mathrm{d}S_1(z)\\ &= \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C(z_0,r)} A\,\mathrm{d}S_1(z) + \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C(z_0,r)} B\,\mathrm{d}S_1(z)\\ &\quad+ \frac{1}{2\pi r}\frac{1}{2!}\int\limits_{C(z_0,r)} C\,\mathrm{d}S_1(z) + o\left(\frac{1}{2\pi r}\cdot 2\pi r\cdot r^2\right).\end{aligned}$$

Обозначим первый интеграл через I, второй — через II, третий — через III. Очевидно, что $\mathrm{I} = u(x_0,y_0) = u(z_0)$. $\mathrm{II} = 0$, так как, например,

$$\int\limits_{C(z_0,r)} (x-x_0)\,\mathrm{d}S_1(z) = \int\limits_0^{2\pi} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Наконец, вычислим III:

$$\int\limits_{C(z_0,r)} (x - x_0)(y - y_0)\,\mathrm{d}S_1(z) = \int\limits_0^{2\pi} (r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r)\,\mathrm{d}\varphi = 0;$$

другие два слагаемых оказываются ненулевыми:

$$\int\limits_{C(z_0,r)} (x - x_0)^2\,\mathrm{d}S_1(z) = \int\limits_0^{2\pi} r^3\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = r^3\pi,$$

$$\int\limits_{C(z_0,r)} (y - y_0)^2\,\mathrm{d}S_1(z) = \int\limits_0^{2\pi} r^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = r^3\pi.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C(z_0,r)} u(z)\,\mathrm{d}S_1(z) = u(z_0) + \frac{1}{2\pi r}\frac{1}{2!}\pi r^3\Delta u(z_0) + o(r^2), \quad r \to 0.$$

Значит,

$$0 = \left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{C(z_0,r)} u(z)\,\mathrm{d}S_1(z)\right) - u(z_0) = \frac{1}{4}r^2\Delta u(z_0) + o(r^2), \quad r \to 0,$$

откуда следует, что $\Delta u(z_0) = 0$.

(1) $\Longrightarrow$ (3). Пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ такова, что $\Delta u = 0$. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = u'_x\,\mathrm{d}y - u'_y\,\mathrm{d}x$ в Ω. Ясно, что

$$\mathrm{d}\omega = u''_{xx}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - u''_{yy}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = \Delta u\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

Так как область Ω односвязна, то существует функция $v \in C^1(\Omega) : \mathrm{d}v = \omega$. Тогда

$$v'_x\,\mathrm{d}x + v'_y\,\mathrm{d}y = u'_x\,\mathrm{d}y - u'_y\,\mathrm{d}x,$$

то есть $u'_x = v'_y$ и $u'_y = -v'_x$. Это условия Коши – Римана, а потому $u + iv$ — аналитическая функция в Ω, и $u = \mathrm{Re}(u + iv)$, что и требовалось.

Предположим, что $u = \mathrm{Re}\, f_1 = \mathrm{Re}\, f_2$ для некоторых аналитических f_1, f_2 в Ω. Тогда $f_1 - f_2$ — аналитическая функция, причём $\mathrm{Re}(f_1 - f_2) \equiv 0$ в Ω. Из уравнений Коши — Римана получаем, что $\mathrm{Im}(f_1 - f_2)'_x \equiv 0$ и $\mathrm{Im}(f_1 - f_2)'_y \equiv 0$ всюду в Ω. Значит,

$$\mathrm{Im}(f_1 - f_2) \equiv \mathrm{const}, \quad \text{и} \quad f_1 - f_2 \equiv iy$$

для некоторого $y \in \mathbb{R}$.

Эквивалентность (1) и (2) в общем случае сводится к односвязному случаю, так как эти условия локальны, и можно сужать функцию u на круги $B(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$. $\not<$

Обозначение. В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Другими словами, $\mathbb{T}$ — единичная окружность, $\mathbb{D}$ — открытый единичный диск.

Определение. *Ядром Пуассона* на единичной окружности $\mathbb{T}$, отвечающем точке $z \in \mathbb{D}$, называется отображение

$$\xi \mapsto \frac{1 - |z|^2}{\left|1 - \overline{\xi} z\right|^2}.$$

Обозначение. Будем через m обозначать меру $\frac{1}{2\pi} S_1$, где S_1 — поверхностная мера на $\mathbb{T}$, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\, \mathrm{d}m(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it})\, \mathrm{d}t.$$

Отметим, что m — вероятностная мера, то есть $m(\mathbb{T}) = 1$.

Лемма 3.6. Для любой точки $\xi \in \mathbb{T}$ отображение

$$P(\,\cdot\,, \xi) \colon z \mapsto \frac{1 - |z|^2}{\left|1 - \overline{\xi} z\right|^2}$$

является гармоническим и неотрицательным на $\mathbb{D}$. Кроме того, если $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ — такая последовательность, что $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \xi_0 \in \mathbb{T}$, то $\{P(z_n, \,\cdot\,)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — аппроксимативная единица с центром в ξ_0, то есть:

(1) $P(z_n, \xi) \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{T}$;

(2) $\int_{\mathbb{T}} P(z_n, \xi)\, \mathrm{d}m(\xi) = 1$;

(3) для любого $\delta > 0$ выполнено

$$\sup_{\xi \in \mathbb{T} \setminus B(\xi_0, \delta)} P(z_n, \xi) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Доказательство. Для начала проверим, что

$$\frac{1 - |z|^2}{\left|1 - \overline{\xi} z\right|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \overline{\xi} z}{1 - \overline{\xi} z}\right).$$

Действительно,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 + \overline{\xi} z}{1 - \overline{\xi} z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1 - \xi \overline{z})(1 + \overline{\xi} z)}{\left|1 - \overline{\xi} z\right|^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1-|\xi z|^2+\overline{\xi}z-\xi\overline{z}}{\left|1-\overline{\xi}z\right|^2}\right)\\
&= \big[|\xi|=1\big] = \frac{1-|z|^2}{\left|1-\overline{\xi}z\right|^2}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\mathbb{D}$ — односвязная область, а

$$
z \mapsto \frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}
$$

— аналитическая функция в $\mathbb{D}$, из пункта (3) теоремы 3.5 следует, что $P(\,\cdot\,,\xi)$ — гармоническая функция.

Проверим, что $\{P(z_n,\,\cdot\,)\}_{n\geqslant 0}$ — аппроксимативная единица.

(1) $P(z,\xi)\geqslant 0$, так как $1-|z|^2\geqslant 0$ в $\mathbb{D}$.

(2) Ясно, что

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{T}} P(z_n,\xi)\,\mathrm{d}m(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\frac{1+\overline{\xi}z_n}{1-\overline{\xi}z_n}\right)\,\mathrm{d}m(\xi)\\
&= \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\frac{1+\xi\overline{z}_n}{1-\xi\overline{z}_n}\right)\,\mathrm{d}m(\xi)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1+0\cdot\overline{z}_n}{1-0\cdot\overline{z}_n}\right) = 1,
\end{aligned}
$$

так как функция

$$
\operatorname{Re}\left(\frac{1+\xi\overline{z}_n}{1-\xi\overline{z}_n}\right)
$$

гармонична в $\mathbb{D}$ по ξ.

(3) Так как $z_n \longrightarrow \xi_0$, при больших n имеем

$$
\sup_{\xi\in\mathbb{T}\setminus B(\xi_0,\delta)} \frac{1-|z_n|^2}{|1-\overline{\xi}z_n|^2} = \sup_{\xi\in\mathbb{T}\setminus B(\xi_0,\delta)} \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2} \leqslant \frac{1-|z_n|^2}{(\delta/2)^2},
$$

и очевидно, что последнее выражение стремится к нулю. $\not<$

Лемма 3.7 (принцип максимума для гармонических функций). Если u — гармоническая функция в области Ω, и существует такое $z_0\in\Omega$, что $u(z_0)\geqslant u(z)$ для любого $z\in\Omega$, то $u\equiv\mathrm{const}$ в Ω.

Доказательство. Покажем, что множество $E=\{z\in\Omega : u(z)=u(z_0)\}$ непусто, открыто и замкнуто в Ω. Очевидно, что оно непусто, так как $z_0\in E$, и что оно замкнуто, так как $u\in C(\Omega)$. Если $w\in E$, то для любого $r\in(0,\operatorname{dist}(w,\partial\Omega))$ имеем

$$
u(w) = \frac{1}{|C(w,r)|}\int\limits_{C(w,r)} u(\xi)\,\mathrm{d}S_1(\xi).
$$

Значит, $u(\xi) = u(w)$ почти всюду на $C(w,r)$, так как

$$\frac{1}{|C(w,r)|}\int\limits_{C(w,r)} \underbrace{(u(w)-u(\xi))}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}S_1(\xi) = 0.$$

Поскольку функция u непрерывна, это означает, что $u(\xi) = u(w)$ для всех $\xi \in C(w,r)$. Таким образом, E открыто; и так как Ω связно, отсюда следует, что $u \equiv \mathrm{const}$ в Ω.[10] $\not<$

Теорема 3.8. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда

$$u(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi)P(z,\xi)\,\mathrm{d}m(\xi), \qquad \text{где } z \in \mathbb{D},$$

— гармоническая функция, причём

$$u(z) \xrightarrow[z\to\xi]{z\in\mathbb{D}} f(\xi) \qquad \text{для всех } \xi \in \mathbb{T}.$$

В частности, доопределяя u на $\mathbb{T}$ значениями f, получаем непрерывную в $\overline{\mathbb{D}}$ гармоническую функцию.

Наоборот, пусть u — непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$ и гармоническая в $\mathbb{D}$ функция. Тогда

$$u(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} u(\xi)P(z,\xi)\,\mathrm{d}m(\xi).$$

Доказательство. Для начала заметим, что

$$u(z) = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi)\,\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}\,\mathrm{d}m(\xi)\right),$$

а потому u — гармоническая функция в $\mathbb{D}$. Пусть $z_n \to \xi_0 \in \mathbb{T}$. Тогда

$$\begin{aligned}
|f(\xi_0)-u(z_n)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{T}} (f(\xi_0)-f(\xi))P(z_n,\xi)\,\mathrm{d}m(\xi)\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} \big|(f(\xi_0)-f(\xi))P(z_n,\xi)\big|\,\mathrm{d}m(\xi)\\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}\setminus B(\xi_0,\delta)} \big|(f(\xi_0)-f(\xi))P(z_n,\xi)\big|\,\mathrm{d}m(\xi) + \int\limits_{\mathbb{T}\cap B(\xi_0,\delta)} \big|(f(\xi_0)-f(\xi))P(z_n,\xi)\big|\,\mathrm{d}m(\xi)\\
&\leqslant 2\max_{\xi\in\mathbb{T}}|f(\xi)| \sup_{\xi:|\xi-\xi_0|\geqslant\delta}|P(z_n,\xi)| + \sup_{|\xi-\xi_0|<\delta}|f(\xi)-f(\xi_0)|\cdot\int\limits_{\mathbb{T}} P(z_n,\xi)\,\mathrm{d}m.
\end{aligned}$$

Значит, $|u(z_n)-f(\xi_0)| \to 0$ при $n\to\infty$.[11]

Пусть теперь u — гармоническая функция в $\mathbb{D}$ и непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$. Рассмотрим

[10]Это доказательство обобщается на многомерный случай (где интеграл берётся по сферам).

[11]См. аналогичные доказательства по аппроксимативной единице в конспекте со второго семестра.

функцию
$$\widetilde{u}(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} u(\xi) P(z,\xi)\, \mathrm{d}m(\xi).$$
Тогда $(u - \widetilde{u})(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathbb{T}$. Воспользуемся теоремой максимума для гармонических функций. Пусть $u - \widetilde{u} \neq 0$ в $z_0 \in \mathbb{D}$. На границах оно, очевидно, равно нулю. Если $u(z_0) - \widetilde{u}(z_0) > 0$, то в максимуме разность $u - \widetilde{u}$ положительна, максимум лежит строго внутри $\mathbb{D}$. Но тогда по лемме $u - \widetilde{u}$ постоянно, т.е. равно нулю. Если же в точке z_0 выражение меньше нуля, то повторим те же рассуждения для $\widetilde{u} - u$ и придём к тому же выводу. Значит, $u \equiv \widetilde{u}$ в $\mathbb{D}$. $\not<$

Теорема 3.9 (теорема Лиувилля для гармонических функций). Если u — ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{C}$, то $u \equiv \text{const}$.

Доказательство. Комплексная плоскость односвязна, а потому существует такое отображение v, что
$$f(z) = u(z) + iv(z)$$
— целая функция. По условию, $|\operatorname{Re} f| = |u| \leqslant c$, где $c > 0$. Значит,
$$g(z) = \frac{1}{f(z) + 2c}$$
— тоже целая функция. При этом $|g| \leqslant 1/c$; по теореме Лиувилля, $g \equiv \text{const}$, откуда следует, что u постоянна в $\mathbb{C}$. $\not<$

Определение. *Ядром Пуассона*, отвечающем точке $w \in \mathbb{C}$ в круге $B(z_0, R)$, называется отображение
$$P_{z_0,R}(w,\xi) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |w - z_0|^2}{|\xi - w|^2}.$$

Утверждение 3.10. Если u — гармонична в $B(z_0, R)$ и $u \in C(\overline{B(z_0, R)})$, то
$$u(w) = \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi) P_{z_0,R}(w,\xi)\, \mathrm{d}S_1(\xi),$$
где S_1 — поверхностная мера Лебега на $C(z_0, R)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию
$$\widetilde{u}(z) = u(z_0 + Rz), \qquad \text{где} \quad z \in \mathbb{D}.$$
Она гармонична в $\mathbb{D}$ и непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$. Значит,
$$\begin{aligned}\widetilde{u}(z) &= \int\limits_{\mathbb{T}} u(z_0 + R\zeta)\, \frac{1 - |z|^2}{\left|1 - \overline{\zeta} z\right|^2} \,\mathrm{d}m(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} u(z_0 + R\zeta)\, \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \,\mathrm{d}S_1(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)\, \frac{1 - |z|^2}{\left|\frac{\xi - z_0}{R} - z\right|^2} \,\mathrm{d}S_1(\xi) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)\, \frac{R^2 - |Rz|^2}{|\xi - z_0 - Rz|^2} \,\mathrm{d}S_1(\xi).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}u(z_0+Rz) &= \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)\,\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-|(z_0+Rz)-z_0|^2}{|\xi-(z_0+Rz)|^2}\,\mathrm{d}S_1(\xi)\\ &= \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)P_{z_0,R}(z_0+Rz,\xi)\,\mathrm{d}S_1(\xi),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\not<$

Следствие 3.11 (неравенство Гарнака). Пусть u гармонична в $B(z_0,R)$, непрерывна в $\overline{B(z_0,R)}$, и $u \geqslant 0$ в $B(z_0,R)$. Пусть $w \in \mathbb{C}$ таково, что $|w-z_0|=r$, где $r\in(0,R)$. Тогда

$$u(z_0)\,\frac{R-r}{R+r} \leqslant u(w) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\,u(z_0).$$

Доказательство. Поскольку $u \geqslant 0$,

$$u(w) = \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)P_{z_0,R}(w,\xi)\,\mathrm{d}S_1(\xi) \leqslant \int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)\sup_{\xi\in C(z_0,R)} P_{z_0,R}(w,\xi)\,\mathrm{d}S_1(\xi).$$

По определению,

$$\sup_{\xi\in C(z_0,R)} P_{z_0,R}(w,\xi) \leqslant \frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2} = \frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{R+r}{R-r}.$$

Значит,

$$\int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)\sup_{\xi\in C_0(R)} P_{z_0,R}(w,\xi)\,\mathrm{d}S_1(\xi) \leqslant \frac{1}{2\pi R}\frac{R+r}{R-r}\int\limits_{C(z_0,R)} u(\xi)\,\mathrm{d}S_1(\xi) = u(z_0)\,\frac{R+r}{R-r}.$$

Левое неравенство доказывается аналогично; надо воспользоваться следующей оценкой:

$$\inf_{\xi\in C(z_0,R)} P_{z_0,R}(w,\xi) \geqslant \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2}.$$

$\not<$

Другое доказательство теоремы Лиувилля. Если u ограничено в $\mathbb{C}$, то для некоторого $c>0$ выполнено $u+c\geqslant 0$. По неравенству Гарнака,

$$(u(0)+c)\,\frac{R-r}{R+r} \leqslant u(w)+c \leqslant (u(0)+c)\,\frac{R+r}{R-r}$$

верно для любого $w\in\mathbb{C}$, такого, что $|w|=r$, и любого $R>r$. Перейдём к пределу по $R\to\infty$, и получим, что $u(w)+c=u(0)+c$ для всех $w\in\mathbb{C}$, то есть u — константа. $\not<$

4 Интегральная теорема Коши

Определение. Будем говорить, что у области $\Omega \subset \mathbb{C}$ *кусочно-гладкая граница*, если её граница представляется в виде объединения конечного числа кусочно-гладких замкнутых простых кривых.[12]

Определение. Будем называть область $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей *стандартной*, если для любой точки $z \in \partial\Omega$ существует такое $\delta > 0$, что для любого квадрата Q с центром в z диаметра меньше δ множество $Q \setminus \partial\Omega$ состоит из двух компонент связности, ровно одна из которых лежит в Ω.

Определение. Пусть Ω — стандартная область, $\partial\Omega = \bigcup \Gamma_k$, где $\Gamma_k = \gamma_{k1} + \dots + \gamma_{kn_k}$, а γ_{ks} — гладкий инъективный путь для всех $s \in \{1, \dots, n_k\}$. Будем говорить, что при обходе $\partial\Omega$ вдоль пути γ область Ω *остаётся слева*, если для всех $t_0 \in (0,1)$ существует такое $\varepsilon(t_0) > 0$, что

$$\gamma(t_0) + i\varepsilon\gamma'(t_0) \in \Omega \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon(t_0)).$$

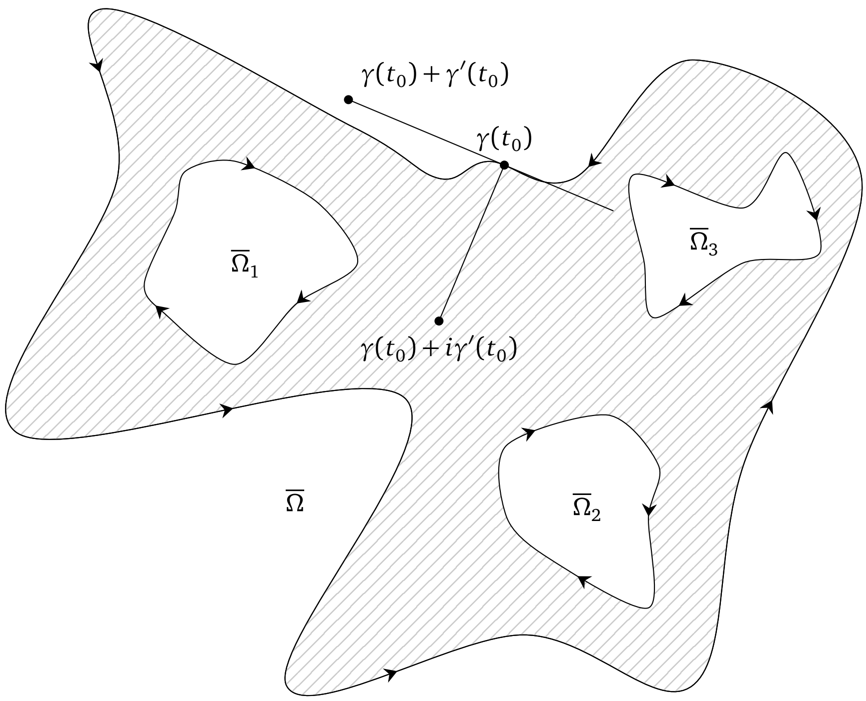


Рис. 6: Пути, при обходе вдоль которых область остаётся слева

Определение. Пусть Ω — стандартная область, ω — непрерывная дифференциальная форма в $\overline{\Omega}$. Будем использовать обозначение

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \omega = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=1}^{n_k} \varepsilon_{ks} \int\limits_{\gamma_{ks}} \omega,$$

[12] Интуитивно, это условие означает, что в области нет разрезов.

где

$$\varepsilon_{ks} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Omega \text{ остается слева при обходе вдоль } \gamma_{ks}, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наша основная цель в этом параграфе — доказать следующую теорему:

Теорема 4.1 (интегральная теорема Коши). Пусть Ω — ограниченная стандартная область, f — аналитическая функция в Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$; $w \in \Omega$. Тогда

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z.$$

Теорема 4.2. Пусть Ω — стандартная область, γ — гладкий участок границы Ω. Тогда при обходе либо по γ, либо по $-\gamma$ область Ω остаётся слева.

Доказательство. Ясно, что если

$$(a,b) \subset (0,1), \qquad (c,d) \subset (0,1), \qquad (a,b) \cap (c,d) \neq \varnothing,$$

и при обходе вдоль путей $\gamma|_{(a,b)}$ и $\gamma|_{(c,d)}$ область Ω остаётся слева, то Ω остаётся слева и при обходе вдоль $\gamma|_{(a,d)}$. Покажем что для всех $t_0 \in (0,1)$ существует такое $\delta > 0$, что $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (0,1)$, и при обходе вдоль $\gamma|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)}$ или вдоль $-\gamma|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)}$ область остаётся слева.

Зафиксируем точку $t_0 \in (0,1)$ и будем доказывать существование такого δ. Ограничение $\gamma|_{(0,1)}$ — гладко параметризованное многообразие в $\mathbb{R}^2$, поэтому по теореме о представлении г.п.м. в виде графика отображения, существует такой квадрат Q со стороной, перпендикулярной $\gamma'(t_0)$ и центром в $\gamma(t_0)$, что для некоторого $\delta_0 > 0$ кривая $\gamma|_{(t_0-\delta_0,t_0+\delta_0)}$ — график отображения из $p + T_p(\gamma)$ в $p + (T_p\gamma)^{\perp}$, где $p = \gamma(t_0)$ (см. рисунок 7).

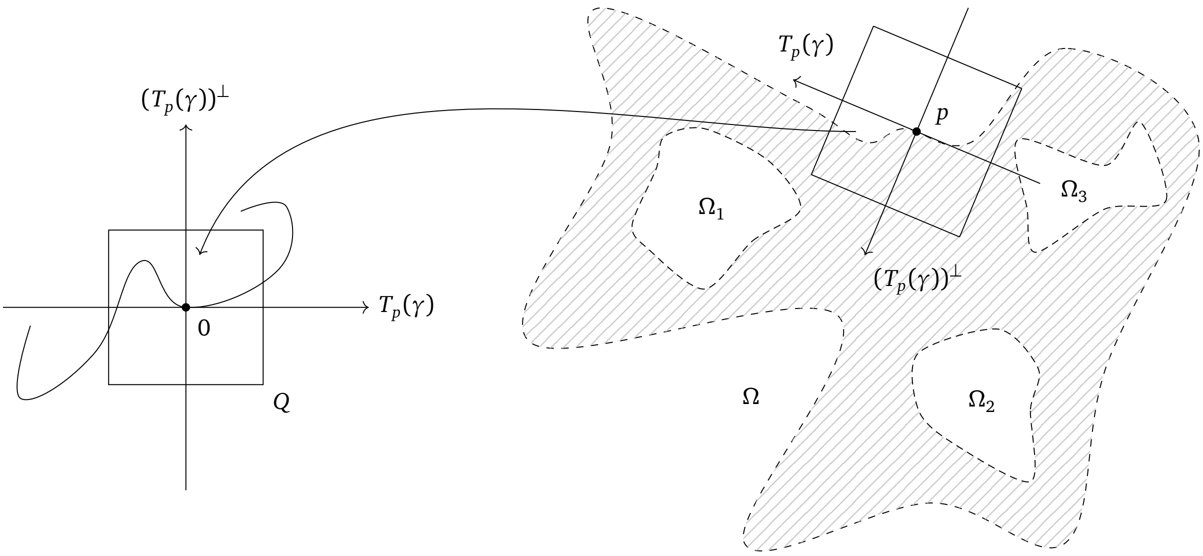


Рис. 7

По определению стандартной области можно выбрать размер Q столь малым, что пересечение надграфика или подграфика этого отображения (которое мы обозначим буквой φ) с Q совпадает с $\Omega \cap Q$. Не умаляя общности, будем считать, что именно надграфик φ лежит в Ω — иначе заменим γ на $-\gamma$ и изменим направление осей координат.

Существует такое число $\widetilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon})$ точка $p + i\varepsilon\gamma'(t_0)$, соответствующая вектору $(0, \varepsilon)$, лежит в области Ω. При малом $\delta > 0$ вектор $p + i\varepsilon\gamma'(t_0 + x)$, где $|x| < \delta$, отвечает вектору $\varepsilon[(x, \varphi(x))]'$ в локальных координатах, повёрнутому на угол $\pi/2$ по часовой стрелке, то есть вектору $\tau = \varepsilon(-\varphi'(x), 1)$. Этот вектор близок к $(0, \varepsilon)$, так как $\varphi'(0) = 0$ (см. рисунок 8). В частности, он лежит в области Ω.

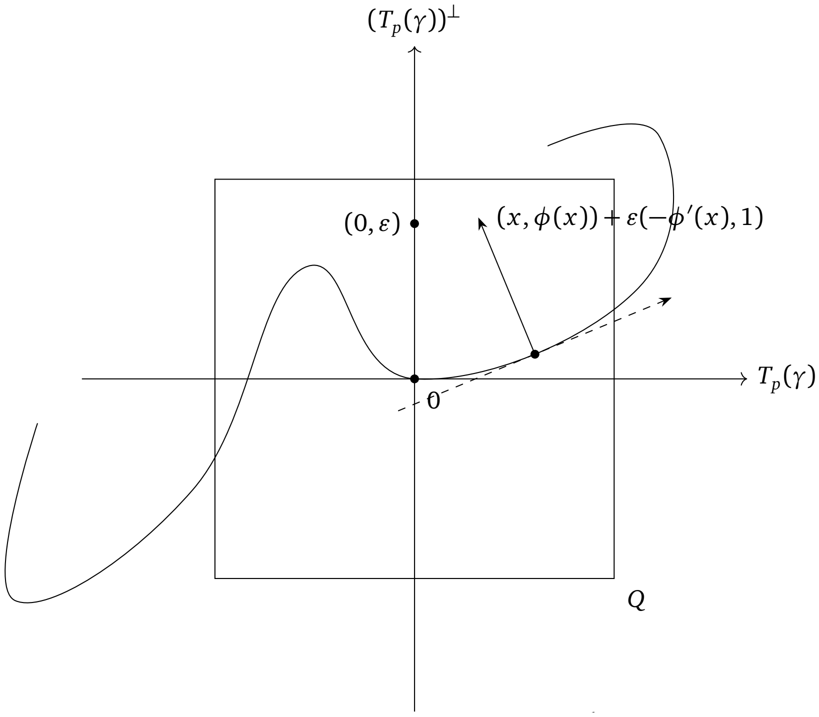


Рис. 8

Если на отрезке с концами $(x, \varphi(x))$ и $(x, \varphi(x)) + \tau$ есть точка, не лежащая в Ω, то на нем есть точка $(x_*, \varphi(x_*))$ из $\partial\Omega$. Таким образом, точки $(x, \varphi(x))$, $(x_*, \varphi(x_*))$ оказываются лежащими на прямой $y = kx + b$, где $k = k(\delta) \to +\infty$. В частности,

$$\varphi(x) = kx + b, \qquad \varphi(x_*) = kx_* + b.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\varphi(x_*) - \varphi(x)}{x^* - x} \right| = |k| \xrightarrow[\delta \to 0]{} \infty.$$

Но с другой стороны, для любой пары (x, x_*) существует такое $y \in [x; x_*]$, что левое выражение равно $\varphi'(y)$. Однако производная φ в окрестности нуля ограничена. Противоречие. Значит, при малом δ при обходе вдоль $\gamma|_{(t_0-\delta, t_0+\delta)}$ область остаётся слева.

Покажем, что множество E таких $t \in (0, 1)$, что при обходе вдоль $\gamma|_{(t-\delta_t, t+\delta_t)}$ область Ω остаётся слева (для некоторого числа $\delta_t > 0$) — открыто-замкнуто в $(0,1)$. То, что E открыто, очевидно. Покажем замкнутость. Пусть $t_n \in E$, $t_n \to t$, где $t \in (0,1)$. В некоторой окрестности t существует квадрат Q с центром в $\gamma(t)$, такой, что $Q \cap \Omega$ — надграфик или подграфик γ. Но при больших n векторы $\gamma(t_n) + i\varepsilon\gamma'(t_n)$ лежат в надграфике γ и попадают в $Q \cap \Omega$, откуда следует, что $Q \cap \Omega$ — надграфик γ. Значит, $\gamma(t) + i\varepsilon\gamma'(t)$ лежит в Ω при малых ε. Таким образом, $t \in E$; а значит E замкнуто в $(0,1)$.

Наконец, если множество E пусто, то область остаётся слева при обходе вдоль $-\gamma$; а если оно непусто, то должно совпадать со всем $(0,1)$, и тогда Ω остаётся слева при обходе вдоль γ, что и требовалось. $\not<$

Теорема 4.3 (интегральная теорема Коши). Пусть Ω — ограниченная стандартная область, f — аналитическая функция в Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$; $w \in \Omega$. Тогда

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - w}\,\mathrm{d}z.$$

Доказательство.

(1) *Если Ω — ограниченная стандартная область, g — аналитична в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$, то*

$$\oint\limits_{\partial\Omega} g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \min_{1\leqslant k,j\leqslant N} \operatorname{dist}(\partial\Omega_k, \partial\Omega_j)/10$. Рассмотрим разбиение $\mathbb{C}$ на квадраты со стороной ε. Эти квадраты можно разбить на три класса:

- "превосходные" квадраты разбиения — квадраты, лежащие в Ω вместе с замыканием;
- "хорошие" квадраты — квадраты, пересекающие Ω по непустому множеству, но не пересекающиеся с концами путей γ_{ks};
- "плохие" квадраты — квадраты, пересекающиеся с концами γ_{ks}.

Также обозначим через P компоненты связности пересечений $Q \cap \Omega$ по превосходным квадратам, через B — компоненты связности по плохим квадратам, и через G — по хорошим квадратам. Ориентируем куски границ квадратов, попавших в Ω, так, чтобы при обходе вдоль этих кусков пересечение $Q \cap \Omega$ оставалось слева. Так как область Ω ограничена, то

$$\oint\limits_{\partial\Omega} g(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{S\in P\cup G\cup B} \oint\limits_{\partial S} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Этот ряд сходится абсолютно[13], так как $\sum_S \ell(S) < \infty$. Посчитаем отдельно суммы по компонентам связности пересечений по превосходным, хорошим и плохим квадратам.

[13] Хотя непустых $Q \cap \Omega$ конечное число, компонент связности может быть бесконечно много, как, например, при пересечении квадрата с центром в нуле и графика функции $x^{10} \sin(1/x)$.

- Если Q — превосходный квадрат, то его граница стягиваема в Ω, а потому

$$\sum_{S\in P} \oint\limits_{\partial S} g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

- Сумма по плохим квадратам оценивается так:

$$\sum_{S\in B} \left| \oint\limits_{\partial S} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant M \cdot \max_{z\in\overline{\Omega}} |g(z)| \cdot \max_{S\in B} \ell(\partial S),$$

где M — количество концов γ_{kj}. Покажем, что для любого $S \in B$

$$\ell(\partial S) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Для этого параметризуем $\partial\Omega \cap S$ так, чтобы оно было графиком отображения в окрестности концов γ_{kj}. Тогда

$$\ell(\partial S) \leqslant 4\varepsilon + \max_{k,j} \ell\big(\gamma_{kj}\big|[0, \eta_{kj}(\varepsilon)] \cup [\widetilde{\eta}_{kj}(\varepsilon), 1]\big),$$

где 4ε — периметр квадрата, а $\eta_{kj}(\varepsilon), 1 - \widetilde{\eta}_{kj}(\varepsilon)$ — это наименьшие числа, такие, что образ под действием γ_{kj} всего интервала $(\eta_{kj}(\varepsilon), \widetilde{\eta}_{kj}(\varepsilon))$ лежит вне S. Заметим, что так как локально γ_{kj} — это график отображения, то при малых $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\eta_{k_j}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \qquad 1 - \widetilde{\eta}_{k_j}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

При этом

$$\ell\big(\gamma_{kj}\big|[0, \eta_{kj}(\varepsilon)] \cup [\widetilde{\eta}_{kj}(\varepsilon), 1]\big) \leqslant \max_{\substack{s\in[0,1]\\ k,j}} |\gamma'_{kj}(s)| \cdot \max_{k,j}(\eta_{kj}(\varepsilon), 1 - \eta_{kj}(\varepsilon)),$$

что стремится к нулю. Таким образом, мы доказали, что

$$\sum_{S\in B} \left| \int\limits_{\partial S} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

- Если Q — хороший квадрат, то $\partial\Omega \cap Q$ — кусочно-гладкий контур Γ, причём $\Gamma_\varepsilon = \{\gamma(t) + i\gamma'(t)\varepsilon\} \subset \Omega$.Значит,

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

где первое равенство следует из непрерывности g в $\overline{\Omega}$, а второе выполнено, так как Γ_ε стягиваемо в Ω. Таким образом, мы разобрали случай, когда

$Q \cap \Omega$ состоит из одной компоненты связности. Если же $Q \cap \Omega$ состоит из счётного числа компонент связности, то надо применить этот аргумент к каждой из них.

Итого, мы показали, что

$$\oint\limits_{\partial\Omega} g(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

если стандартная область Ω ограничена.

(2) Пусть $w \in \Omega, \varepsilon > 0$ таково, что $\overline{B(w,\varepsilon)} \in \Omega$. Очевидно, что $\Omega' = \Omega \setminus \overline{B(w,\varepsilon)}$ — стандартная область, а потому по первому пункту доказательства

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega'} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0,$$

так как отображение $z \mapsto f(z)/(z-w)$ аналитично в Ω и непрерывно в $\overline{\Omega'}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega'} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0 + f(w),$$

что и требовалось. $\not<$

Теорема 4.4 (интегральная теорема Коши для неограниченных стандартных областей). Пусть Ω — стандартная область, причём существует такое $R > 0$, что $C(0,r) \subset \Omega$ для всех $r > R$. Пусть функция f аналитична в Ω, $|f(z)| \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Тогда для всех $w \in \Omega$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z.$$

Доказательство. Рассмотрим множества $\Omega_r = \Omega \cap B(0,r)$, где $r > R$. Для Ω_r можно применить обычную теорему Коши: если $w \in \Omega_r$, то

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega_r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z.$$

При этом

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega_r} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z,$$

и

$$\left|\oint\limits_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{|z|=r}|f(z)| \cdot 2\pi r \cdot O(1/r).$$

Переходя к пределу по $r \to \infty$ получаем требуемое равенство. $\not<$

Как показывает следующий пример, условие про стремление функции к нулю на бесконечности существенно.

Пример 4.1. Для любого $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ выполнено равенство

$$\int\limits_{C(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z - w} = 0.$$

Иллюстрация к использованию интегральных представлений для функций.

Теорема 4.5 (Монтель). Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитические функции для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть для любого $z \in \Omega$ существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$, что

$$\sup_{\substack{w \in B(z,\varepsilon(z)) \\ w \in \Omega,\, n \in \mathbb{N}}} |f_n(w)| < \infty.$$

Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ и функция f, аналитическая в Ω, что f_{n_k} сходится к f равномерно на компактах в Ω.

Доказательство. Рассмотрим всюду плотное счётное подмножество $\{z_k\} \subset \Omega$. Обозначим $\varepsilon_k := \varepsilon(z_k)$, будем считать, что $\overline{B(z_k, \varepsilon_k)} \subset \Omega$. Покажем, что существует подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$, сходящаяся в $B(z_k, \varepsilon_k/2)$. Для любой аналитической функции g в Ω и точки $w \in B(z_k, \varepsilon_k)$ имеем (по интегральной теореме Коши)

$$\begin{aligned} g'(w) &= \lim_{\xi \to 0} \frac{g(w + \xi) - g(w)}{\xi} \\ &= \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_k,\varepsilon_k)} g(z) \frac{\dfrac{1}{z - (w + \xi)} - \dfrac{1}{z - w}}{\xi} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_k,\varepsilon_k)} \frac{g(z)}{(z - w)^2} \,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Значит, для всех w таких, что $|w - z_k| = \varepsilon_k/2$, выполнено

$$|f_n'(w)| \leqslant \frac{1}{2\pi i} \cdot \sup_{\substack{z \in B(z_k,\varepsilon_k) \\ n \in \mathbb{N}}} |f_n(z)| \cdot \frac{1}{(\varepsilon_k/2)^2} \cdot 2\pi \, \frac{\varepsilon_k}{2}.$$

Тогда $|f_n'(w)| \leqslant C_k$ для некоторого C_k и любого $n \in \mathbb{N}$. По принципу максимума имеем $|f_n'(w)| \leqslant C_k$ для всех $w : |w - z_k| \leqslant \varepsilon_k/2$. Значит, $\{f_n\}$ — семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций из $\overline{B(z_k, \varepsilon_k/2)}$ в $\mathbb{C}$. По теореме Арцела – Асколи, существует подпоследовательность, сходящаяся равномерно на $\overline{B(z_k, \varepsilon_k/2)}$.

Используя канторовский диагональный процесс, выберем подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$, сходящуюся равномерно в каждом шаре $B(z_k, \varepsilon_k/2)$ (и, как следствие, в любом компакте, так как он накрывается всеми такими шарами вообще в силу непрерывности $\varepsilon(z)$, а в силу компактности имеет конечное покрытие шарами). Пусть её предел — f. Для любого компакта K в Ω существует конечное число шаров $B(z_k, \varepsilon_k/2)$, покрывающих K. Значит, $f_{n_k} \rightrightarrows f$ на K. В частности, функция f аналитична в Ω. $\not\prec$

5 Ряды Лорана

Соглашение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, f_n — аналитические функции в Ω. Будем говорить, что ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(z)$ *сходится в* Ω, если в ней сходятся ряды $\sum_{n\geqslant 0} f_n(z)$ и $\sum_{n<0} f_n(z)$.

Теорема 5.1. Пусть $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$,

$$\Omega_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

f аналитична в $\Omega_{r,R}(z_0)$. Тогда существуют такие $c_n \in \mathbb{C}$, где $n \in \mathbb{Z}$, что

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.1}$$

причём ряд (5.1) сходится равномерно на компактах в $\Omega_{r,R}(z_0)$. Более того,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}\, \mathrm{d}z,$$

где $\rho \in (r, R)$. Если

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c'_n (z - z_0)^n,$$

то $c_n = c'_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Определение. Ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ называется *рядом Лорана* функции f в $\Omega_{r,R}(z_0)$.

Во многих случаях ряд Лорана заменяет ряд Тейлора. Примеры областей, в которых аналитическая функция имеет ряд Лорана: $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \Omega_{0,+\infty}(0)$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \Omega_{1,+\infty}(0)$, и так далее.

Доказательство теоремы. Будем считать, что $z_0 = 0$ — иначе можно рассмотреть функцию $z \mapsto f(z + z_0)$ в кольце $\Omega_{r,R}(0)$. $\Omega_{r',R'}(0)$ — стандартная область для всех r', R', удовлетворяющих условиям $r < r' < R' < R$. По интегральной теореме Коши,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\Omega_{r',R'}(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}} \frac{f(\xi)}{z(1 - \xi/z)}\, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}} \frac{f(\xi)}{\xi(1 - z/\xi)}\, \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Заметим, что если $\xi \in C_{r'}$, $|z| = \mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r} \in (r', R')$, то $|\xi/z| = r'/\mathfrak{r} < 1$. Если $\xi \in C_{R'}$, то $|z/\xi| = \mathfrak{r}/R' < 1$. Продолжим равенство:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r'}}\frac{f(\xi)}{z(1-\xi/z)}\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{\xi(1-z/\xi)}\,\mathrm{d}\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{C_{r'}}\frac{f(\xi)}{z}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{\xi}{z}\right)^k\mathrm{d}\xi\right)+\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{\xi}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z}{\xi}\right)^k\mathrm{d}\xi\right),$$

причём ряды в последнем выражении сходятся равномерно на окружности $|z| = \mathfrak{r}$. Значит, можно поменять местами сумму и интеграл, заменить в левой части k на $-k-1$ и получить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{C_{r'}}\frac{f(\xi)}{z}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{\xi}{z}\right)^k\mathrm{d}\xi\right)+\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{\xi}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z}{\xi}\right)^k\mathrm{d}\xi\right)=$$
$$=\sum_{k<0}z^k\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r'}}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi+\sum_{k\geqslant 0}z^k\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{R'}}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi. \quad (5.2)$$

Так как для любого $k \in \mathbb{Z}$ функция $f(\xi)/\xi^{k+1}$ аналитична в $\Omega_{r,R}(0)$, то для любого $\rho \in (r, R)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{r'}}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{\rho}}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C'_{R}}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Значит, (5.2) — искомое разложение в ряд Лорана. Из доказательства видно, что ряд Лорана сходится равномерно в любом кольце $\Omega_{r_1,r_2}(0)$, где $r < r_1 < r_2 < R$. Значит, ряд Лорана сходится на компактах в $\Omega_{r,R}(0)$.

Пусть $\sum c_n z^n = \sum c'_n z^n$ в $\Omega_{r,R}(0)$, $\rho \in (r, R)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{\rho}}\frac{\sum c_n\xi^n}{\xi^{k+1}}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{\rho}}\frac{\sum c'_n\xi^n}{\xi^{k+1}}.$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_{\rho}}\xi^m\,\mathrm{d}\xi=\begin{cases}1, & m=-1,\\ 0, & m\neq -1.\end{cases}$$

Для всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\oint\limits_{C_{\rho}}\xi^m\,\mathrm{d}\xi=\int\limits_0^{2\pi}\rho^m e^{imt}\cdot i\rho^{it}\,\mathrm{d}t.$$

$\not<$

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Если функция f определена и аналитична в $\Omega \setminus \{z_0\}$, то точка z_0 называется *изолированной особой точкой* f.

Определение. Точка $z_0 \in \Omega$ называется:

- *устранимой особой точкой* функции f, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{z \in B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}} |f(z)| < \infty;$$

- *полюсом* функции f, если существует предел

$$\lim_{z\to z_0,\, z\neq z_0} |f(z)| = +\infty;$$

- *существенно особой* точкой функции f, если не существует предела

$$\lim_{z\to z_0,\, z\neq z_0} |f(z)|.$$

Теорема 5.2. Для изолированной особой точки $z_0 \in \Omega$ следующие условия равносильны:

(1) z_0 — устранимая особая точка функции f;

(2) существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0,\, z\neq z_0} |f(z)|$;

(3) $f = \sum_{n\geqslant 0} c_n (z - z_0)^n$.

Доказательство.

$(2), (3) \implies (1)$. Очевидно.

$(1) \implies (2), (3)$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in C(\Omega)$; форма $g\,\mathrm{d}z$ замкнута в $\Omega \setminus \{z_0\}$, так как функция $f(z)$ аналитична в $\Omega \setminus \{z_0\}$. Значит, по лемме об устранении особенности для дифференциальных форм $g\,\mathrm{d}z$ замкнута в Ω. По теореме Коши – Гурса – Морера функция g аналитична в Ω. Поскольку $g(z_0) = 0$,

$$g(z) = \sum_{n\geqslant 1} c_n (z - z_0)^n.$$

Значит,

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_{n+1} (z - z_0)^n, \qquad (\forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}).$$

Отсюда видно, что предел $\lim\limits_{z\to z_0,\, z\neq z_0} f(z)$ существует; и функция f, доопределённая значением $f(z_0)$ в z_0, является аналитичной. $\not<$

Пример 5.1. Ноль — устранимая особая точка функции $\sin z/z$, заданной в $\Omega \setminus \{0\}$.

Замечание. Мы доказали, что если f аналитична в $\Omega \setminus \{z_0\}$, и существует предел $\lim_{z\to z_0} f(z)$, то f доопределяется значением $f(z_0)$ в точке z_0, и при этом получается аналитическая функция.

Определение. Пусть $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ — аналитична, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ — её разложение в ряд Лорана в кольце $\Omega_{0,\varepsilon}(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_0\}$. Тогда сумма $\sum_{n<0} c_n(z-z_0)^n$ называется *главной частью* ряда Лорана функции f *в окрестности точки* z_0.

Если f аналитична в кольце $\Omega_{\varepsilon,+\infty}(z_0)$, и $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ — её разложение в ряд Лорана в $\Omega_{\varepsilon,+\infty}(z_0)$, то *главной частью* ряда Лорана f *в окрестности* ∞ называется ряд $\sum_{n>0} c_n(z-z_0)^n$.

Замечания.

1. Главная часть ряда Лорана — это либо $\sum_{n<0}$, либо $\sum_{n>0}$, в зависимости от того, какая из этих сумм не ограничена в окрестности z_0.

2. Если f имеет устранимую особенность в точке z_0, то главная часть её ряда Лорана равна нулю.

Теорема 5.3. Пусть z_0 — изолированная особая точка аналитической функции $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Следующие условия равносильны:

(1) z_0 — полюс f;

(2) $f = \sum_{n\geqslant -N}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, причём $N \geqslant 1$ и $c_{-N} \neq 0$.

Когда выполнено условие (2), говорят, что f имеет в точке z_0 *полюс порядка* N. Полюса порядка 1 также называются *простыми полюсами*.

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Рассмотрим функцию $g(z) = 1/f(z)$ в шаре $B(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$, где $\varepsilon > 0$, $|f(z)| > 1$ в $B(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$ и $B(z_0,\varepsilon) \subset \Omega$. Такое ε существует, так как $|f(z)| \to +\infty$ при $z \to z_0$. Функция g имеет устранимую особенность в точке z_0, поэтому

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^N h(z),$$

где $N \geqslant 1$,[14] $h(z) \neq 0$ в шаре $B(z_0,\eta)$, $0 < \eta < \varepsilon$. Значит,

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} \frac{1}{(z-z_0)^N} = \frac{\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n}{(z-z_0)^N},$$

так как функция $1/h$ аналитична в $B(z_0,\eta)$, и поэтому раскладывается в этой области в ряд $\sum a_n(z-z_0)^n$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{k\geqslant -N}^{\infty} a_{k+N}(z-z_0)^k,$$

и из единственности разложения в ряд Лорана следует, что $a_{k+N} = c_k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$.

[14] N — это просто кратность нуля функции g.

(2) $\implies$ (1). Если есть такое разложение, то

$$|f(z)| \sim \frac{|c_{-N}|}{|z - z_0|^N} \qquad \text{при } z \to z_0,$$

а последнее число стремится к бесконечности. $\not<$

Таким образом, z_0 — это полюс f тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана в окрестности z_0 имеет лишь конечное число слагаемых.

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналогичный критерий для $z_0 = \infty$.

Теорема 5.4. Пусть z_0 — изолированная особая точка аналитической функции $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Следующие условия равносильны:

(1) z_0 — существенно особая точка;

(2) $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z - z_0)^n$, причём для любого $N \in \mathbb{N}$ найдётся такое $m \geqslant N$, что $c_{-m} \neq 0$.

Доказательство. Очевидным образом следует из предыдущих двух теорем. $\not<$

Теорема 5.5 (Сохоцкий). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $z_0 \in \Omega$, функция $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ аналитична и имеет существенную особенность в z_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{Cl} f\big(B(z_0, \varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{z_0\})\big) = \mathbb{C}.$$

Другими словами, в любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает плотное множество значений.

Доказательство. Можно считать, что $B(z_0, \varepsilon) = \Omega$. Предположим, что

$$\operatorname{Cl} f(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}) \neq \mathbb{C}.$$

Тогда существует такая точка $w \in \mathbb{C}$, что $|w - f(z)| > \eta > 0$ для всех $z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Значит, $h(z) = 1/(f(z) - w)$ — аналитическая в $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ функция; z_0 — устранимая особая точка h, так как $|h| \leqslant 1/\eta$. Следовательно,

$$\frac{1}{f(z) - w} = h(z) = (z - z_0)^m g(z), \qquad \text{где } m \geqslant 0,\ m \in \mathbb{Z},$$

причём $g(z) \neq 0$ в $B(z_0, \varepsilon)$. Тогда

$$f(z) - w = \frac{1}{(z - z_0)^m g(z)},$$

то есть

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^m g(z)}.$$

Значит, существует предел

$$\lim_{z\to z_0,\, z\neq z_0} |f(z)| \in [0, +\infty].$$

Однако тогда z_0 — либо полюс, либо устранимая особая точка. Противоречие. $\not<$

На самом деле, верна ещё более сильная теорема.

Теорема 5.6 (Пикар). В любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает все значения, кроме, возможно, одного.

Доказательство. (пока без доказательства) $\not<$

Определение. Пусть $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, где $z_0 \in \Omega$. *Вычетом f в точке z_0* называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана f в окрестности z_0. Вычет обозначается следующим образом: $\operatorname{res}_{z_0} f$ (от слова *residue*).

Определение. *Вычетом в бесконечности* функции f, аналитичной в некотором кольце $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, называется коэффициент $-c_{-1}$ её ряда Лорана в этом кольце. Он обозначается как $\operatorname{res}_\infty f$.

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $E \subset \Omega$ — дискретное подмножество Ω[15]. Функция $f\colon \Omega \setminus E \to \mathbb{C}$ называется *мероморфной в* Ω, если она аналитична, и в каждой точке E у f полюс. Если $\Omega = \mathbb{C}$, то f называется просто *мероморфной* функцией.

Пример 5.2. Если p_1, p_2 — многочлены, то p_1/p_2 — мероморфная функция в $\mathbb{C}$, где

$$E = \{z \in \mathbb{C} : p_2(z) = 0\}.$$

Теорема 5.7 (теорема Коши о вычетах). Пусть Ω — стандартная ограниченная область, f — мероморфная в Ω функция с конечным множеством особенностей E. Пусть $f \in C(\overline{\Omega} \setminus E)$, тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z\in E} \operatorname{res}_z f.$$

Доказательство. Рассмотрим область $\widetilde{\Omega} = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^N B_k$, где $N = |E|$, $B_k = B_k(z_k, \varepsilon_k)$, $B_k \cap B_j = \varnothing$ для всех $k \neq j$; $\overline{B}_k \subset \Omega$ для всех k, $z_k \in E$. Ясно, что $\widetilde{\Omega}$ — стандартная ограниченная область, и f аналитична в $\widetilde{\Omega}$. Значит, по интегральной теореме Коши

$$\oint\limits_{\partial\widetilde{\Omega}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

С другой стороны,

$$\oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\partial\widetilde{\Omega}} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^N \oint\limits_{\partial B_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Осталось показать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial B_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{res}_{z_k} f.$$

[15]То есть подмножество Ω, не содержащее предельных точек E.

Действительно,
$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n,$$
причём этот ряд сходится абсолютно на окружности ∂B_k. Значит,
$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial B_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial B_k} (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z.$$

Обозначим слагаемые (без c_n) в правой части через A_n. Ясно, что
$$A_n = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 1, & n = -1. \end{cases}$$

Следовательно,
$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial B_k} f(z)\,\mathrm{d}z = c_{-1} = \operatorname{res}_{z_k} f,$$
что и требовалось. $\not<$

Упражнение. Сформулировать и доказать теорему Коши о вычетах для неограниченных стандартных областей.

Теорема 5.8. Пусть f мероморфна в $\mathbb{C}$ и имеет конечное множество E особых точек в $\mathbb{C}$. Тогда
$$\sum_{z_k\in E} \operatorname{res}_{z_k} f + \operatorname{res}_\infty f = 0.$$

Доказательство. Выберем $R > 0$ так, чтобы E содержалось в $B(0, R)$. Тогда
$$0 = \oint\limits_{\partial B(0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{\partial(\mathbb{C}\setminus\overline{B(0,R)})} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

При этом по предыдущей теореме
$$\oint\limits_{\partial B(0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z_k\in E} \operatorname{res}_{z_k} f,$$
и
$$\oint\limits_{\partial(\mathbb{C}\setminus\overline{B(0,R)})} f(z)\,\mathrm{d}z = -\oint\limits_{\partial B(0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname{res}_\infty f,$$
откуда следует требуемое равенство. $\not<$

Применим теорему Коши о вычетах к функции $f\colon z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ в области
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < r\}.$$

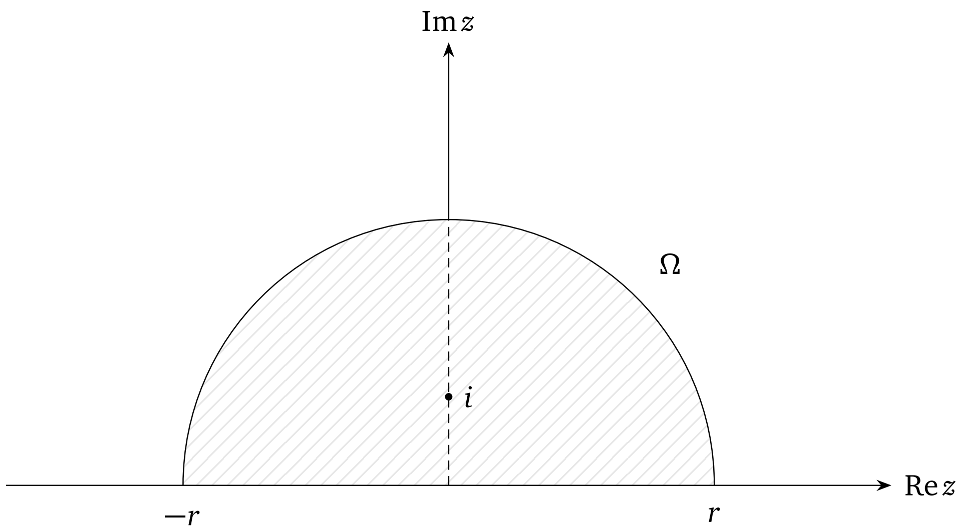


Рис. 9: Область Ω

В этой области наша функция имеет всего один полюс — точку $z = i$, и он первого порядка. Таким образом,

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{res}_i\, f = \frac{2\pi i}{2i} = \pi,$$

так как в окрестности $z = i$ функция f имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)}\left(\frac{1}{2i} + O(z-i)\right).$$

С другой стороны, интеграл по $\partial\Omega$ складывается из интеграла по отрезку $[-r, r]$ и интеграла по полуокружности $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Im}\, z > 0, |z| = r\}$. Заметим, что

$$\left|\int\limits_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{z\in\gamma_r} |f(z)| \leqslant \frac{\pi r}{r^2-1} \to 0, \qquad r \to +\infty.$$

Значит,

$$\pi = \oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to+\infty}\left(\oint\limits_{\gamma_r} + \int\limits_{-r}^{r}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

Таким образом, мы убедились, что с помощью теоремы Коши о вычетах можно посчитать интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \pi.$$

Попробуем применить наши знания для вычисления интеграла Дирихле:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

Если мы станем действовать как раньше, нам встретятся две проблемы:

- полюс функции $g = \sin z/z$ лежит на границе стандартной области Ω, а не внутри неё;
- функция g очень велика на окружности γ_R, и непонятно, почему $\int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z$ будет стремиться к нулю с ростом R.

Чтобы преодолеть эти трудности, нам понадобятся два утверждения: лемма о полувычете и лемма Жордана.

Лемма 5.9 (лемма о полувычете). Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — мероморфная функция с простым полюсом в точке $\lambda \in \Omega$, и пусть

$$\gamma_\varepsilon(\lambda) = \{\lambda + \varepsilon e^{it},\ t \in [0, \pi]\}$$

— полуокружность с центром в точке λ радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\varepsilon(\lambda)} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{res}_\lambda f}{2}.$$

Доказательство. По предположению, λ — простой полюс функции f. Рассматривая разложение f в ряд Лорана в малом кольце $\widetilde{\Omega}$ с центром в точке λ, видим, что

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-\lambda} + g(z), \qquad z \in \widetilde{\Omega},$$

где функция g аналитична в $\widetilde{\Omega} \cup \{\lambda\}$. Значит,

$$\oint_{\gamma_\varepsilon(\lambda)} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_\varepsilon(\lambda)} \frac{c_{-1}\,\mathrm{d}z}{z-\lambda} + \oint_{\gamma_\varepsilon(\lambda)} g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Заметим, что из локальной ограниченности функции g следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{\gamma_\varepsilon(\lambda)} g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Поэтому нам осталось вычислить лишь

$$\oint_{\gamma_\varepsilon(\lambda)} \frac{c_{-1}\,\mathrm{d}z}{z-\lambda} = \int_0^\pi \frac{c_{-1}\varepsilon i e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\,\mathrm{d}t = \pi i c_{-1} = \pi i \,\mathrm{res}_\lambda f.$$

Отсюда легко получить требуемую формулу. $\not<$

Лемма 5.10 (лемма Жордана). Пусть $f\colon \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция со свойством

$$\lim_{r\to+\infty} \max_{z\in\gamma_r} |f(z)| = 0, \qquad \text{где } \gamma_r = \{re^{it} : t \in [0,\pi]\}.$$

Тогда для любого $a > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{r\to+\infty} \left| \oint\limits_{\gamma_r} e^{iaz} f(z)\,\mathrm{d}z \right| = 0.$$

Доказательство. По определению,

$$\oint\limits_{\gamma_r} e^{iaz} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi e^{iare^{it}} f(re^{it})\, ire^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Так как $|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z}| = e^{\operatorname{Re} z}$ для любого комплексного числа z, то

$$|e^{iare^{it}}| = |e^{iar(\cos t + i\sin t)}| = e^{-ar\sin t}.$$

Вводя обозначение $M_r = \sup_{z\in\gamma_r} |f(z)|$, получаем оценку

$$\left|\oint\limits_{\gamma_r} e^{iaz} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant rM_r \int\limits_0^\pi e^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t = 2rM_r \int\limits_0^{\pi/2} e^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Вспомним, что $\sin t \geqslant 2t/\pi$ на промежутке $[0,\pi/2]$. Значит,

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2art/\pi}\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_0^{\infty} e^{-2art/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2ar}.$$

Собирая всё вместе, получаем оценку

$$\left| \oint\limits_{C_r} e^{iaz} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{2rM_r\pi}{2ar} = \frac{M_r\pi}{a},$$

что стремится к нулю с ростом r. $\not<$

Определение. Пусть $f\colon E \to \mathbb{C}$ — измеримая функция на измеримом подмножестве $E \subset \mathbb{R}$, и пусть $f \in L^1(E_\varepsilon(x_0))$ для любого $\varepsilon > 0$, где

$$E_\varepsilon = \{x \in E : \ |x - x_0| \geqslant \varepsilon\}.$$

Интегралом по множеству E в смысле главного значения (“principal value”) в точке x_0

для функции f называют предел

$$p.v.\int\limits_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{E_\varepsilon(x_0)} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

в случае, если он существует.

Ясно, что если $x_0 \notin \overline{E}$ или если функция f суммируема в окрестности точки x_0, то

$$p.v.\int\limits_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

С другой стороны,

$$p.v.\int\limits_{-1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \log 2,$$

в то время как функция $1/x$ не интегрируема по Лебегу на $[-1,2]$. Определение допускает естественное обобщение на случай, когда f имеет несколько “особых точек” x_0, а также на случай, когда $x_0 = \infty$ (в этом случае рассматривается предел интегралов по отрезкам $[-R,R]$, где $R \to +\infty$).

Теперь всё готово, чтобы посчитать интеграл $\int_{\mathbb{R}} \sin x/x\,\mathrm{d}x$.

Утверждение 5.11. Значение интеграла Дирихле:

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Доказательство. Рассматриваемый интеграл сходится по признаку Дирихле. Значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = p.v.\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(p.v.\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right). \tag{5.3}$$

Возьмём число $r > 0$ и рассмотрим стандартную область

$$\Omega_r = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0, |z| \in (1/r, r)\right\}.$$

(см. рисунок 10)

Как и ранее, обозначим через γ_r полуокружность радиуса r с центром в начале координат, лежащую в верхней полуплоскости. По теореме Коши о вычетах,

$$\oint\limits_{\Omega_r}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

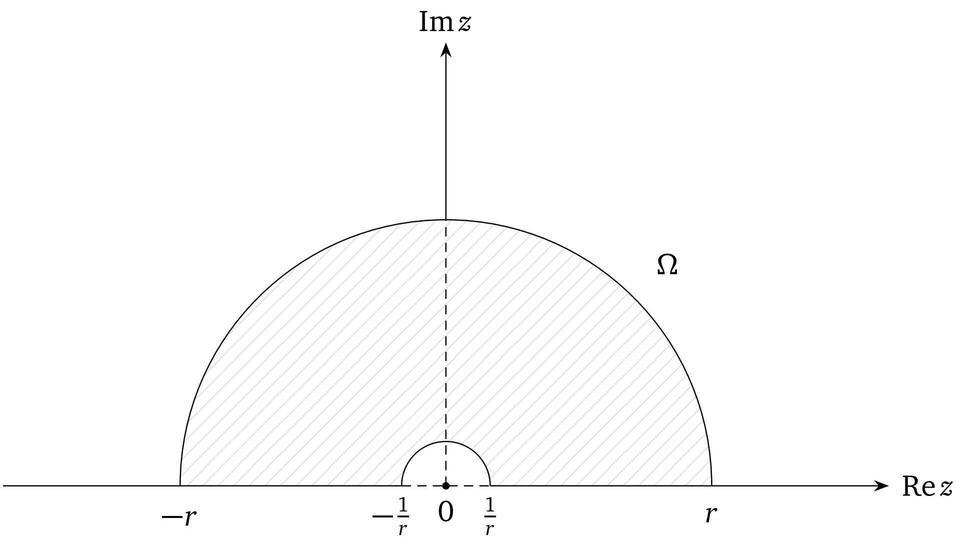


Рис. 10: Область Ω_r

С другой стороны,

$$\oint\limits_{\Omega_r} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r}^{-1/r} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x - \oint\limits_{\gamma_{1/r}} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{r}^{1/r} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

По лемме Жордана,

$$\lim_{r\to+\infty} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

По лемме о полувычете,

$$\lim_{r\to+\infty} \oint\limits_{\gamma_{1/r}} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}z = \pi i \operatorname{res}_0 \frac{e^{ix}}{x} = \pi i.$$

Значит,

$$0 = \operatorname{Im}\left(-\pi i + \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{[-r,1/r]\cup[1/r,r]} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right),$$

откуда мы получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(p.v. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \pi,$$

что и требовалось. $\not<$

Замечание. Вместо того, чтобы проверять, почему справедливо второе равенство в формуле (5.3), можно было взять мнимую часть обеих частей в формуле (5.4) и перейти к пределу. Этот способ проще (не надо проверять существование главного значения интеграла по $\mathbb{R}$ от функции e^{ix}/x), хотя при первом знакомстве выглядит несколько менее естественно.

6 Принцип аргумента и теорема Руше

Определение. Пусть $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ — кусочно-гладкий путь в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, и пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Предположим, что $f(\gamma(t)) \neq 0$ при любом $t \in [0,1]$. *Ветвью аргумента функции f вдоль пути γ* назовём непрерывную функцию $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, обладающую следующим свойством:

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{i\psi(t)}, \qquad t \in [0,1].$$

Изменением аргумента f вдоль пути γ называется число

$$\Delta_\gamma \arg f = \psi(1) - \psi(0).$$

Пример 6.1. Если область Ω односвязна, а функция f не имеет нулей в Ω, то, как мы уже знаем, во всей области Ω определена ветвь аргумента

$$\arg f = \operatorname{Im} \log f$$

функции f. В этом случае в качестве аргумента вдоль любого пути γ в Ω можно взять функцию $\psi\colon t \mapsto (\arg f)(\gamma(t))$. Действительно, равенство

$$f(z) = |f(z)|e^{i(\arg f)(z)}$$

выполнено всюду в области Ω, а значит,

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{i(\arg f)(\gamma(t))} = |f(\gamma(t))|e^{i\psi(t)}, \qquad t \in [0,1].$$

Отметим также, что если путь γ замкнут (скажем, $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$), то

$$\Delta_\gamma \arg f = \psi(1) - \psi(0) = (\arg f)(z_0) - (\arg f)(z_0) = 0.$$

Пример 6.2. Пусть n — натуральное число, рассмотрим функцию $f\colon z \mapsto z^n$ в области $\Omega = \mathbb{C}$ и путь $\gamma\colon t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда в качестве аргумента f вдоль γ можно взять функцию $\psi\colon t \mapsto nt$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$f(\gamma(t)) = (e^{it})^n = e^{int} = e^{i\psi(t)} = |f(\gamma(t))|e^{i\psi(t)}.$$

Заметим, что с одной стороны,

$$\Delta_\gamma \arg f = \psi(2\pi) - \psi(0) = 2\pi n,$$

а с другой стороны, n — это кратность нуля функции f в единичном круге.

Замечание. В обоих примерах оказалось, что изменение аргумента связано с количеством (с учётом кратности) нулей функции f в области, которую обходит путь γ. За этим стоит общий принцип — *принцип аргумента*, который будет доказан в этом параграфе.

Утверждение 6.1. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ — кусочно-гладкий путь, причём $f(\gamma(t)) \neq 0$ для любого $t \in [0,1]$. Тогда

(1) существует ψ — непрерывная ветвь $\arg f$ вдоль пути γ;

(2) если φ — другая непрерывная ветвь $\arg f$, то $\psi(t) - \varphi(t) \equiv 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ и всех $t \in [0,1]$;

(3) $\Delta_\gamma \arg f$ не зависит от выбора ветви $\arg f$, и, более того,

$$\Delta_\gamma \arg f = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Доказательство. Идея доказательства пункта (1) заключается в разбиении пути γ на настолько мелкие части, что каждый из кусков содержится в односвязной области. В ситуации, изображённой на рисунке 11, можно обойтись тремя областями. Каждая из них будет содержать участок пути соответствующего цвета, но не будет содержать "лакун" в области Ω (выкинутых кругов) и нулей функции f (они на картинке обозначены точками).

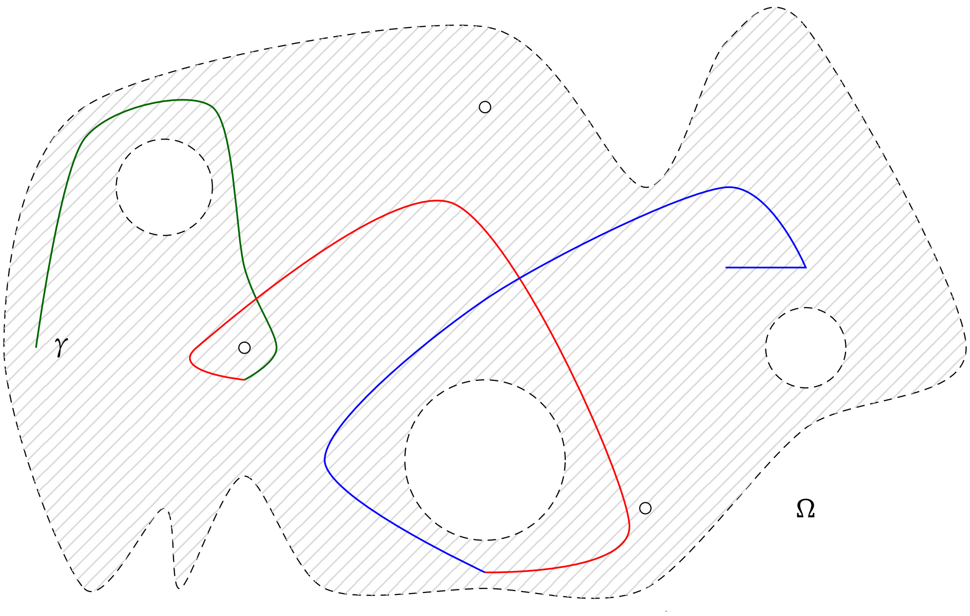


Рис. 11: Разбиение пути γ на 3 части

Запишем это формально. Используя компактность интервала $[0,1]$, можно разделить его на конечное число отрезков $[t_n, t_{n+1}]$ так, чтобы их образы $\gamma([t_n, t_{n+1}])$ содержались в областях $\Omega_n \subset \Omega$ со следующими свойствами:

(a) Ω_n — односвязна;

(b) $f(z) \neq 0$ для любого $z \in \Omega_n$.

Из примера (6.1) теперь следует, что для любого n существует ветвь аргумента ψ_n функции f вдоль пути $\gamma_n = \gamma|_{[t_n,t_{n+1}]}$. Определим $\psi(t) = \psi_0(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$. Выберем $k_1 \in \mathbb{Z}$ так, что бы было выполнено равенство $\psi(t_1) = \psi_1(t_1) + 2\pi k_1$, и определим ψ на $[t_1, t_2]$ формулой $\psi(t) = \psi_1(t) + 2\pi k_1$. Продолжая этот процесс по индукции, за конечное число шагов мы определим ψ на всем промежутке $[0, 1]$. По построению, полученная функция будет непрерывной ветвью $\arg f$ вдоль пути γ.

Пункт (2) следует из того, что непрерывная функция на связном топологическом пространстве, принимающая целочисленные значения, постоянна.

Докажем утверждение (3). В силу пункта (2), $\Delta_\gamma \arg f$ не зависит от выбора ветви $\arg f$. Кроме того, из определения $\Delta_\gamma \arg f$ следует, что

$$\Delta_\gamma \arg f = \sum_n \Delta_{\gamma_n} \arg f.$$

Значит, достаточно проверить, что

$$\Delta_{\gamma_n} \arg f = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z.$$

Выберем ветвь $\log f$ в Ω_n и возьмём отображение $\psi \colon t \mapsto \operatorname{Im} \log f(\gamma_n(t))$ в качестве ветви $\arg f$ вдоль γ_n. Тогда

$$\Delta_{\gamma_n} \arg f = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \psi'(t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \operatorname{Im} \frac{f'(\gamma_n(t))}{f(\gamma_n(t))}\, \gamma_n'(t)\, \mathrm{d}t = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z.$$

Утверждение доказано. $\nprec$

Упражнение. Проверьте, что функция

$$\psi \colon t \mapsto c + \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma|[0,t]} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z$$

является ветвью аргумента функции f при правильном выборе постоянной c.

Пример 6.3. Пусть γ — единичная окружность, проходимая против часовой стрелки, а $f(z) = z^n$. Тогда

$$\Delta_\gamma \arg f = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \operatorname{Im} \left(n \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right) = n \operatorname{Im}(2\pi i) = 2\pi n,$$

как мы уже видели в примере (6.2).

Пример 6.4. Пусть γ — единичная окружность, проходимая против часовой стрелки, а $f(z) = e^{1/z}$. Тогда

$$\operatorname{Im}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \operatorname{Im}\left(-\int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right) = 0.$$

С другой стороны, для $z = e^{it}$ имеем

$$e^{1/z} = e^{e^{-it}} = e^{\cos t - i\sin t},$$

откуда получаем, что $\psi\colon t \mapsto -\sin t$ — ветвь аргумента f. Как и ожидалось,

$$\Delta_\gamma \arg f = -\sin 2\pi + \sin 0 = 0.$$

Обозначение. Пусть функция f мероморфна в области Ω и имеет в ней конечное число нулей $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ и полюсов $\{p_k\}_{k=n+1}^{n+m}$. Пусть j_k обозначает кратность нуля z_k или полюса p_k для каждого номера k. Числа

$$N_f = \sum_{k=1}^{n} j_k, \qquad P_f = \sum_{k=n+1}^{n+m} j_k,$$

будем называть *общей кратностью нулей* и *полюсов* функции f в Ω соответственно.

Обозначение. Для всякого числа $\delta > 0$ будем называть *δ-окрестностью множества $S \subset \mathbb{C}$* область $S_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, S) < \delta\}$.

Обозначение. Если Ω — стандартная область, а функция f аналитична в δ-окрестности $\partial\overline{\Omega}$, положим

$$\Delta_{\partial\Omega} \arg f = \sum_{k} \Delta_{\gamma_k} \arg f,$$

где γ_k — кусочно-гладкие пути, составляющие границу $\partial\overline{\Omega}$, при обходе вдоль которых область Ω остаётся слева.

Теорема 6.2 (принцип аргумента). Пусть Ω — ограниченная стандартная область, функция f мероморфна в Ω_δ и имеет конечное число особых точек, каждая из которых является полюсом. Если $\partial\overline{\Omega}$ не содержит нулей и полюсов функции f, то

$$\Delta_{\partial\Omega} \arg f = 2\pi(N_f - P_f),$$

где N_f — суммарная кратность нулей, а P_f — суммарная кратность полюсов функции f в Ω.

Доказательство. Из утверждения 6.1 следует, что нам достаточно доказать равенство

$$\operatorname{Im}\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi(N_f - P_f).$$

Обозначим через Z и E множества нулей и полюсов функции f в Ω соответственно. Функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ мероморфна в Ω, имеет конечное множество особых точек $Z \cup E$ в Ω, а также непрерывна на множестве $\overline{\Omega} \setminus (Z \cup E)$. По теореме Коши о вычетах,

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{w_k \in Z \cup E} \operatorname{res}_{w_k}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

В окрестности каждого своего нуля $z_k \in Z$ кратности j_k функция f имеет вид $f(z) = (z - z_k)^{j_k} g(z)$, где $g(z) \neq 0$. Значит,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{j_k (z - z_k)^{j_k - 1} g(z) + (z - z_k)^{j_k} g'(z)}{(z - z_k)^{j_k} g(z)} = \frac{j_k}{z - z_k} + h(z),$$

где h — аналитическая функция. Отсюда следует, что,

$$\operatorname{res}_{z_k}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = j_k.$$

Аналогично проверяется, что

$$\operatorname{res}_{p_k}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -j_k,$$

если $p_k \in E$. Суммируя по k и переходя к мнимой части, получаем требуемое равенство. $\not<$

Теорема 6.3 (теорема Руше). Пусть Ω — ограниченная стандартная область, f, g — аналитические функции в Ω_δ, причём $|g| < |f|$ всюду на $\partial\overline{\Omega}$.[16] Тогда $N_f = N_{f+g}$.

Доказательство. Из принципа аргумента следует, что достаточно проверить равенство

$$\Delta_\gamma \arg(f + g) = \Delta_\gamma \arg f$$

вдоль любого замкнутого (как путь) куска γ границы $\partial\Omega$. Заметим, что отображение $1 + g/f$ не обнуляется на $\partial\Omega$. Если $\arg f$ и $\arg(1 + g/f)$ — ветви аргумента соответствующих функций вдоль пути γ, то $\arg f + \arg(1 + g/f)$ является ветвью аргумента функции $f + g$ вдоль γ:

$$|f + g| e^{i(\arg f + \arg(1 + g/f))} = |f + g| \cdot \frac{f}{|f|} \cdot \frac{1 + g/f}{|1 + g/f|} = f + g.$$

Значит, нам достаточно показать, что

$$\Delta_\gamma \arg(1 + g/f) = 0.$$

Заметим, что для $z \in \gamma([0, 1])$

$$\operatorname{Re}(1 + g(z)/f(z)) \geqslant 1 - |g(z)|/|f(z)| > 0.$$

[16] В частности, $f \neq 0$ на границе.

Значит, функция $\psi = \arg(1 + g/f)$ принимает значения в интервале

$$2\pi k + (-\pi/2, \pi/2) \qquad \text{для некоторого } k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, в формуле

$$\Delta_\gamma \arg(1 + g/f) = \psi(1) - \psi(0) = 2\pi m$$

число $m \in \mathbb{Z}$ таково, что $2\pi|m| \leqslant \pi$, то есть $m = 0$. $\not<$

Пример 6.5. Найдём число корней многочлена $z^{10} + 3z^3 - 1$ в кольце $1 < |z| < 2$. Пусть $f = 3z^3$, $g = z^{10} - 1$. Тогда

$$|f(z)| = 3 > 2 \geqslant |g(z)| \qquad \text{при} \;\; |z| = 1.$$

Отсюда по теореме Руше следует, что многочлен $z^{10} + 3z^3 - 1$ имеет в круге $|z| < 1$ столько же нулей, сколько и многочлен $3z^3$, то есть 3 (с учётом кратности). Далее, возьмём $f = z^{10}$, $g = 3z^3 - 1$. Тогда

$$|f(z)| = 1024 > 25 \geqslant |g(z)| \qquad \text{при} \quad |z| = 2.$$

Значит, многочлен $z^{10} + 3z^3 - 1$ имеет в круге $|z| < 2$ столько же нулей, сколько и многочлен z^{10}, то есть 10. Кроме того, мы выяснили, что на окружности $|z| = 1$ многочлен $z^{10} + 3z^3 - 1$ нулей не имеет. Значит, в кольце $1 < |z| < 2$ есть ровно 7 нулей указанного многочлена с учётом кратности. Они изображены на рисунке 12.

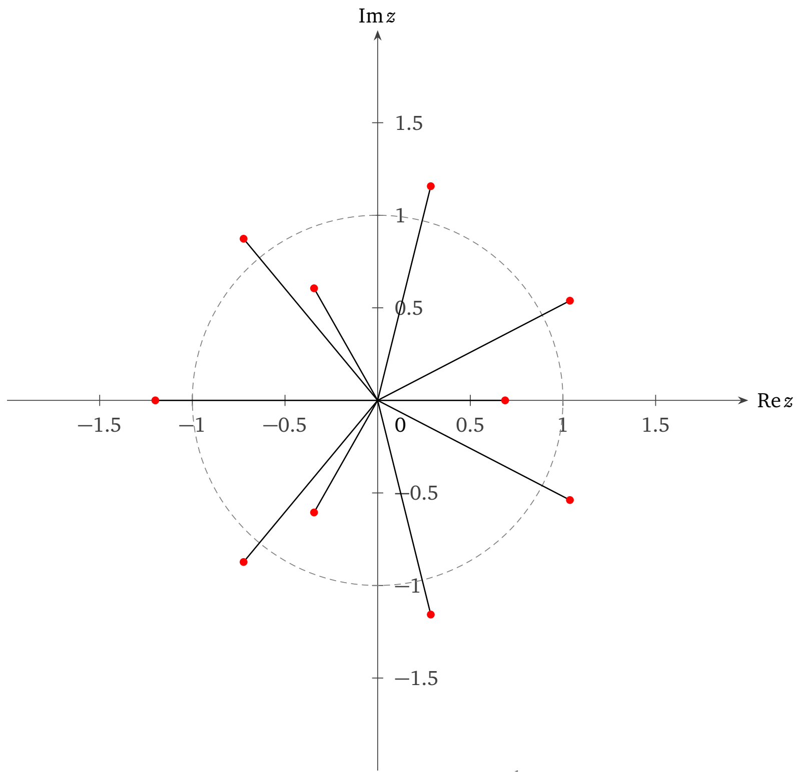


Рис. 12: Корни многочлена $z^{10} + 3z^3 - 1$

Вот ещё одно приложение принципа аргумента.

Теорема 6.4 (теорема Гурвица). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, функции f_k аналитичны в Ω и сходятся равномерно на компактах в Ω к непостоянной функции f. Тогда если $z_0 \in \Omega$ — ноль функции f порядка m, то для любого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что каждая из функций f_k, $k \geqslant N$, имеет в $B(z_0, \delta)$ ровно m нулей с учётом кратности.

Сначала докажем полезную лемму.

Лемма 6.5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, функции f_k аналитичны в Ω и сходятся равномерно на компактах в Ω к функции f. Тогда функция f аналитична и последовательность f_k' сходится равномерно на компактах в Ω к функции f'.

Доказательство. Аналитичность функции f мы доказывали ранее (теорема 2.6). Пусть $z_0 \in \Omega$, рассмотрим круг $B(z_0, 3\delta) \subset \Omega$. Дифференцируя формулу Коши, получаем

$$f_k'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial B(z_0, 2\delta)} \frac{f_k(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w, \qquad w \in B(z_0, \delta).$$

Правая часть сходится равномерно в круге $B(z_0, \delta)$ к числу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial B(z_0, 2\delta)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w = f'(z).$$

Итак, любая точка $z_0 \in \Omega$ имеет окрестность, в которой последовательность f_k' сходится равномерно к функции f'. Отсюда следует, что последовательность f_k' сходится равномерно к функции f' на любом компакте в Ω. $\not<$

Доказательство теоремы Гурвица. Выберем число $\delta_0 > 0$ так, чтобы $B(z_0, \delta_0)$ лежало в Ω, и чтобы для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} &|f(z)| \geqslant \varepsilon > 0, && \text{если } |z - z_0| = \delta, \\ &f(z) \neq 0, && \text{если } |z - z_0| \in (0, \delta], \end{aligned}$$

где ε зависит от δ. Такое число δ_0 существует по теореме 2.8 о виде аналитической функции в окрестности её нуля. Так как функции f_k равномерно на компактах сходятся к функции f, при больших k будет выполнено неравенство

$$|f_k(z)| \geqslant \varepsilon/2, \qquad \text{где } |z - z_0| = \delta.$$

Из предыдущей леммы теперь вытекает, что

$$\oint\limits_{\partial B(z_0, \delta)} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[k \to +\infty]{} \oint\limits_{\partial B(z_0, \delta)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Обозначая через N_{f_k}, N_f количество нулей функций f_k, f в круге $B(z_0, \delta)$, мы получаем из принципа аргумента сходимость целых чисел

$$N_{f_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} N_f.$$

Значит, $N_{f_k} = N_f = m$ начиная с некоторого номера $k = N$. $\not<$

Теорема 6.6. Пусть Ω — область, $f_k\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — набор инъективных аналитических функций. Пусть, кроме того, функции f_k сходятся равномерно на компактах в Ω к некоторой функции f. Тогда f либо постоянна, либо инъективна в области Ω.

Доказательство. Предположим, что f не является инъективной, и рассмотрим такие точки $z, w \in \Omega$, что $f(z) = f(w)$. Тогда функция $g\colon \zeta \mapsto f(\zeta) - f(w)$ обращается в ноль в точках z, w. С другой стороны,

$$g = \lim_{k\to\infty} g_k, \qquad g_k\colon \zeta \mapsto f_k(\zeta) - f_k(w).$$

По теореме Гурвица, либо g (а вместе с ней и f) постоянна, либо начиная с некоторого номера N в окрестности $B(z, \delta) \subset \Omega$ точки z функции g_k будут обращаться в ноль. Тогда существует точка $\xi \in B(z, \delta)$, такая, что

$$f_N(\xi) - f_N(w) = 0.$$

Если $\delta \leqslant |z - w|/3$, то $\xi \neq w$, и это приводит нас к противоречию с инъективностью функции f_N. $\not<$

Теорема 6.7. Пусть Ω — область, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — инъективная аналитическая функция. Тогда функция f' не имеет нулей в области Ω.

Доказательство. Если $f'(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in \Omega$, то по теореме Гурвица при больших $n \geqslant 1$ функции $g_n\colon z \mapsto n(f(z + 1/n) - f(z))$ имеют ноль в области Ω. Это противоречит инъективности функции f. $\not<$

7 Аналитическое продолжение

Определение. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ — аналитические функции; Ω, Ω' — области в $\mathbb{C}$. Если $\Omega \subset \Omega'$ и $f \equiv g$ в области Ω, то функция g называется *аналитическим продолжением* функции f в область Ω'.

Пример 7.1. Функция

$$f\colon z \mapsto z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

определена и аналитична в единичном круге $|z| < 1$, причём указанный ряд имеет радиус сходимости, равный единице. В частности, эта функция не допускает аналитического продолжения ни в какой круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$. С другой стороны, функция $g\colon z \mapsto \log(1+z)$ является аналитическим продолжением f в область $\Omega' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

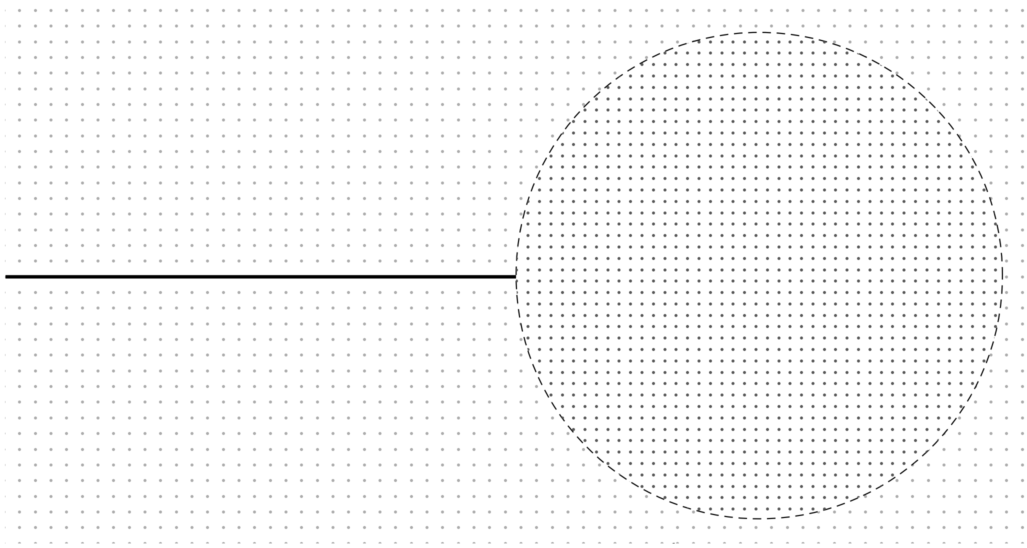


Рис. 13: Продолжение функции f

Лемма 7.1 (лемма о склеивании). Пусть $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство областей в $\mathbb{C}$, для любых индексов $\alpha, \beta \in I$ множество $\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ связно. Пусть функции $f_\alpha\colon \Omega_\alpha \to \mathbb{C}$ аналитичны, и любая пара f_α, f_β из них совпадает на подмножестве, имеющем предельную точку в $\Omega_{\alpha\beta}$, если $\Omega_{\alpha\beta} \neq \varnothing$. Тогда существует функция f, аналитичная в $\bigcup \Omega_\alpha$ и являющаяся аналитическим продолжением каждой из функций f_α.

Доказательство. Каждой точке $z \in \bigcup \Omega_\alpha$ сопоставим индекс $\alpha \in I$ так, чтобы точка z лежала в Ω_α, и определим $f(z) = f_\alpha(z)$. Покажем, что эта функция будет совпадать с f_α во всей области Ω_α. Действительно, если $z \in \Omega_\alpha$, но мы определили $f(z) = f_\beta(z)$ для некоторого индекса $\beta \in I : z \in \Omega_\beta$, значит, $z \in \Omega_{\alpha\beta}$, а в этой области $f_\alpha \equiv f_\beta$ по теореме 2.5 единственности для аналитических функций. $\not<$

Следствие 7.2. На границе круга сходимости степенного ряда есть хотя бы одна точка, в окрестности которой степенной ряд невозможно продолжить аналитически.

Доказательство. Если это не так, то можно применить предыдущее утверждение к исходному кругу сходимости степенного ряда и кругам с центрами на его границе, в которые можно аналитически продолжить степенной ряд. Тогда окажется, что степенной ряд определяет аналитическую функцию в круге с тем же центром, но большего радиуса. По теореме Коши – Гурса – Морера ряд Тейлора этой функции будет сходиться в круге большего радиуса. Но он совпадает с исходным степенным рядом, что приводит нас к противоречию с определением радиуса сходимости. $\not<$

Определение. Функцию $f \in \mathbb{C}^\infty([a,b],\mathbb{C})$ будем называть *вещественно-аналитической*, если для каждой точки $x \in [a,b]$ существует такое число $\delta_x > 0$, что ряд Тейлора для функции f с центром в точке x сходится в круге $B(x,\delta_x)$ и совпадает с f на множестве $B(x,\delta_x) \cap [a,b]$.

Пример 7.2. Функции $\sin x$, e^{ix} являются вещественно-аналитическими на любом отрезке вещественной оси (и вообще на $\mathbb{R}$), а функция e^{-1/x^2} не является вещественно-аналитической на $[-1,1]$,[17] хотя и лежит в классе $C^\infty(\mathbb{R})$.

Теорема 7.3. Пусть $f \in \mathbb{C}^\infty([a,b],\mathbb{C})$. Следующие условия равносильны:

(1) f вещественно-аналитична на $[a,b]$;

(2) существует область $\Omega \subset \mathbb{C}$ и аналитическая функция F, такие, что $[a,b] \subset \Omega$ и $F \equiv f$ на $[a,b]$;

(3) существует такое число $Q \geqslant 0$, что $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leqslant Q^n n!$ для всех $n \geqslant 0$.

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Нужно применить лемму о склеивании: в качестве областей Ω_α можно взять круги $B(\alpha,\delta_\alpha)$ из определения вещественной аналитичности по всем $\alpha \in [a,b]$, в качестве функций f_α — ряды Тейлора функции f с центром в α. По условию, $f_\alpha(x) = f(x) = f_\beta(x)$ для всех $x \in [a,b] \cap B(\alpha,\delta_\alpha) \cap B(\alpha,\delta_\beta)$, а это множество либо пусто, либо имеет предельные точки в $B(\alpha,\delta_\alpha) \cap B(\alpha,\delta_\beta)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Пусть прямоугольник $\Pi \subset \Omega$ содержит δ-окрестность отрезка $[a,b]$, где $\delta > 0$. Дифференцируя интегральную формулу Коши, получаем

$$f^{(n)}(x) = F^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\Pi} \frac{F(z)}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Значит,

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!}{\pi\delta^n} \ell(\partial\Pi) \max_{z\in\partial\Pi} |F(z)|$$

для всех $n \geqslant 0$, и в качестве Q можно взять число $\big(\ell(\partial\Pi)\max_{z\in\partial\Pi}|F(z)| + 1\big)/\delta$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). По условию на коэффициенты ряда Тейлора с центром в точке x, его радиус сходимости равен

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)/n!|}} \geqslant \frac{1}{Q} > 0.$$

[17] Раньше мы уже проверяли, что ряд Тейлора этой функции в нуле равен нулю.

Значит, достаточно показать, что этот ряд сходится к $f(y)$ для всех $y \in B(x, Q^{-1})$. По неравенству Лагранжа и нашему предположению,

$$\left| f(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k \right| \leqslant \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \right| \cdot |\xi - x|^n \leqslant Q^n |y-x|^n$$

для некоторой точки $\xi \in [x, y]$. Если $Q|x-y| < 1$, то правая часть в формуле выше стремится к нулю с ростом n. Таким образом, ряд Тейлора функции f с центром в точке x сходится к f всюду в круге $|x-y| < Q^{-1}$. $\nless$

Следующие свойства обычно связаны с возможностью аналитического продолжения функции в более широкую область:

- отображение части границы области в интервал прямой или дугу окружности;
- наличие уравнения, связывающего значения функции;
- участие ветви логарифма в определении функции.

Изучим подробнее эти случаи.

Обозначение. $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Утверждение 7.4 (принцип симметрии). Пусть функция f аналитична в области $\Omega \subset \mathbb{C}^+$, граница которой содержит интервал (a, b) вещественной прямой. Если f допускает непрерывное продолжение на множество $\Omega \cup (a, b)$, причём $f((a, b)) \subset \mathbb{R}$, то функция

$$F : z \mapsto \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \cup (a, b), \\ \overline{f(\overline{z})}, & \overline{z} \in \Omega, \end{cases}$$

является аналитическим продолжением f в область

$$\{z \in \mathbb{C} : z \in \Omega \text{ или } \overline{z} \in \Omega\} \cup (a, b).$$

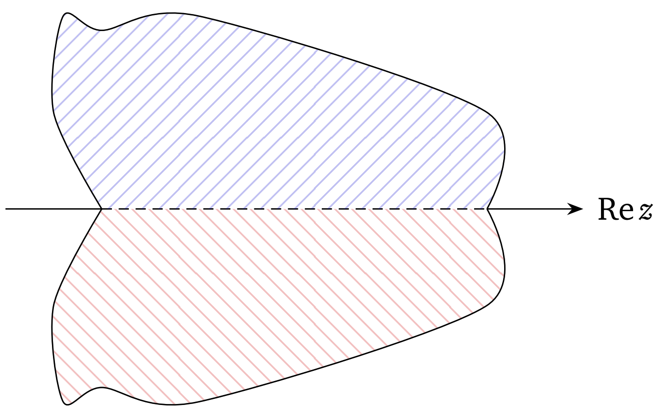


Рис. 14: Иллюстрация принципа симметрии

Доказательство. Пусть $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$. Поймём, что отображение $f^* \colon z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ аналитично в Ω^* и непрерывно в области $\Omega^* \cup (a, b)$. Действительно, предположим, что $\sum c_n(z - z_0)^n$ — разложение f в ряд в окрестности точки $z_0 \in \Omega$. Тогда нетрудно понять, что $\sum \overline{c}_n(z - \overline{z}_0)^n$ — разложение в ряд функции f^* в окрестности точки $\overline{z}_0$. Непрерывность f^* проверяется непосредственно. Кроме того, $f^* \equiv f$ на (a, b). Таким образом, функция F аналитична в открытом множестве $\Omega \cup \Omega^*$ и непрерывна в области $\Omega \cup (a, b) \cup \Omega^*$. Значит, она аналитична в этой области (упражнение на применение критерия замкнутости формы $F\,\mathrm{d}z$ с помощью интегрирования по прямоугольникам). $\not<$

Утверждение 7.5. Гамма-функция Эйлера (см. рисунки A.6 и A.7)

$$\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

допускает аналитическое продолжение с вещественной полуоси $(0, +\infty)$ в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, где $\mathbb{Z}_-$ обозначает множество неположительных целых чисел. В точках множества $\mathbb{Z}_-$ функция Γ имеет простые полюса, причём

$$\operatorname{res}_{-n}\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad \text{где}\ \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Определим

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Интеграл выше сходится в любой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant a > 0\}$ по признаку Вейерштрасса:

$$\int_0^{+\infty} |t^{z-1}|e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Кроме того, если $\operatorname{Re} z \geqslant 2a > 0$ и $|w| \leqslant a$, то

$$\frac{\Gamma(z) - \Gamma(z+w)}{w} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - t^w}{w} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

причём $(1 - t^w)/w \to \log t$ при $w \to 0$ и

$$\left|\frac{1 - t^w}{w}\right| \leqslant \sup_{\xi \in [0, w]} \left|\left(t^\xi\right)'\right| \leqslant \sup_{|\xi| \leqslant a} \left|\left(t^\xi\right)'\right| = |\log t| \cdot e^{a|\log t|} \leqslant |\log t| \cdot (t^a + t^{-a}).$$

Так как $\operatorname{Re} z \geqslant 2a$, то $|\log t| \cdot (t^a + t^{-a})\,t^{z-1}e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$, и по теореме Лебега о мажорированной сходимости существует предел

$$\lim_{w\to 0}\frac{\Gamma(z)-\Gamma(z+w)}{w}=\int\limits_0^{+\infty}\log t\cdot t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

то есть Γ-функция дифференцируема по комплексному аргументу в точке z. Кроме того,

$$\Gamma(z+1)=\int\limits_0^{+\infty}t^ze^{-t}\,\mathrm{d}t=-\int\limits_0^{+\infty}t^z(e^{-t})'\,\mathrm{d}t=-t^z(e^{-t})\Big|_0^{+\infty}+z\Gamma(z)=z\Gamma(z)\tag{7.1}$$

во всех точках $z:\operatorname{Re}z>0$.

Для таких $z\in\mathbb{C}$, что $\operatorname{Re}z>-1$, $z\neq 0$, положим

$$\widetilde{\Gamma}(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Полученная функция аналитична и удовлетворяет уравнению $\widetilde{\Gamma}(z+1)=z\widetilde{\Gamma}(z)$ во всей области $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>-1\}\setminus\{0\}$. Кроме того, она совпадает с функцией Γ в области $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ по (7.1). В точке $z=0$ функция $\widetilde{\Gamma}$ имеет изолированную особенность. Это полюс первого порядка, так как $\Gamma(1)=1$, то есть

$$\lim_{z\to 0}|\widetilde{\Gamma}(z)|=\lim_{z\to 0}\left|\frac{\Gamma(z+1)}{z}\right|=+\infty,$$

в то время как

$$\lim_{z\to 0}|z\widetilde{\Gamma}(z)|=\Gamma(1)=1.$$

В частности, из формулы выше следует, что $\operatorname{res}_0\widetilde{\Gamma}=1$. Снова используя функциональное уравнение, мы получим аналитическое продолжение $\widetilde{\Gamma}$ в область

$$\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>-2\}\setminus\{-1,0\}.$$

Продолжая этот процесс, получаем аналитическое продолжение Γ в область $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$. При этом будет выполнено функциональное уравнение

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)},\qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

которое показывает, что в точках множества $\mathbb{Z}_-$ функция Γ имеет простые полюса, и $\operatorname{res}_{-n}\Gamma=(-1)^n/n!$ для $n\in\mathbb{N}_0$. $\not<$

Определение. Пусть $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ — аналитическая функция, $\Gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ — такой путь, что $\Gamma(0)\in\Omega$. Набор пар $(\Omega_t,f_t)_{t\in[0,1]}$ называется *аналитическим продолжением* функции f вдоль пути Γ, если при каждом $t\in[0,1]$ выполняются следующие условия:

(1) Ω_t — область, и функция f_t аналитична в ней;

(2) $\Gamma(t) \in \Omega_t$ для всех $t \in [0,1]$;

(3) существует такое число $\delta_t > 0$, что если $|s-t| < \delta_t$, то

$$f_t(z) = f_s(z) \qquad \text{для всех } \ z \in \Omega_{st},$$

где $\Omega_{st} = \Omega_s \cap \Omega_t$;

(4) $\Omega_0 \subset \Omega$, $f_0 = f$.

Замечания.

1. В отличие от леммы о склеивании, в этом определении не предполагается, что $f_t(z) = f_s(z)$ для всех $z \in \Omega_{st}$ и всех $s, t \in [0,1]$ — рассматриваются только близкие точки s и t.

2. Для каждого $t \in [0,1]$ существует такое $\delta_t > 0$, что если $|s-t| < \delta_t$, то $\Omega_{st} \neq \varnothing$.

3. Если $(\widetilde{\Omega}_t, \widetilde{f}_t)$ — другое аналитическое продолжение f, то $\widetilde{f}_t = f_t$ в каждой области $\Omega_t \cap \widetilde{\Omega}_t$. Действительно, в силу теоремы единственности для аналитических функций, множество чисел $t \in [0,1]$ с этим свойством непусто (содержит ноль), открыто и замкнуто в $[0,1]$.

Теорема 7.6. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — произвольная область, функция $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ аналитична и не обращается в ноль в Ω; в окрестности точки $p \in \Omega$ выбрана ветвь логарифма $\varphi = \log f$. Тогда для любого пути $\Gamma\colon [0,1] \to \Omega$ с началом в точке p функция φ допускает аналитическое продолжение вдоль Γ. Более того, если Γ — кусочно-гладкий путь, то можно взять $\varepsilon > 0$ так, чтобы все шары $\widetilde{\Omega}_t = B(\Gamma(t), \varepsilon)$, $t \in [0,1]$, лежали в Ω и определить аналитическое продолжение формулой

$$\widetilde{\varphi}_t(w) = \varphi(\Gamma(0)) + \int\limits_{\Gamma_{t,w}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z, \qquad w \in \widetilde{\Omega}_t,$$

где $\Gamma_{t,w} = \Gamma|_{[0,t]} + [\Gamma(t), w]$.

Доказательство. Будем поступать так же, как и при доказательстве существования непрерывной ветви аргумента. Разобьём отрезок $[0,1]$ на конечное число отрезков $I_n = [t_n, t_{n+1}]$, где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, так, чтобы каждое множество $\Gamma(I_n)$ содержалось в открытом шаре $B_n = B(\Gamma(t_n), \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, чтобы шар B_n лежал в Ω. В шаре B_0 возьмём исходную ветвь логарифма $\varphi_0 = \log f$, в остальных шарах выберем произвольные ветви логарифма φ_{t_n}, где $n = 1, 2, \dots, N-1$. Последовательно изменяя ветви логарифма на величины, кратные $2\pi i k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$, добьёмся того, что $\varphi_{t_n} = \varphi_{t_{n+1}}$ в каждой области $B_n \cap B_{n+1}$. Сохраним обозначение φ_{t_n} для полученных ветвей логарифма. Осталось положить

$$\Omega_t = B_n, \quad \varphi_t = \varphi_{t_n}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad \varphi_1 = \varphi_{t_{N-1}}.$$

По построению, выполнены свойства (1), (2) и (4). В свойстве (3) можно взять, например, $\delta_t = \min |I_n|/10$.

Предположим теперь, что Γ — кусочно-гладкий путь в Ω, определим аналитическое продолжение интегральной формулой. Тогда в каждой области

$$\varphi_t'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \widetilde{\varphi}_t'(z), \qquad z \in \Omega_t \cap \widetilde{\Omega}_t,$$

и $\varphi_t(\Gamma(t)) = \widetilde{\varphi}_t(\Gamma(t))$, откуда следует утверждение. $\not<$

Пример 7.3. Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ — главная ветвь логарифма,

$$\Gamma\colon t \mapsto e^{2\pi i t}, \quad t \in [0,1].$$

Тогда f допускает аналитическое продолжение $\{(\Omega_t, f_t)\}_{t\in[0,1]}$ вдоль пути Γ, причём $f_1(1) = 2\pi i$. Действительно, окружность Γ не пересекает начало координат и

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i,$$

поэтому можно воспользоваться предыдущей теоремой.

8 Римановы поверхности аналитических функций

Определение. *Римановой поверхностью* называется одномерное комплексное связное многообразие.

Последнее означает, что M — связное хаусдорфово топологическое пространство, с атласом из карт $(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in I$, обладающих следующими свойствами:

- для каждого $\alpha \in I$ множество Ω_α — область в $\mathbb{C}$;
- отображения $\varphi_\alpha \colon \Omega_\alpha \to M$ — гомеоморфизмы на свой образ;
- $M = \bigcup_\alpha \varphi(\Omega_\alpha)$;
- если множество $V = \varphi_\alpha(\Omega_\alpha) \cap \varphi_\beta(\Omega_\beta)$ непусто, то $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ — аналитическая функция на открытом множестве $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ в $\mathbb{C}$.

Определение. Два атласа на римановом многообразии называются *эквивалентными*, если их объединение задаёт атлас риманового многообразия. Класс эквивалентности атласов на римановой поверхности называется *комплексной структурой*.

В дальнейшем всегда предполагается, что комплексная структура на римановой поверхности выбрана и зафиксирована.

Пример 8.1. Любая область $\Omega \subset \mathbb{C}$ — риманова поверхность. Атлас можно взять состоящим из единственной карты (и тождественного отображения).

Пример 8.2. Комплексная проективная прямая ¶ (“риманова сфера”) — риманова поверхность. Как множество, ¶ есть фактор-пространство множества $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ по отношению эквивалентности

$$a \sim b \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : a = \lambda b.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2i \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = -2i.$$

Комплексные числа $\mathbb{C}$ можно рассматривать как подмножество ¶: каждой точке $z \in \mathbb{C}$ сопоставляется класс эквивалентности

$$z = \left[\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Элементом ∞ проективной прямой ¶ называется класс эквивалентности

$$\infty = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

При этом $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. В качестве атласа для $\mathbb{P}$ можно выбрать

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{C}, \qquad \varphi_1 \colon z \mapsto \left[\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad \varphi_2 \colon z \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}\right],$$

и определить топологию на $\mathbb{P}$ так, чтобы эти отображения были гомеоморфизмами (то есть взять образы открытых множеств в $\mathbb{C}$ под действием этих отображений; тогда множества вида $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$ будут лежать в топологии и образовывать базу окрестностей для точки ∞). Так как

$$\varphi_1(\Omega_1) = \mathbb{C}, \qquad \varphi_2(\Omega_2) = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\},$$

свойства (1) — (3) определения комплексного многообразия выполнены. Проверим последнее свойство: полагая V равным $\varphi_1(\Omega_1) \cap \varphi_2(\Omega_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, получаем, что $\varphi_1^{-1}(V) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(w) \iff \left[\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}\right] \iff w = 1/z,$$

то есть $\varphi_2^{-1}(\varphi_1(z)) = 1/z$ — аналитическое отображение на V. Аналогично, $\varphi_1^{-1}(\varphi_2(z)) = 1/z$, откуда получаем, что $\mathbb{P}$ — риманова поверхность.

Определение. *Универсальной накрывающей* $\widehat{X}$ топологического пространства X называется множество путей в X, начинающихся в фиксированной точке $p \in X$, профакторизованное по следующему отношению эквивалентности: два пути эквивалентны, если у них совпадают концы и они гомотопны в X.

Пример 8.3. Рассмотрим пути

$$\gamma_0 \colon t \mapsto 1, \quad \gamma_1 \colon t \mapsto e^{2\pi i t}, \qquad t \in [0,1].$$

Можно проверить, что они порождают один элемент в пространствах $\widehat{\mathbb{C}}$, $\widehat{\mathbb{P}}$, $\widehat{\mathbb{P}}_*$, где $\mathbb{P}_* = \mathbb{P} \setminus \{0\}$, но разные элементы в пространстве $\widehat{\mathbb{C}}_*$, где $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Упражнение. Проверьте, что отображение

$$H \colon (s,t) \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 \\ s + (1-s)e^{-2\pi i t} \end{pmatrix}\right]$$

осуществляет гомотопию из γ_0 в γ_1 в $\mathbb{P}_*$.

Теорема 8.1. Универсальная накрывающая $\widehat{\Omega}$ произвольной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является односвязной римановой поверхностью.

Доказательство. Зафиксируем точку $p \in \Omega$. Для каждого класса эквивалентности $[\gamma_{p,q}]$ гомотопных путей с концами в p, q, где $q \in \Omega$, зададим окрестность $U_q(\delta)$, состоящую из классов $\big[\gamma_{p,q} + [q, q+w]\big]$, где $|w| < \delta$, а $\delta > 0$ выбирается так, чтобы $B(q,\delta)$ содержалось в Ω. Тогда

$$\widehat{\Omega} = \bigcup_{q \in \Omega} U_q(\delta).$$

Кроме того, множества $U_q(\delta)$ задают базу топологии в $\widehat{\Omega}$, и отображения

$$\varphi_{\gamma_{p,q}}\colon z \mapsto \big[\gamma_{p,q} + [q,z]\big]$$

в этой топологии являются гомеоморфизмами из $B(q,\delta)$ на $U_q(\delta)$. В частности, пары $\big(B(q,\delta), \varphi_{\gamma_{p,q}}\big)$ задают атлас $\widehat{\Omega}$. Если $U_q(\delta) \cap U_{q'}(\delta') \neq \varnothing$, то $B_q(\delta) \cap B_{q'}(\delta') \neq \varnothing$, и соответствующее отображение перехода тождественно — в частности, аналитично. Любая точка $[\gamma] \in \widehat{\Omega}$ соединена путём с точкой $[p]$ (здесь символ $[p]$ обозначает тождественный путь $t \mapsto p$). Действительно, если $\gamma|_{[0,s]}$ — сужение пути γ на $[0,s]$, то путь γ в $\widehat{\Omega}$, задаваемый по правилу

$$\gamma\colon s \mapsto [\gamma|_{[0,s]}], \qquad s \in [0,1],$$

соединяет $[p]$ и $[\gamma]$. Следовательно, пространство $\widehat{\Omega}$ связно. То, что $\widehat{\Omega}$ односвязно, доказывалось в курсе топологии. $\not<$

Теорема 8.2 (теорема о монодромии). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, отображение

$$H(s,t)\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$$

— гомотопия путей $\gamma_s\colon t \mapsto H(s,t)$ с концами $p = H(s,0)$, $q = H(s,1)$, причём $p \in \Omega$. Если аналитическую функцию $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ можно аналитически продолжить вдоль любого пути γ_s, то аналитические продолжения вдоль γ_0, γ_1 совпадают в окрестности точки q.

Доказательство. Если $s \in [0,1]$, и $\{(\Omega_{s,t}, f_{s,t}, \gamma_s)\}_{t\in[0,1]}$ — соответствующее аналитическое продолжение, то в силу компактности отрезка $[0,1]$ можно считать, для каждого $s \in [0,1]$ число областей $\Omega_{s,t}$ конечно[18]. В частности, далее будем считать, что выбраны такие числа $\delta_s > 0$, что

$$B(\gamma_s(t), \delta_s) \subset \Omega_{s,t}, \qquad t \in [0,1]. \tag{8.1}$$

Рассмотрим множество F таких чисел $s \in [0,1]$, что аналитические продолжения f вдоль γ_0 и γ_s совпадают в окрестности q. Это множество обладает следующими свойствами:

- $0 \in F$, и, следовательно, $F \neq \varnothing$.
- *F открыто в* $[0,1]$. Пусть $s \in F$ и $f_{s,1} \equiv f_{0,1}$ в $\Omega_{s,1} \cap \Omega_{0,1}$. Тогда для $s' \in [0,1]$, близких к s, и для всякого $t \in [0,1]$, имеет место включение $\gamma_{s'}(t) \in \Omega_{s,t}$ в силу равномерной непрерывности H и условия (8.1). Заметим теперь, что $(\Omega_{s,t}, f_{s,t}, \gamma_{s'})$ — новое аналитическое продолжение функции $f_{s',0} = f_{s,0}$ вдоль пути $\gamma_{s'}$, а значит, $f_{s,1} \equiv f_{s',1}$ в $\Omega_{s,1} \cap \Omega_{s',1}$. Таким образом, $s' \in F$, и поэтому множество F открыто в $[0,1]$.

[18] Действительно, у каждой точки $t \in [0,1]$ есть окрестность (a,b), такая, что $\gamma\big((a,b) \cap [0,1]\big) \subset \Omega_{s,t}$. Значит, можно выбрать конечное покрытие $[0,1]$ из таких интервалов и переопределить $(\Omega_{s,t}, f_{s,t})$ так, чтобы получить новое аналитическое продолжение с конечным числом областей $\Omega_{s,t}$.

- Пусть $s_n \in F$, $s_n \to s$. Покажем, что $s \in F$. Применяя рассуждение из доказательства открытости, получаем, что начиная с некоторого n будет выполнено равенство $f_{s,1} \equiv f_{s_n,1}$ в $\Omega_{s,1} \cap \Omega_{s_n,1}$. Но по условию $f_{s_n,1} \equiv f_{0,1}$ в $\Omega_{s_n,1} \cap \Omega_{0,1}$, а потому $s \in F$.

Итак, в силу связности $F = [0,1]$, откуда следует, что $f_{1,1} = f_{0,1}$ в некоторой окрестности точки q. $\not<$

Следствие 8.3. Если область Ω содержится в односвязной области Ω', и аналитическую функцию f можно продолжить в любую точку $q \in \Omega'$ вдоль некоторого пути $\gamma_{p,q}$, обладающего свойством $\gamma_{p,q}([0,1]) \subset \Omega'$, то существует аналитическое продолжение f в область Ω'.

Доказательство. Пусть $\{(\Omega_{q,t}, f_{q,t}, \gamma_{p,q})\}_{t\in[0,1]}$ — аналитическое продолжение функции f вдоль пути $\gamma_{p,q}$. Тогда функция $g\colon q \mapsto f_{q,1}(\gamma_{p,q})$ будет задавать аналитическое продолжение f в область Ω'. Определение функции g корректно в силу односвязности области Ω' (то есть между любыми двумя путями есть гомотопия) и теоремы о монодромии. $\not<$

Определение. Отображение f между двумя римановыми поверхностями M, $\widetilde{M}$ с атласами $\{(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(\widetilde{\Omega}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)\}$ называется *аналитическим*, если все отображения вида $\widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha$ являются аналитическими на области своего задания.

Важнейший случай в предыдущем определении — это $\widetilde{M} = \mathbb{C}$. В этом случае говорят об аналитическом отображении на M. Вот более общий случай предыдущего следствия:

Следствие 8.4. Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{C}$, и пусть f — аналитическая функция в Ω, не имеющая нулей. Тогда любая ветвь $\log f$, заданная в окрестности точки $p \in \Omega$, допускает аналитическое продолжение на универсальную накрывающую области Ω. Кроме того,

$$(\log f)([\gamma]) = \log f(p) + \int\limits_{\widetilde{\gamma}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z,$$

где $\widetilde{\gamma}$ — кусочно-гладкий представитель в классе эквивалентности $[\gamma]$.

Доказательство. Как и в предыдущем случае, достаточно определить аналитическое продолжение $\log f$ с помощью продолжения вдоль путей, начинающихся в точке p. Корректность определения следует из теоремы о монодромии. Формула для продолжения $\log f$ вдоль кусочно-гладкого пути была установлена ранее. $\not<$

Определение. *Римановой поверхностью логарифма* называется универсальная накрывающая области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Риманову поверхность $\log z$ можно получить, склеивая копии $\mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ как показано на рисунке: При этом верхний край разреза каждой копии $\mathbb{C} \setminus [0, -\infty)$ подклеивается к нижнему краю другой копии, расположенной ниже.

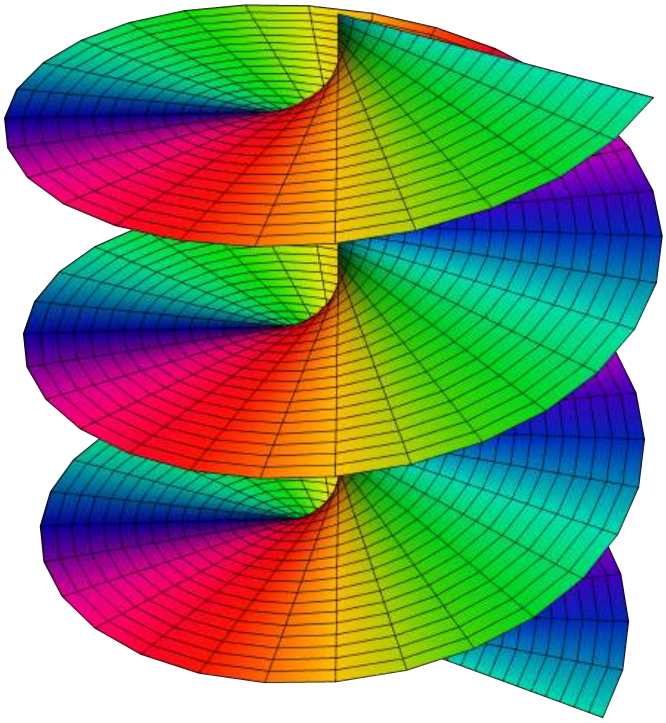


Рис. 15: Визуализация римановой поверхности логарифма

Следствие 8.5. Любая ветвь $\log z$, заданная в окрестности $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, аналитически продолжается на риманову поверхность логарифма. При этом для главной ветви $\log z$ и точки $p = 1$ продолжение можно вычислить по формуле

$$(\log z)([\gamma]) = \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Пример 8.4. Если $\log z$ — главная ветвь логарифма, а $\gamma(t) = (1+t)e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$, то

$$(\log z)([\gamma]) = \log(1+4\pi) + 4\pi i. \tag{8.2}$$

Действительно, если $\gamma_1 \colon t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, и $\gamma_2 = [1, 1+4\pi]$, то путь $\gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2$ гомотопен γ. При этом

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i, \qquad \int\limits_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log x \Big|_1^{1+4\pi} = \log(1+4\pi),$$

откуда и получается равенство (8.2).

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Римановой поверхностью корня* $\sqrt[n]{z}$ называется универсальная накрывающая области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, профакторизованная по следующему отношению эквивалентности: $[\gamma_1] \sim [\gamma_2]$, если

$$\Delta_{\gamma_1 - \gamma_2} \arg z \in 2\pi n \mathbb{Z}.$$

Факторизация по отношению эквивалентности означает, что в римановой поверхности $\log z$ надо выбрать n подряд идущих слоёв, и подклеить нижний слой к верхнему вдоль разреза. В трёхмерном пространстве этого нельзя сделать без самопересечений. На рисунке ниже изображена риманова поверхность функции $\sqrt[3]{z}$.

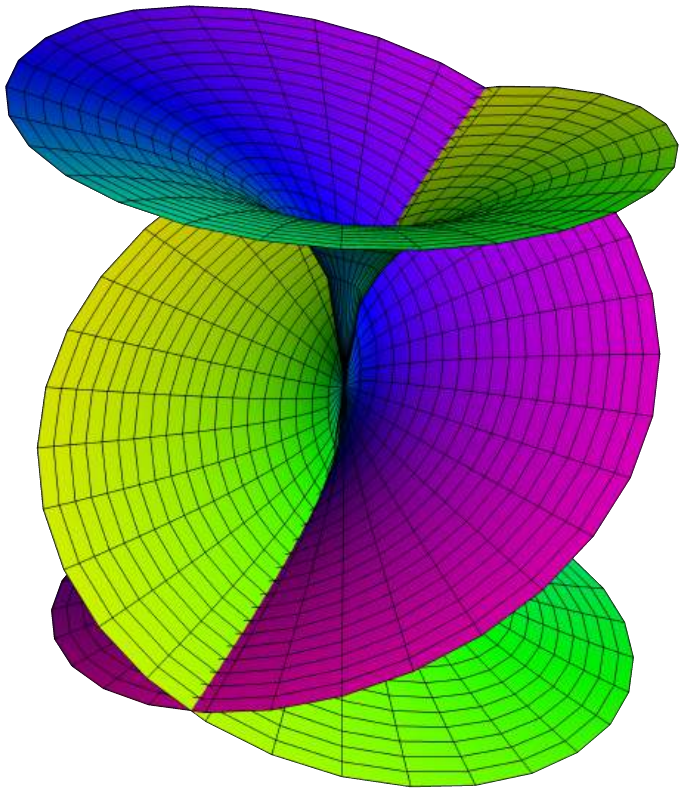


Рис. 16: Визуализация римановой поверхности функции $\sqrt[3]{z}$

Следствие 8.6. Любая ветвь $\sqrt[n]{z}$, заданная в окрестности $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, аналитически продолжается на риманову поверхность $\sqrt[n]{z}$.

Доказательство. Так как $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\log z}$ для некоторой ветви $\log z$, то продолжая аналитически эту ветвь, мы зададим $\sqrt[n]{z}$ на универсальной накрывающей $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим теперь такие пути γ_1, γ_2, что $\Delta_{\gamma_1-\gamma_2} \arg z \in 2\pi n\mathbb{Z}$. Заметим, что если φ_1, φ_2 — продолжения $\sqrt[n]{z}$ вдоль путей γ_1, γ_2, то

$$\begin{aligned}\varphi_1(\gamma_1(1)) &= \exp\left(\frac{1}{n}\big(\log|\gamma_1(1)| + i\Delta_{\gamma_1}\arg z\big)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\big(\log|\gamma_2(1)| + i\Delta_{\gamma_2}\arg z\big)\right) = \varphi_2(\gamma_2(1)),\end{aligned}$$

так как

$$\Delta_{\gamma_1-\gamma_2}\arg z = \Delta_{\gamma_1}\arg z - \Delta_{\gamma_2}\arg z \in 2\pi n\mathbb{Z},$$

и $e^{iq/n} = 1$ для любой точки $q \in 2\pi n\mathbb{Z}$. $\not<$

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Римановой поверхностью корня* $\sqrt[2]{1-z^2}$ называется универсальная накрывающая области $\mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup \{1\})$, профакторизованная по следующему отношению эквивалентности: $[\gamma_1] \sim [\gamma_2]$, если

$$\Delta_{\gamma_1 - \gamma_2} \arg(1-z^2) \in 4\pi\mathbb{Z},$$

то есть если число обходов петли $\gamma_1 - \gamma_2$ вокруг точек ± 1 чётно.

Риманову поверхность корня $\sqrt[2]{1-z^2}$ можно получить склеиванием двух копий $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ вдоль разреза $[-1,1]$ так, чтобы верхний берег верхней копии подклеивался к нижнему берегу нижней копии, и наоборот, нижний берег разреза верхней копии подклеивался к верхнему берегу разреза на нижней копии. Как и ранее, трёхмерный рисунок этой римановой поверхности содержит пересечения слоёв (подклеивающихся “крест накрест”), которые на деле отсутствуют.

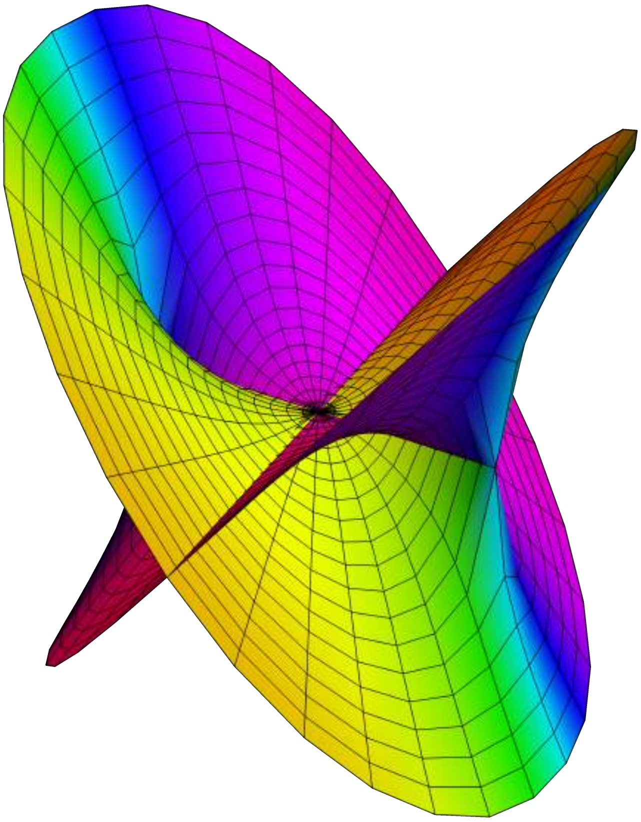


Рис. 17: Визуализация римановой поверхности функции $\sqrt{1-z^2}$

Следствие 8.7. Любая из двух ветвей $\sqrt[2]{1-z^2}$, заданная в окрестности точки $p \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, аналитически продолжается на риманову поверхность $\sqrt[2]{1-z^2}$.

Доказательство. Так как

$$\sqrt[2]{1-z^2} = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)},$$

и $1 - z^2 \neq 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, то $\sqrt[2]{1-z^2}$ продолжается из окрестности p на универсальную накрывающую множества $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. Осталось понять, что аналитические продолжения вдоль эквивалентных классов путей $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$ будут совпадать. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2}\log(1-\gamma_1(1)^2) - \frac{1}{2}\log(1-\gamma_2(1)^2) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

Последнее равносильно условию $\Delta_{\gamma_1-\gamma_2}\arg(1-z^2) \in 4\pi\mathbb{Z}$. $\not<$

После знакомства с этими примерами, можно дать общее определение римановой поверхности аналитической функции.

Определение. *Римановой поверхностью аналитической функции* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ называется множество ее аналитических продолжений $\{(\Omega_t, f_t)\}$ вдоль путей $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, начинающихся в фиксированной точке $p \in \Omega$; при этом два продолжения (Ω_t, f_t), $(\widetilde{\Omega}_t, \widetilde{f_t})$ вдоль $\gamma, \widetilde{\gamma}$ считаются одинаковыми, если

$$\gamma(1) = \widetilde{\gamma}(1) \quad \text{и} \quad f_1 \equiv \widetilde{f_1} \quad \text{в области} \;\; \Omega_1 \cap \widetilde{\Omega}_1.$$

Утверждение 8.8. Риманова поверхность аналитической функции действительно является римановой поверхностью.

Доказательство. Для каждого элемента $e = (\Omega_t, f_t, \gamma)$ римановой поверхности M функции f рассмотрим множества $U \subset M$ вида

$$U = \left\{(\widetilde{\Omega}_t, \widetilde{f_t}, \widetilde{\gamma}) : \widetilde{\Omega}_1 = V, f_1 \equiv \widetilde{f_1} \text{ в } V\right\}$$

где V — произвольная подобласть Ω_1, содержащая $\gamma(1)$. Полученное семейство множеств образует локальную базу в точке e. Топологию на M зададим как всевозможные объединения множеств из локальных баз. Атлас для M можно составить следующим образом: каждой точке $e = (\Omega_t, f_t, \gamma)$ сопоставим область Ω_1 и отображение $\varphi : w \mapsto (\Omega_{w,t}, f_{w,t}, \gamma_w)$, где $w \in \Omega_1$,

$$(\Omega_{w,t}, f_{w,t}) = \begin{cases} (\Omega_{2t}, f_{2t}), & t \in [0,1/2], \\ (\Omega_1, f_1), & t \in [1/2,1], \end{cases}$$

$$\gamma_w(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0,1/2], \\ [\gamma(1), w](2t-1), & t \in [1/2,1], \end{cases}$$

где $[\gamma(1), w]$ — путь в Ω_1, соединяющий $\gamma(1)$ и w. Отображения перехода в этом атласе будут тождественными, и, следовательно, аналитическими. Связность M следует из того, что любой элемент M соединён в M с тривиальным продолжением функции f:

$$(\Omega_t, f_t, \gamma) = (\Omega, f, [p]), \qquad t \in [0,1],$$

где $[p]$ — постоянный путь в Ω. $\not<$

***Пример 8.5.** Риманова поверхность функции $\arccos z$ получается склеиванием бесконечного числа копий областей $\Pi_n = \mathbb{C} \setminus ((-\infty,1] \cup [1,+\infty))$ причём верхний берег правого разреза Π_{2k} подклеивается к нижнему берегу правого разреза Π_{2k-1}, нижний берег правого разреза Π_{2k} подклеивается к верхнему берегу правого разреза Π_{2k-1}, верхний берег левого разреза Π_{2k} подклеивается к нижнему берегу левого разреза Π_{2k+1}, нижний берег левого разреза Π_{2k} подклеивается к верхнему берегу левого разреза Π_{2k-1}. Получается поверхность следующего вида (показана ее часть $\operatorname{Im} z > 0$): Схема расположения слоёв Π_n показана ниже: Точки на каждом уровне Π_n можно

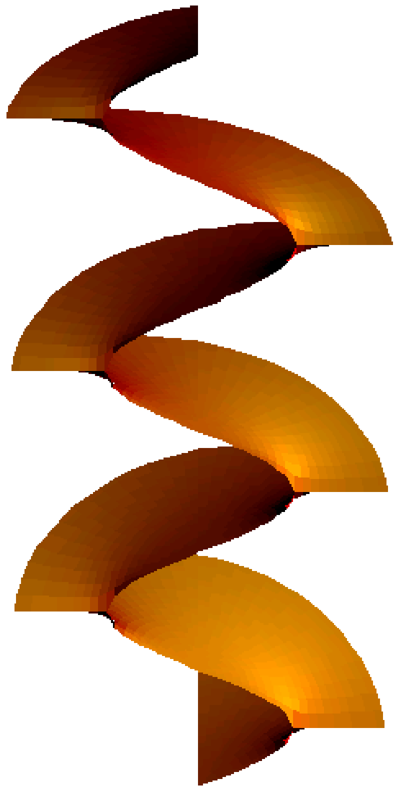


Рис. 18

Рис. 19

соединить путём, стягиваемым в Π_n.

Покажем, что описанная выше конструкция задаёт риманову поверхность для $\arccos z$. Для этого заметим, что функция $\cos z$ биективно отображает полосы $G_n =$

$\{n\pi < |\operatorname{Re} z| < \pi n + \pi\}$, $n \in \mathbb{Z}$, на области Π_n. При этом закрашенные части полос на рисунке ниже переходят в верхнюю полуплоскость, а белые — в нижнюю: В каж-

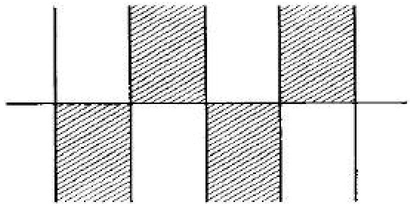


Рис. 20

дой области Π_n можно задать аналитическую функцию $\varphi_n : \Pi_n \to G_n$ со свойством $\cos(\varphi_n(z)) = z$. При этом аналитическое продолжение $\arccos z$ из окрестности $0 \in \Pi_0$ вдоль любого пути γ, пересекающего N раз множество $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ получается цепочкой его продолжений $\varphi_{i_0}, \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots \varphi_{i_N}$, где $i_k \in \mathbb{Z}$: $|i_k - i_{k+1}| = 1$, $i_0 = 0$. Например, если γ пересекает в первый раз множество $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ по его положительной части, то $i_1 = -1$. Из двух прямых, ограничивающих область G_k лишь одна является границей $G_{k\pm 1}$. Это соответствует тому, что лишь один из разрезов $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ области Π_k склеивается с разрезом области $\Pi_{k\pm 1}$. Так как $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$, то аналитически продолжить $\arccos x$ в слое Π_0 вдоль пути, пересекающего точки ± 1 невозможно. Аналогичная причина не даёт продолжить $\arccos z$ вдоль любого пути пересекающего точки ± 1 в других слоях Π_n. Значит, мы аналитически продолжили $\arccos z$ вдоль всех возможных путей и получили разные продолжения в разных точках римановой поверхности. Значит, предъявленная нами риманова поверхность – действительно риманова поверхность $\arccos z$.

9 Преобразования Мёбиуса и их произведения

Определение. *Преобразованием Мёбиуса* (или *дробно-линейным отображением*) с матрицей $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ называется отображение

$$\varphi_A \colon \P \to \P, \quad \left[\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right] \mapsto \left[A\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right].$$

Замечание. Условие $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ означает, что

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Если отождествить $\mathbb{C}$ с подмножеством $\P$ отображением $z \mapsto \left[\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right]$, то получится, что

$$\varphi_A(z) = \left[A\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right] = \left[\left(\begin{smallmatrix} az+b \\ cz+d \end{smallmatrix}\right)\right] = \left[\left(\begin{smallmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right] = \frac{az+b}{cz+d}$$

во всех таких точках $z \in \mathbb{C}$, что $cz + d \neq 0$. Если же $cz + d = 0$, то $\varphi_A(z) = \infty \in \P$. Легко также проверить, что $\varphi_A(\infty) = a/c$, где $a/c = \infty$, если $c = 0$.

Утверждение 9.1. Для любых матриц $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ справедливо тождество

$$\varphi_{A_1} \circ \varphi_{A_2} = \varphi_{A_1 A_2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\varphi_{A_1}\Big(\varphi_{A_2}\Big(\left[\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right]\Big)\Big) = \left[A_1\left[A_2\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right]\right] = \left[A_1 A_2\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right] = \varphi_{A_1 A_2}\Big(\left[\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right]\Big),$$

что и требовалось. $\not<$

Следствие 9.2. Преобразования Мёбиуса являются биекциями $\P$ на $\P$, и каждое из них имеет неподвижную точку. Если $\det A = 1$, то обратное отображение к φ_A имеет вид

$$(\varphi_A)^{-1} \colon z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Доказательство. Пусть φ_A — преобразование Мёбиуса, $B = A^{-1}$. Тогда

$$(\varphi_B \circ \varphi_A)(z) = \varphi_I(z) = z, \quad z \in \P,$$

где I — единичная матрица размера 2×2. Значит, φ_B — обратное отображение к φ_A. Если при этом $\det A = 1$, то

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & ab - ab \\ cd - cd & ad - bc \end{pmatrix} = I,$$

что задаёт формулу для $(\varphi_A)^{-1}$. Кроме того, если $z = \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$ — ненулевой собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ, то

$$\varphi_A(z) = \left[A\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right] = \left[\lambda\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right] = \left[\left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)\right] = z.$$

Значит, собственные вектора A отвечают неподвижным точкам φ_A, в частности, любое преобразование Мёбиуса имеет неподвижную точку. ≮

Утверждение 9.3. Преобразования Мёбиуса переводят прямые и окружности в прямые и окружности.

Доказательство. Любое преобразование Мёбиуса — это суперпозиция отображений вида $z \mapsto z + w$, $z \mapsto wz$, и $z \mapsto 1/z$. Ясно, что сдвиги $z \mapsto z + w$ переводят прямые и окружности в прямые и окружности.

Любая прямая в $\mathbb{C}$ — это сдвиг прямой, проходящей через ноль и точку α на единичной окружности, то есть множество точек $\{\alpha x + b \mid x \in \mathbb{R}\}$. Но

$$\{w(\alpha x + b) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\widetilde{\alpha} y + \widetilde{b} \mid y \in \mathbb{R}\},$$

где $\widetilde{\alpha} = w\alpha/|w|$, $\widetilde{b} = bw$. Значит, отображение $z \mapsto wz$ переводит прямые в прямые. Кроме того, окружность $|z - z_0|^2 = r^2$ оно переводит в множество таких точек ξ, что

$$|\xi/w - z_0|^2 = r^2,$$

то есть в окружность с центром $z_0 w$ и радиусом $r|w|$.

Рассмотрим теперь отображение $z \mapsto 1/z$. Окружность $|z - z_0|^2 = r^2$ оно переводит в множество точек ξ, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|1/\xi - z_0|^2 = r^2 \iff |1 - \xi z_0|^2 = |\xi|^2 r^2 \iff 1 - 2\operatorname{Re}(\xi z_0) + |\xi|^2(|z_0|^2 - r^2) = 0.$$

Если $|z_0|^2 - r^2 \neq 0$, то последнее условие равносильно следующему:

$$|\xi|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi\overline{\xi}_0) + |\xi_0|^2 - |\xi_0|^2 + \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} = 0, \qquad \overline{\xi}_0 = \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2},$$

то есть уравнению окружности $|\xi - \xi_0|^2 = R^2$, где

$$R^2 = |\xi_0|^2 - \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2} > 0.$$

Если же $|z_0|^2 - r^2 = 0$, то это условие равносильно уравнению прямой $\operatorname{Re}(\xi z_0) = 1/2$, которому удовлетворяют точки множества $\{\xi = \alpha x + b \mid x \in \mathbb{R}\}$, где

$$\alpha = i\overline{z}_0/|z_0|, \qquad b = 1/(2z_0).$$

Проверка того, что отображение $z \mapsto 1/z$ переводит прямые в прямые и окружности оставляется читателю в качестве упражнения . ≮

Утверждение 9.4. Любые три различные точки z_1, z_2, z_3 на римановой сфере ¶ можно перевести в любые три различные точки w_1, w_2, w_3 на римановой сфере ¶ единственным преобразованием Мёбиуса.

Доказательство. Пусть сначала все 6 точек лежат в $\mathbb{C}$. Отображение φ, задаваемое

уравнением
$$\frac{\varphi(z)-w_1}{\varphi(z)-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$
является преобразованием Мёбиуса и переводит z_k в w_k, $k=1,2,3$. Если же $\widetilde{\varphi}$ — другое преобразование Мёбиуса с теми же свойствами, то

$$\frac{\widetilde{\varphi}(z)-w_1}{\widetilde{\varphi}(z)-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-\widetilde{z}_1}{z-\widetilde{z}_2}\frac{\widetilde{z}_3-\widetilde{z}_2}{\widetilde{z}_3-\widetilde{z}_1}$$

для некоторых $\widetilde{z}_k$, как следует из общего вида преобразований Мёбиуса. Подстановка z_1, z_2, z_3 в равенство выше показывает, что $\widetilde{z}_k=z_k$ и $\widetilde{\varphi}=\varphi$. Это завершает доказательство в рассматриваемом случае. Если же какие-нибудь из точек z_k, w_k равны ∞, то формулу, определяющую φ, надо соответствующим образом модифицировать. Например, если $z_1=\infty$, $w_3=\infty$, то φ определяется из соотношения

$$\frac{\varphi(z)-w_1}{\varphi(z)-w_2}=\frac{z_3-z_2}{z-z_2}.$$

Проверка показывает, что все предыдущие рассуждения остаются верными и в этом случае. ≮

Определение. Аналитическое отображение называется *конформным*, если оно биективно.

Пример 9.1. Преобразования Мёбиуса конформно отображают ¶ на ¶.

Утверждение 9.5. Пусть $|a|<1$, $|\alpha|=1$. Тогда *фактор Бляшке* (или *автоморфизм круга*, *преобразование Мёбиуса*), то есть отображение

$$b_{\alpha,a}\colon z\mapsto \alpha\,\frac{a-z}{1-\overline{a}z},$$

осуществляет конформное отображение единичного диска $\mathbb{D}$ на себя.

Доказательство. Действительно, функция $b_{\alpha,a}$ аналитична в окрестности $\{z\in\mathbb{C}: |z|\leqslant 1\}$, и для всякой точки $\xi\in\mathbb{T}$ имеет место равенство

$$|b_{\alpha,a}(\xi)|=\left|\frac{a-\xi}{1-\overline{a}\xi}\right|=\left|\frac{a-\xi}{\overline{\xi}-\overline{a}}\right|=1.$$

По принципу максимума, это означает, что

$$\begin{aligned}
|b_{\alpha,a}(z)|&<1, && z\in\mathbb{D},\\
\left|\frac{1}{b_{\alpha,a}(z)}\right|&<1, && z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}.
\end{aligned}$$

Значит, $b_{\alpha,a}(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, $b_{\alpha,a}(\mathbb{T})\subset\mathbb{T}$ и $b_{\alpha,a}(¶\setminus\overline{\mathbb{D}})\subset ¶\setminus\overline{\mathbb{D}}$. Так как преобразования Мёбиуса — биекции ¶ на ¶, то эти включения суть равенства, и $b_{\alpha,a}$ осуществляет конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$. ≮

Лемма 9.6 (лемма Шварца, классическая форма). Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — аналитическая функция. Если $f(0) = 0$, то $|f(z)| \leqslant |z|$ всюду в $\mathbb{D}$, причём $|f'(0)| \leqslant 1$. Более того, если $|f(z_0)| = |z_0|$ для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ или $|f'(0)| = 1$, то $f(z) = \alpha z$ всюду в $\mathbb{D}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$.

Доказательство. См. доказательство леммы 9.8. $\not<$

Теорема 9.7. Если $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — конформное отображение, то $\varphi = b_{\alpha,a}$ для некоторого $|\alpha| = 1$ и $a = \varphi^{-1}(0)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f = \varphi \circ b_{1,a}$. По условию, $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — конформное отображение, $f(0) = 0$. Из леммы Шварца мы получаем, что $|f'(0)| \leqslant 1$.

Пусть g — обратное отображение к f. Тогда $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — конформное отображение, $g(0) = 0$, и потому вновь $|g'(0)| \leqslant 1$. С другой стороны, $g(f(z)) = z$, откуда следует, что

$$1 = z' = (g(f(z)))' = g'(f(z))f'(z),$$

то есть $1 = g'(0)f'(0)$. Значит, $|f'(0)| = 1$. По лемме Шварца, $f(z) \equiv \beta z$, откуда следует, что $\overline{\beta}\varphi$ — отображение, обратное к автоморфизму $b_{1,a}$. Итак, мы проверили, что для каждого конформного отображения $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ существует такое $\beta \in \mathbb{T}$, что

$$(\varphi)^{-1}(\beta) = (\overline{\beta}\varphi)^{-1} = b_{1,a},$$

то есть $(\varphi)^{-1}(z) = b_{1,a}(\overline{\beta}z) = b_{\overline{\beta},a}(z)$, где “$-1$” обозначает обратное отображение. Применяя этот результат к $(\varphi)^{-1}$ вместо φ, получаем, что $\varphi = b_{\alpha,w}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$, $w \in \mathbb{D}$. Равенство $\varphi(a) = 0$ влечёт равенство $w = a$. $\not<$

Лемма 9.8 (лемма Шварца, инвариантная форма). Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ — аналитическая функция. Тогда

$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|, \qquad \text{где } z, a \in \mathbb{D}. \tag{9.1}$$

В частности,

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}. \tag{9.2}$$

Более того, если в (9.1) достигается равенство для пары точек $z \neq a$, или в (9.2) достигается равенство в одной из точек $a \in \mathbb{D}$, то $f = b_{\alpha,a}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Отметим, что классическая форма получается из инвариантной подстановкой $a = 0$. Рассмотрим аналитическую функцию

$$g\colon z \mapsto \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} = b_{-1,f(a)} \circ f.$$

Ясно, что $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ и $g(a) = 0$. Кроме того, при $r < 1$ и $z \in \mathbb{T}$ аналитическая функция $g/b_{1,a}$ удовлетворяет оценке

$$|(g/b_{1,a})(rz)| \leqslant \frac{\sup_{\mathbb{T}} |g(rz)|}{\inf_{\mathbb{T}} |b_{1,a}(rz)|} \leqslant \frac{1}{\inf_{\mathbb{T}} |b_{1,a}(rz)|} \leqslant 1 + \varepsilon(r),$$

где $\varepsilon(r) \to 0$, $r \to 1$. Значит, по принципу максимума выполнено неравенство

$$|(g/b_{1,a})(rz)| \leqslant 1 + \varepsilon(r)$$

для любой точки $z \in \mathbb{D}$. Устремляя r к единице, получаем, что

$$|(g/b_{1,a})(z)| \leqslant 1$$

всюду в $\mathbb{D}$, то есть выполнено неравенство (9.1). Если в (9.1) достигается равенство для $z \neq a$, или же (9.2) обращается в равенство, то по принципу максимума функция $g/b_{1,a}$ постоянна в $\mathbb{D}$, и равна по модулю единице. Иными словами, $g = b_{\alpha,a}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$. $\not<$

Обозначение. Для $a \in \mathbb{D}$, положим

$$b_a = \frac{|a|}{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z},$$

если $a \neq 0$, или $b_a = z$, если $a = 0$. В частности, $b_a(0) = |a| \geqslant 0$.

Определение. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ аналитических функций $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ называется *сходящимся в области* Ω, если для любого компакта $K \subset \Omega$ существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что произведение $\prod_{n=N}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на K к функции, не имеющей нулей на K.

Если произведение $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ из аналитических функций $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ сходится в области Ω, то функция $f \colon z \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ аналитична в Ω. Действительно, частичные произведения этого ряда сходятся равномерно на компактах в Ω к функции f.

Определение. Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в $\mathbb{D}$. В случае, когда произведение $\prod b_{z_n}$ сходится в $\mathbb{D}$, оно называется *произведением Бляшке*.

Теорема 9.9. Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в $\mathbb{D}$. Произведение $\prod b_{z_n}$ сходится в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\geqslant 1}(1 - |z_n|) < \infty.$$

Если же это условие не выполнено, то

$$\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N} b_{z_n}(z) = 0$$

для каждой точки $z \in \mathbb{D}$.

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 9.10. Если комплексные числа w_n таковы, что $|1 - w_n| \in [0, 1/2]$, то условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}|1 - w_n| < \infty \tag{9.3}$$

достаточно для сходимости произведения $\prod_n w_n$ в $\mathbb{C}$ к ненулевому числу. Если же $w_n \in (0,1)$, то сходимость ряда (9.3) необходима для сходимости произведения $\prod_n w_n$.

Доказательство. Сходимость произведения $\prod_n w_n$ к ненулевому комплексному числу равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log w_n,$$

где $\log z$ — главная ветвь логарифма. Положим $\xi_n = 1 - w_n$. Пусть выполнено условие (9.3), тогда $\sum |\xi_n| < \infty$, и так как $|\xi_n| \leqslant 1$, то $\sum |\xi_n|^2 < \infty$. Значит, ряд из величин

$$\log w_n = \log(1-\xi_n) = -\xi_n + O(\xi_n^2)$$

сходится абсолютно, вместе с произведением $\prod_n w_n$.

Пусть, наоборот, сходится произведение $\prod_n w_n$. Если при этом $w_n \in (0,1)$, то числа ξ_n положительны, и начиная с некоторого номера N попадут в интервал $(0, 1/2)$, так как $\log(1-\xi_n) \to 0$. Но сходимость ряда

$$\sum_{n \geqslant N} \left(-\xi_n + O(\xi_n^2)\right)$$

влечёт сходимость ряда

$$\sum_{n\geqslant 1} \xi_n = \sum_{n \geqslant 1} |1 - w_n|,$$

что и требовалось. $\not<$

Доказательство теоремы 9.9. Пусть $\prod b_{z_n}$ сходится в $\mathbb{D}$. Тогда для некоторого $N \in \mathbb{N}$ произведение

$$\prod_{n=N}^{\infty} b_{z_n}(0) = \prod_{n=N}^{\infty} |z_n|$$

сходится к ненулевому числу, и по предыдущей лемме

$$\sum_{n \geqslant M} (1 - |z_n|) < +\infty.$$

Чтобы доказать сходимость $\prod b_{z_n}$ при условии $\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|) < \infty$, преобразуем b_a к следующему виду:

$$\frac{|a|}{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z} = \frac{|a|}{a\bar{a}}\frac{a\bar{a}-\bar{a}z}{1-\bar{a}z} = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|a|^2-1}{1-\bar{a}z}+1\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{M\to\infty} \prod_N^M b_{z_n} = \lim_{M\to\infty} \prod_N^M w_n \Bigg/ \prod_N^M |z_n|, \qquad \text{где } \; w_n = \frac{|z_n|^2-1}{1-\bar{z}_n z} + 1.$$

Пусть N выбрано так, что $|1-\overline{z}_n z| > \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$ и некоторого числа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{n\geqslant 1} |1-w_n| \leqslant \varepsilon^{-1} \sum_{n\geqslant 1} (1-|z_n|^2) \leqslant 2\varepsilon^{-1} \sum_{n\geqslant 1} (1-|z_n|) < \infty,$$

что с учётом леммы показывает, что произведение $\prod_N^M b_{z_n}$ сходится к ненулевому числу.

Покажем, что доказанная сходимость равномерна на компактах. Если внимательно изучить оценки, которыми мы пользовались, будет видно, что они равномерны в каждом круге $|z| \leqslant r < 1$.

Есть и другой способ: если частичные произведения $B_M = \prod_N^M b_{z_n}$ сходятся к функции $B = \prod_N^\infty b_{z_n}$ неравномерно в некотором круге $|z| \leqslant r < 1$, то

$$\exists \varepsilon > 0,\ M_k \to +\infty: \quad \inf_k \sup_{|z|\leqslant r} |B_{M_k}(z) - B(z)| \geqslant \varepsilon. \tag{9.4}$$

Но по теореме Монтеля и условию $\sup_{z\in\mathbb{D}} |B_{M_k}(z)| = 1$, из последовательности $\{B_{M_k}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{B_{M_{k_j}}\}$ сходящуюся равномерно на компактах в $\mathbb{D}$. Ее пределом будет функция B, и мы получим противоречие с (9.4).

Пусть теперь $\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|) = \infty$. Докажем, что $B_M(z) \to 0$, $M \to +\infty$. По теореме Монтеля, можно считать, что B_M сходится равномерно на компактах в $\mathbb{D}$ к некоторой функции B, и нам нужно доказать равенство $B = 0$. Можно считать, что в некоторой окрестности нуля нет точек последовательности z_k. Действительно, любым конечным числом из них мы можем пренебречь, рассматривая последовательность $\{z_k\}_{k\geqslant N}$, а если их бесконечно много в круге $|z| < 1/2$, то $B = 0$ по теореме единственности для аналитических функций. Итак, пусть $|z_n| \geqslant 1/4$ для всех n. Тогда функции B_M не имеют нулей в $|z| < 1/4$. Из принципа аргумента следует, что тоже верно и для функции B, в частности, $B(0) \neq 0$. Но

$$B(0) = \lim \prod_1^{N_k} |z_n| = \lim \exp\left(\sum_1^{N_k} \log|z_n|\right) \leqslant \lim \exp\left(-\sum_1^{N_k} 1-|z_n|\right) = 0,$$

что приводит к противоречию. $\not<$

Следствие 9.11. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность нулей функции $f \not\equiv 0$, ограниченной и аналитической в $\mathbb{D}$, причём каждый ноль встречается в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Тогда

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|) < \infty.$$

Наоборот, любая такая последовательность есть последовательность нулей некоторой ограниченной аналитической функции в $\mathbb{D}$.

Доказательство. Если $\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|) < \infty$, то искомая функция — это произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$.

Пусть теперь f — какая-нибудь функция с нулями $\{z_n\}$; предположим, что

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|)=+\infty.$$

Будем считать, что $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ (можно умножить f на малую константу). Тогда по лемме Шварца $f_1=f/b_{z_1}$ — аналитическая функция, и $f_1(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, ибо особенность в точке z_1 устранима, а у границ модули значений не превосходят близких к единице. Итерируя процесс, получаем неравенство

$$\left|f(z)\Big/\prod_{n=1}^{N}b_{z_n}(z)\right|\leqslant 1,\qquad z\in\mathbb{D},\quad N\geqslant 1.$$

Так как $\prod_{n=1}^{N}b_{z_n}(z)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$, отсюда следует, что $f(z)=0$. $\not<$

10 Теорема Римана

Определение. Области Ω_1, Ω_2 называются *конформно эквивалентными*, если существует конформное отображение Ω_1 на Ω_2.

Теорема Римана утверждает, что любые две односвязные области $\Omega_{1,2} \neq \mathbb{C}$ конформно эквивалентны.

Теорема 10.1 (теорема Римана об униформизации). Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, причём $\Omega \neq \mathbb{C}$. Тогда существует конформное отображение области Ω на единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Доказательство.

(1) *Сведение к случаю $\Omega \subset \mathbb{D}$, $0 \in \Omega$.*

Ясно, что вместо области Ω можно рассматривать любую область, конформно эквивалентную ей. Несколькими конформными отображениями “поместим” область Ω внутрь единичного круга. Так как $\Omega \neq \mathbb{C}$, существует точка $z_0 \notin \Omega$. Последнее означает, что $|z - z_0| > 0$ в Ω, то есть в Ω корректно определена ветвь логарифма $g\colon z \mapsto \log(z - z_0)$. Покажем, что g — конформное отображение на свой образ $\Omega_1 = g(\Omega)$. Действительно, если $g(z_1) = g(z_2)$, то

$$z_1 - z_0 = e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} = z_2 - z_0,$$

то есть $z_1 = z_2$.

Покажем, что $\Omega_1 \cap (\Omega_1 + 2\pi i) = \varnothing$. Пусть $w = g(z_1)$, $w + 2\pi i = g(z_2)$. Тогда

$$z_1 - z_0 = e^{g(z_1)} = e^{w} = e^{w+2\pi i} = e^{g(z_2)} = z_2 - z_0,$$

то есть $z_1 = z_2$, что приводит к противоречивому равенству

$$w = g(z_1) = g(z_2) = w + 2\pi i.$$

Выберем точку $a \in \Omega_1 + 2\pi i$, и пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $B(a, \varepsilon) \subset \Omega_1 + 2\pi i$. Тогда $B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_1$. В частности, отображение

$$h\colon z \mapsto \frac{1}{z - a}$$

конформно отображает Ω_1 на свой образ $\Omega_2 = h(\Omega_1)$ — ограниченную область в $\mathbb{C}$. Наконец, преобразованием вида $z \mapsto \delta z + b$ можно конформно отобразить Ω_2 в область Ω_3, удовлетворяющую условиям $0 \in \Omega_3$, $\Omega_3 \subset \mathbb{D}$. Так как как Ω и Ω_3 конформно эквивалентны, можно считать, что $\Omega = \Omega_3$ в условии теоремы.

(2) *Множество аналитических функций*

$$\mathcal{R} = \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{D} \,\middle|\, f(0) = 0, f(z) \neq f(w)\ \forall z, w \in \Omega : z \neq w \right\} \cup \{0\}$$

— *секвенциальный компакт в топологии равномерной сходимости на компактах в* Ω.

Пусть $f_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$. По теореме Монтеля, из последовательности f_n можно выбрать подпоследовательность f_{n_k}, сходящуюся на компактах в Ω к некоторой аналитической функции f.

По теореме Гурвица, любая последовательность однолистных (то есть аналитических и инъективных) отображений сходится к постоянному или однолистному отображению. Следовательно, либо $f(z) \equiv f(0) = 0$ всюду в Ω, либо f — однолистная функция. В обоих случаях $f \in \mathcal{R}$.

(3) *Функционал* $\Psi\colon f \mapsto |f'(0)|$ *достигает максимума на* $\mathcal{R}$.

Обозначим $A = \sup_{f\in\mathcal{R}} \Psi(f)$. Пусть f_n — последовательность функций, таких, что $|f_n'(0)| \to A$. В силу пункта (2), из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность f_{n_k}, сходящуюся на компактах в Ω к некоторой функции $f \in \mathcal{R}$. Так как

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z, \qquad B(0, 2\varepsilon) \subset \Omega,$$

для любой аналитической функции в Ω, и окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \varepsilon\}$ — компакт, то $|f'(0)| = A$. В частности, A конечно, и Ψ достигает своего максимума на множестве $\mathcal{R}$.

(4) *Если* $f \in \mathcal{R}$ *и* $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$, *то существуют такие отображения* $g \in \mathcal{R}$, $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, *что* $f = \varphi \circ g$ *и* $|\varphi'(0)| < 1$.

Пусть существует точка $w \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$. Тогда определена ветвь логарифма

$$\psi\colon z \mapsto \log T_1(f(z)), \quad z \in \Omega, \qquad \text{где } \; T_1(\lambda) = \frac{w - \lambda}{1 - \overline{w}\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Кроме того, так как $\log|T_1(\lambda)| < 0$ в $\mathbb{D}$, функция ψ конформно отображает Ω в подмножество левой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$. Выберем отображение T_2, конформно отображающее $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ на единичный круг $\mathbb{D}$ и такое, что $T_2(a) = 0$, где $a = \log T_1(0)$. Например, можно взять (выбор в действительности невелик) преобразование Мёбиуса

$$T_2\colon \mu \mapsto \frac{a - \mu}{a + \mu}.$$

Далее, определим

$$g(z) = T_2(\log T_1(f(z))), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

По построению, $g \in \mathcal{R}$. Кроме того, $\exp(T_2^{-1}(g(z))) = T_1(f(z))$, то есть

$$f(z) = \varphi(g(z)), \qquad \varphi = T_1^{-1} \circ \exp \circ T_2^{-1},$$

причём φ — аналитическое отображение из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$. Так как $\exp z$ — не однолистна в $\{\operatorname{Re} z < 0\}$, а отображение T_2^{-1} — биекция из $\mathbb{D}$ в $\{\operatorname{Re} z < 0\}$, то φ —

не инъективно, в частности, $\varphi \not\equiv \alpha z$ ни для какого $\alpha \in \mathbb{T}$. По лемме Шварца, $|\varphi'(0)| < 1$.

(5) *Если $f \in \mathcal{R}$ — функция, на которой достигается максимум Ψ, то $f(\Omega) = \mathbb{D}$.*

Пусть $f \in \mathcal{R}$ — функция, на которой достигается максимум Ψ. Если при этом $f(\Omega) \neq \mathbb{D}$, то из предыдущего шага следует, что существуют $g \in \mathcal{R}$, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ такие, что $f = \varphi \circ g$, $|\varphi'(0)| < 1$. Но тогда

$$f'(0) = \varphi'(g(0)) \cdot g'(0) = \varphi'(0) \cdot g'(0),$$

в частности, $\Psi(f) = |f'(0)| < |g'(0)| = \Psi(g)$, что приводит к противоречию. $\not<$

Следствие 10.2. Если область $\Omega \subset \mathbb{C}$ конформно эквивалентна $\mathbb{C}$, то $\Omega = \mathbb{C}$.

Доказательство. Так как конформные отображения сохраняют односвязность, область Ω — односвязна. В силу теоремы Римана, нам достаточно проверить лишь, что области $\mathbb{C}$ и $\mathbb{D}$ не являются конформно эквивалентными. Это вытекает из теоремы Лиувилля. $\not<$

Утверждение 10.3. Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — конформное отображение, то $f(z) = az + b$.

Доказательство. Вычитая константу, можно считать, что $f(0) = 0$. Так как f — аналитическое отображение, то $f(\mathbb{D}) \supset \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как отображение f конформно,

$$f\big(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}\big) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\} = \varnothing.$$

Значит, $|f(z)| \geqslant \varepsilon$ для всех $z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f'(0)}{f(z)} - \frac{1}{z}.$$

У неё устранимая особенность в точке 0, в остальных точках она аналитична. Кроме того, для $|z| \geqslant 1$

$$|g(z)| \leqslant \frac{|f'(0)|}{\varepsilon} + 1.$$

По теореме Лиувилля функция g постоянна. Поскольку f конформно, существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, что $|z_n| \to +\infty$ и $|f(z_n)| \to +\infty$. Значит, $g \equiv 0$, а потому $f(z) = az + b$, и утверждение доказано. $\not<$

Утверждение 10.4. Если f, g — конформные отображения области Ω на единичный круг $\mathbb{D}$, то $\varphi = g \circ f^{-1}$ — преобразование Мёбиуса, $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Доказательство. $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ по построению. Поскольку φ конформно в $\mathbb{D}$, это преобразование Мёбиуса (теорема 9.7). $\not<$

Утверждение 10.5. Пусть $a \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{T}$. Конформное отображение f в теореме Римана можно выбрать так, чтобы для заданной точки $z_0 \in \Omega$ выполнялись равенства $f(z_0) = a$, $f'(z_0) = \alpha |f'(z_0)|$. Более того, этот выбор полностью определяет отображение f.

Доказательство. Возьмём сначала произвольное конформное отображение g области Ω на $\mathbb{D}$. Тогда $h_{\xi,c} = b_{\xi,c} \circ g$ — конформное отображение Ω на $\mathbb{D}$ для любых $\xi \in \mathbb{T}$, $c \in \mathbb{D}$. Кроме того,

$$h_{\xi,c}(z_0) = b_{\xi,c}(g(z_0)), \qquad h'_{\xi,c}(z_0) = b'_{\xi,c}(g(z_0))g'(z_0).$$

Значит, нам достаточно показать, что для любых $a \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{T}$ и $w \in \mathbb{D}$ найдётся преобразование Мёбиуса $b_{\xi,c}$ со свойством

$$b_{\xi,c}(w) = a, \qquad b'_{\xi,c}(w) = \alpha|b'_{\xi,c}(w)|.$$

Пусть сначала $w = 0$, $\alpha = -1$. Тогда подходит отображение

$$b_{1,a} = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \qquad b'_{1,a}(0) = -(1 - |a|^2).$$

В общем случае возьмём $b_{\xi,c} = b_{1,a} \circ b_{\alpha,w}$, тогда $b_{\xi,c}(w) = b_{1,a}(0) = a$ и

$$b'_{\xi,c}(w) = b'_{1,a}(0) \cdot b'_{\alpha,w}(w) = -b'_{\alpha,w}(w) = \frac{\alpha}{1 - |w|^2} = \alpha|b'_{\xi,c}(w)|.$$

Теперь проверим единственность. Пусть f, g — конформные отображения Ω на $\mathbb{D}$, $f(z_0) = g(z_0) = a$, $f'(z_0)/|f'(z_0)| = g'(z_0)/|g'(z_0)|$. Тогда $\varphi = g \circ f^{-1}$ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$. Кроме того, $\varphi(a) = a$,

$$\varphi'(a) = g'(f^{-1}(a))(f^{-1})'(a) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)}.$$

По лемме Шварца, $|\varphi'(a)| \leqslant (1 - |\varphi(a)|^2)/(1 - |a|^2) = 1$. Значит,

$$\left|\frac{g'(z_0)}{f'(z_0)}\right| \leqslant 1.$$

Рассматривая отображение $f \circ g^{-1}$, получаем неравенство

$$\left|\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\right| \leqslant 1.$$

Значит, $|\varphi'(a)| = 1$, и в лемме Шварца для φ' достигается равенство, то есть $\varphi = b_{\alpha,a}$. Поскольку $\varphi(a) = a$, отсюда вытекает, что $a = 0$, $\varphi \equiv z$ и $f \equiv g$. $\not<$

11 Теорема Каратеодори

Определение. *Жорданова кривая* — это непрерывное инъективное отображение γ из единичной окружности $\mathbb{T}$ в $\mathbb{C}$.

Замечание. Из общей топологии следует, что жорданова кривая — гомеоморфизм на свой образ.

Теорема 11.1 (Жордан). Пусть γ — жорданова кривая. Тогда

$$\mathbb{C} \setminus \gamma(\mathbb{T}) = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

где Ω_1 и Ω_2 — дизъюнктные области в $\mathbb{C}$, Ω_1 ограничена и односвязна, Ω_2 — неограничена; и для любых точек $z_1 \in \Omega_1$, $z_2 \in \Omega_2$ и любого пути γ_{z_1,z_2}, соединяющего z_1, z_2, образ γ_{z_1,z_2} пересекает $\gamma(\mathbb{T})$.

Доказательство. Без доказательства.[19] $\not<$

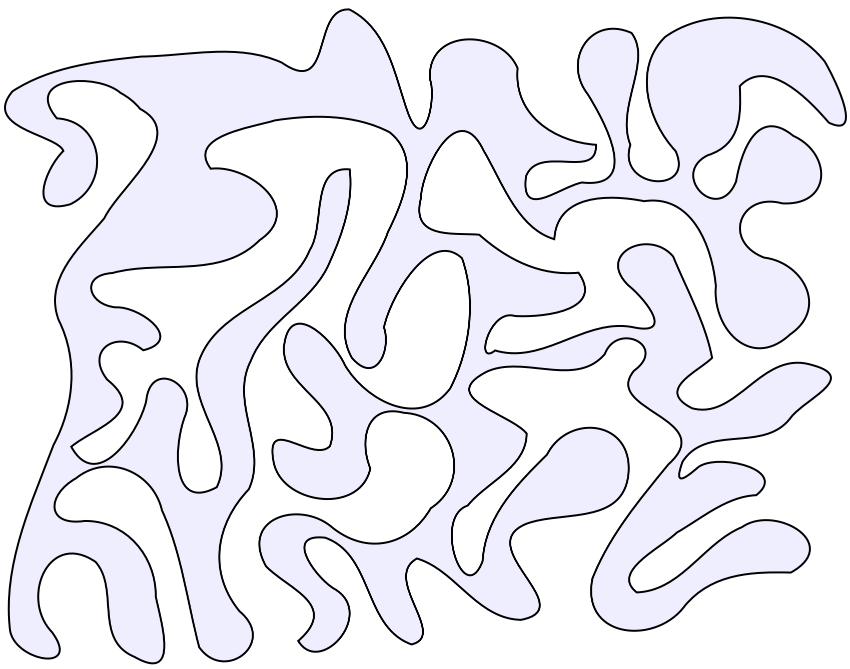


Рис. 21: Визуализация теоремы Жордана

Определение. *Жорданова область* — это внутренняя область (Ω_1 в нашей формулировке теоремы 11.1) жордановой кривой.

Наша цель в этом параграфе — доказать следующую теорему.

Теорема 11.2 (Каратеодори). Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на жорданову область Ω. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$.

Для начала докажем несколько лемм.

[19]Это широко известный факт из топологии — ОМ.

Лемма 11.3. Пусть O — область в $\mathbb{C}$, f — конформное отображение O на $f(O)$. Тогда

$$|f(O)| = \lambda_2(f(O)) = \int\limits_O |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(z),$$

где под $|f(O)|$ понимается площадь множества $f(O)$.

Доказательство. По определению,

$$|f(O)| = \int\limits_{f(O)} 1 \, \mathrm{d}\lambda_2(z) = \int\limits_O |J_f(z)| \, \mathrm{d}\lambda_2(z),$$

где J_f — якобиан f как отображения от двух переменных; $f = u + iv$,

$$\begin{aligned} J_f = \det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} &= [\mathtt{CR}] = \det\begin{pmatrix} u'_x & -v'_x \\ v'_x & u'_x \end{pmatrix} = \\ &= (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |u'_x + iv'_x|^2 = |f'_x|^2 = |f'(z)|^2, \end{aligned}$$

то есть $J_f(z) = |f'(z)|^2$, и лемма доказана. $\not<$

Лемма 11.4. Пусть $\xi \in \mathbb{T}$, $r \in (0,1)$,

$$D(\xi, r) = \mathbb{D} \cap \{z \in \mathbb{C} : |\xi - z| < r\};$$

$\gamma_r = \partial\overline{D(\xi, r)} \cap \mathbb{D}$. Тогда в условиях теоремы Каратеодори для любого $\xi \in \mathbb{T}$ существует такая последовательность $\{r_n\}$, что $r_n \to 0$ и $\ell(f(\gamma_{r_n})) \to 0$.

Доказательство. Оценим длину кривой:

$$\begin{aligned} \ell(f(\gamma_r)) = \int\limits_0^1 |f(\gamma_r(t))'| \, \mathrm{d}t &= \int\limits_0^1 |f'(\gamma_r(t))| \cdot |\gamma'_r(t)| \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int\limits_0^1 |f'(\gamma_r(t))|^2 \cdot |\gamma'_r(t)| \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_0^1 |\gamma'_r(t)| \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Второй множитель не превосходит $\sqrt{2\pi r}$. Разделив на это число обе части неравенства, возведя в квадрат и проинтегрировав по r, получаем неравенство

$$\int\limits_0^1 \frac{\ell(f(\gamma_r))^2}{2\pi r} \, \mathrm{d}r \leqslant \int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f'(\gamma_r(t))|^2 \cdot |\gamma'_r(t)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}r = \int\limits_0^1\int\limits_{\gamma_r} |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}S_1(z) \, \mathrm{d}r,$$

где S_1 — поверхностная мера из предыдущего семестра. По формуле коплощади получаем, что последний интеграл равен $\int_{D(\xi,1)} |f'(z)|^2\, \mathrm{d}\lambda_2(z)$, то есть

$$\int_0^1 \frac{\ell(f(\gamma_r))^2}{2\pi r}\, \mathrm{d}r \leqslant \int_{D(\xi,1)} |f'(z)|^2\, \mathrm{d}\lambda_2(z) \leqslant |\Omega| < \infty,$$

а потому

$$\int_0^1 \frac{\ell(f(\gamma_r))^2}{2\pi r}\, \mathrm{d}r < \infty,$$

и так как $\int_0^1 \frac{1}{r}\, \mathrm{d}r = +\infty$, то существует такая последовательность r_n, сходящаяся к нулю, что $\ell(f(\gamma_{r_n})) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\not<$

Лемма 11.5. Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — непрерывное отображение. Тогда следующие условия равносильны:

(1) f продолжается до отображения из $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$;

(2) f равномерно непрерывно в $\mathbb{D}$;

(3) для любой точки $\xi \in \mathbb{T}$ и любой последовательности r_n, стремящейся к нулю, выполнено
$$\operatorname{diam} f(D(\xi, r_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство.

(1) $\implies$ (2), (3). Пусть f продолжается до непрерывного отображения из $\overline{\mathbb{D}}$ в $\mathbb{C}$ (будем для удобства обозначать его той же буквой). Тогда f непрерывно на компакте, и, значит, равномерно непрерывно. В частности, $\operatorname{diam} f(D(\xi, r_n)) \to 0$ для любой последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к нулю.

(2) $\implies$ (1). Пусть функция f равномерно непрерывна в $\mathbb{D}$. Тогда f ограничена в $\mathbb{D}$, то есть из любой последовательности $\{f(z_n)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Определим f на $\mathbb{T}$ следующим образом:

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}),$$

где $\{f(z_{n_k})\}$ — сходящаяся подпоследовательность $\{f(z_n)\}$, где $z_n \to \xi$. Определённая таким образом функция непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$: нетрудно проверить, что $f(z) \to f(\xi)$, если $z \to \xi$ по $z \in \mathbb{D}$, и что $f(\zeta) \to f(\xi)$, где $\zeta \to \xi$ и $\zeta \in \mathbb{T}$.[20]

Осталось понять, что если $\operatorname{diam}(D(\xi, r_n)) \to 0$ для любой точки $\xi \in \mathbb{T}$ и некоторой последовательности $\{r_n\}$, сходящейся к нулю, то f равномерно непрерывна в $\mathbb{D}$. Пусть это не так. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$, такие, что $|f(z_n) - f(z_{n+1})| > \varepsilon$, хотя $|z_n - z_{n+1}| \to 0$. Можно считать, что $z_n \to \xi \in \overline{\mathbb{D}}$: поскольку $\overline{\mathbb{D}}$ — компакт, можно выбрать подпоследовательность $\{z_{2n_k}\}$, сходящуюся к ξ, и рассмотреть последовательность индексов $\{2n_k\} \cup \{2n_k + 1\}$. Тогда будет выполнено $|f(z_{2n_k}) - f(z_{2n_k+1})| > \varepsilon$.

[20] Детали оставляются в качестве упражнения.

Точка ξ не принадлежит $\mathbb{D}$, так как в окрестности точек $\mathbb{D}$ функция f равномерно непрерывна. Значит, $\xi \in \mathbb{T}$, и

$$\operatorname{diam} f(D(\xi, r_n)) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \text{для} \quad r_{n_k} = \max(|\xi - z_{2n_k}|, |\xi - z_{2n_k+1}|).$$

Противоречие. $\not<$

Лемма 11.6 (вариант принципа симметрии). Пусть $U \subset \mathbb{D}$, $\partial U \cap \mathbb{T} \supset Z$, Z — дуга $\mathbb{T}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — аналитична. Пусть f непрерывно продолжается в $U \cup Z$ и пусть $f|_Z$ — вещественнозначная функция. Тогда f допускает аналитическое продолжение в область $U \cup Z \cup U^*$, где $U^* = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1/\overline{z},\ z \in U\}$.

Доказательство. Определим $\widetilde{f}$ в U^* по правилу $\widetilde{f}(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$. Заметим, что $\widetilde{f}$ аналитична в U^*, и $\widetilde{f}|_Z = f|_Z$, $\widetilde{f}$ — непрерывна в $U^* \cup Z$. Положим

$$F = \begin{cases} f, & U \cup Z, \\ \widetilde{f}, & U^*. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $F\,\mathrm{d}z$ — замкнутая форма в $U \cup Z \cup U^*$ (тест на прямоугольниках). $\not<$

Теорема 11.7 (Каратеодори). Пусть $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на жорданову область Ω. Тогда f продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Покажем, что f продолжается до непрерывного отображения из $\overline{\mathbb{D}}$ в $\overline{\Omega}$. По лемме 11.5 нужно проверить, что $\operatorname{diam} f(D(\xi, r_n)) \to 0$. Возьмём в качестве r_n такую последовательность, что $\ell(f(\gamma_{r_n})) \to 0$ (она существует по лемме 11.4). Докажем, что существуют пределы

$$a_n = \lim_{t\to 0} f(\gamma_{r_n}(t)), \qquad b_n = \lim_{t\to 1} f(\gamma_{r_n}(t)),$$

где $a_n, b_n \in \partial\overline{\Omega}$. Поскольку $\ell(f(\gamma_{r_n})) < \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$|f(\gamma_{r_n}(t_1)) - f(\gamma_{r_n}(t_2))| \leqslant \ell(f(\gamma_{r_n}|_{(0,\delta)})) \to 0,$$

так как $\ell(f(\gamma_{r_n})) < \infty$, то есть для последовательности $\{f(\gamma_{r_n})\}$ выполнен критерий Коши, что и требовалось.

Теперь покажем, что $a_n, b_n \in \partial\Omega$. Если это не так, то $a_n \in \Omega$ (очевидно, предел должен лежать в $\overline{\Omega}$), и существует окрестность $V(a_n) \subset \overline{V(a_n)} \subset \Omega$ и такая точка $w \in \mathbb{D}$ вместе с окрестностью $U(w)$, что $U(w) \subset \overline{U(w)} \subset \mathbb{D}$, $f(U(w)) = V(a_n)$.

Тогда при некотором $\delta > 0$ все точки $\gamma_{r_n}(t)$, где $t \in (0, \delta)$ попадут в $U(w)$, так как $f(\gamma_{r_n}(t)) \in V(a)$, а f — биекция $\mathbb{D}$ на Ω. Но это невозможно, так как

$$\lim_{t\to 0} \gamma_{r_n}(t) \in \mathbb{T},$$

в то время как $\overline{U(w)} \subset \mathbb{D}$. Таким образом, $a_n \in \partial\Omega$. Аналогичный аргумент с переходом к пределу $t \to 1$ показывает, что и $b_n \in \partial\Omega$.

По условию, $\partial\Omega$ — замкнутая жорданова кривая, то есть $\partial\Omega = \Gamma(\mathbb{T})$, где Γ — непрерывная инъекция. Значит, существуют такие точки $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ (зависящие от n), что $\Gamma(z_1) = a_n$, $\Gamma(z_2) = b_n$. Кроме того,

$$|a_n - b_n| \leqslant \ell(f(\gamma_{r_n})) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Так как Γ — гомеоморфизм на свой образ[21], то $|z_1 - z_2| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. В частности, мы можем определить дуги $I^{(n)}_{z_1,z_2} \subset \mathbb{T}$ с концами z_1, z_2 таким образом, что $|I^{(n)}_{z_1,z_2}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Положим $J_n = \Gamma(I^{(n)}_{z_1,z_2})$ и рассмотрим кривую $f(\gamma_{r_n}) \cup J_n$. Нетрудно показать, что это жорданова кривая. Обозначим её внутреннюю область буквой V.

Для начала проверим, что $V \subset \Omega$. Это условие равносильно тому, что

$$\Omega_e = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} \subset V_e = \mathbb{C} \setminus \overline{V}.$$

Очевидно, что существует $\lambda \in \Omega_e \cap V_e$. С другой стороны, области Ω_e, V_e связны. Поэтому, если существует $\lambda^* \in \Omega_e \cap V$, то существует путь $\gamma_{\lambda,\lambda^*}$, соединяющий точки λ, λ^* в Ω_e. Но такой путь по теореме Жордана пересекает $\partial V = \partial V_e$ в некоторой точке η, а $\eta \in \partial\Omega \cup f(\gamma_{r_n}) = W$, $W \cap \Omega_e = \varnothing$. Противоречие. Значит, $\Omega_e \cap V = \varnothing$, и потому $\Omega_e \subset V_e$.

Теперь докажем, что $V = f(D(\xi, r_n))$. По построению,

$$\Omega \setminus f(\gamma_{r_n}) = f(D(\xi, r_n)) \cup f\big(\mathbb{D} \setminus \overline{D(\xi, r_n)}\big) = V_1 \cup V_2,$$

то есть эта область состоит из двух компонент связности. Значит, либо $V \subset V_1$, либо $V \subset V_2$, так как V связно и $V \cap f(\gamma_{r_n}) = \varnothing$. Пусть $V \subset V_1$. Тогда ясно, что V открыто в V_1, так как оба этих множества открыты в $\mathbb{C}$. Кроме того, V замкнуто в V_1, так как если z_* — предельная точка V в V_1, то

$$z_* \in \overline{V} \setminus (\partial\Omega \cup f(\gamma_{r_n})) \subset V.$$

Значит, $V_1 = V$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $V \subset V_2$, то $V = V_2$.

Заметим, что

$$|V_1| = \lambda_2(f(D(\xi, r_n))) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

по построению. Кроме того, $|V_1| + |V_2| = |\Omega| \not\to 0$, то есть $|V_2| \not\to 0$. При этом

$$\operatorname{diam} V \leqslant \operatorname{diam} J_n + \ell(f(\gamma_{r_n})) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

так как Γ — гомеоморфизм. Поскольку площадь V_2 отделена от нуля, а диаметры V стремятся к нулю, мы получаем, что $V = V_1 = f(D(\xi, r_n))$. Таким образом,

$$\operatorname{diam} f(D(\xi, r_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть f равномерно непрерывна в $\mathbb{D}$ и продолжается до непрерывного отображения

[21] Потому что это непрерывная биекция между хаусдорфовыми компактами — см. курс топологии.

на $\overline{\mathbb{D}}$ по лемме 11.5. Будем обозначать продолжение той же буквой f.

Осталось проверить, что f — инъекция на $\mathbb{T}$ (f не может склеивать внутренние точки, поскольку оно конформно, и не может переводить внутренние точки в граничные). Пусть это неверно, и точки $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ таковы, что $f(z_1) = f(z_2) = \zeta \in \partial\Omega$. Тогда $f([z_1, 0] \cup [0, z_2])$ — некоторая жорданова кривая γ, где $[z_1, 0]$ и $[0, z_2]$ — отрезки, соединяющие центр окружности $\mathbb{D}$ с z_1 и z_2. При этом ясно, что $\gamma \subset \overline{\Omega}$ и $\gamma \cap \partial\overline{\Omega} = \zeta$. Обозначим внутреннюю область этой кривой через V. Если U_1, U_2 — секторы $\mathbb{D}$ со сторонами $[z_1, 0]$ и $[0, z_2]$, то либо $f(U_1) = V$, либо $f(U_2) = V$ (см. первую часть доказательства). Пусть $f(U) = V$, где $U = U_1$ или $U = U_2$, $Z = \partial U \cap \mathbb{T}$.

Покажем, что $f(z) = f(z_1) = f(z_2)$ для всех $z \in Z$. Действительно, $f(U) = V$, а потому

$$f(Z) \subset \overline{V} \cap \partial\Omega = \{\xi\} = \{f(z_1)\},$$

то есть $f \equiv \mathrm{const}$ на Z. Поскольку можно домножить f на константу, равную единице по модулю, можно считать, что f принимает на Z вещественные значения. Значит, f можно по лемме 11.6 аналитически продолжить на некоторую область, содержащую Z. Но аналитическая функция, постоянная на отрезке, сама постоянна по теореме единственности аналитических функций, а это невозможно, так как f конформна в $\mathbb{D}$.

Таким образом, мы доказали инъективность, а вместе с ней и теорему. $\not<$

Рассмотрим теперь *задачу Дирихле*. А именно, пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, $f \in C(\partial\Omega)$. Надо найти гармоническую функцию u в Ω, такую, что $u(z) \to f(\xi)$, если $\xi \in \partial\Omega$ и $z \to \xi$.

Следствие 11.8. Пусть Ω — внутренняя область жордановой кривой. Тогда задача Дирихле разрешима с любыми граничными данными $f \in C(\partial\Omega)$.

Доказательство. По теореме Каратеодори и теореме Римана существует такой гомеоморфизм $\varphi\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$, что $\varphi\colon \mathbb{D} \to \Omega$ — конформное отображение. Рассмотрим функцию $\widetilde{f}(\xi) = f(\varphi(\xi))$, где f — данные задачи Дирихле, $\xi \in \mathbb{T}$. Очевидно, что $\widetilde{f} \in C(\mathbb{T})$. Значит, как мы уже знаем, существует функция $\widetilde{u}$, задающаяся как

$$\widetilde{u}(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \overline{\xi} z|^2} \widetilde{f}(\xi)\,\mathrm{d}m(\xi),$$

гармоническая в $\mathbb{D}$ и такая, что $\widetilde{u}(\widetilde{z}) \to \widetilde{u}(\widetilde{\xi})$, если $\widetilde{z} \to \widetilde{\xi} \in \mathbb{T}$. Положим

$$u(z) = \widetilde{u}(\varphi^{-1}(z)), \qquad z \in \Omega.$$

Тогда u гармонична, так как существует такая аналитическая функция $\widetilde{g}$, что

$$\widetilde{u} = \operatorname{Re}\widetilde{g}, \qquad u = \operatorname{Re}\widetilde{g}(\varphi^{-1}(z)).$$

Кроме того, если $\widetilde{\varphi}(\widetilde{z}) = \zeta \to \xi = \varphi(\widetilde{\xi})$, то

$$u(z) = \widetilde{u}(\varphi^{-1}(z)) = \widetilde{u}(\widetilde{z}) \to \widetilde{u}(\widetilde{\xi}) = u(\xi).$$

Значит, u — решение задачи Дирихле. $\not<$

12 Модулярная функция и её применения

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbb{C}_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Теорема 12.1 (о модулярной функции). Существует конформное отображение из $\mathbb{D}$ на универсальную накрывающую $\mathbb{C}_{0,1}$.

Замечание. Теорема утверждает, что $\widehat{\mathbb{C}_{0,1}} \simeq \mathbb{D}$. Тем не менее, $\widehat{\mathbb{C} \setminus \{0\}} \not\simeq \mathbb{D}$.

Определение. Произвольная функция $\varphi\colon \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ из теоремы 12.1 называется *модулярной функцией Лежандра*.

Перед тем как доказывать саму теорему, приведём несколько её практических применений.

Теорема 12.2 (Пикар). Пусть f — целая функция, $f(z) \neq w_1$ и $f(z) \neq w_2$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и некоторых $w_1 \neq w_2$. Тогда f — постоянная функция.

Доказательство. Будем считать, что $w_1 = 0, w_2 = 1$. Пусть $\varphi\colon \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ — модулярная функция. Рассмотрим отображение $h\colon z \mapsto \varphi^{-1}([f \circ \gamma_z])$, где γ_z — путь в $\mathbb{C}$ из нуля в z, $[f \circ \gamma_z] \in \widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ — класс эквивалентности путей в $\mathbb{C}_{0,1}$, содержащий путь $t \mapsto f(\gamma_z(t))$. Это отображение — целая функция, поскольку это суперпозиция аналитических функций. При этом h действует из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{D}$, по теореме Лиувилля, $h \equiv \mathrm{const}$. Значит, отображение $z \mapsto (f \circ \gamma_z)(1)$ постоянно, то есть отображение $z \mapsto f(z)$ постоянно, что и требовалось. $\not<$

***Теорема 12.3 (Кёбе, Пуанкаре).** Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $\partial\Omega$ содержит хотя бы две точки. Тогда существует отображение $\varphi\colon \mathbb{D} \to \Omega$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) φ — аналитическая функция, $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$.

(2) $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \iff z_1 = b(z_2)$ для некоторого $b \in G$, где G — подгруппа группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ единичного круга.

Более того, группа G изоморфна $\pi_1(\Omega)$.

Замечание. Группа G из теоремы Кёбе–Пуанкаре называется *фуксовой группой, порождённой областью* Ω.

Доказательство. Можем считать, что $0, 1 \in \partial\Omega$. Пусть $\varphi\colon \mathbb{D} \mapsto \widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ – модулярная функция. Рассмотрим обратную к ней функцию в окрестности некоторой точки $z_* \in \Omega$. Так как $0, 1 \in \partial\Omega$, эта функция продолжается вдоль любого пути $\gamma \in \widehat{\Omega}$ с началом в точке z_*, и по теореме о монодромии, ее продолжения вдоль путей задают аналитическую функцию на $\widehat{\Omega}$. Обозначим ее через f. Для любого пути $\gamma_z \in \widehat{\Omega}$ с началом в точке $z_* = \gamma(0)$ и концом $\gamma(1) = z$ имеем $\varphi(f(\gamma_z))(1) = z$ так как это равенство выполнено в окрестности z_*, и функция $\varphi \circ f$ аналитична. Значит, множество

$$\mathcal{R} = \left\{ f\colon \widehat{\Omega} \to \mathbb{D} \;\middle|\; f(\gamma_{z_*}) = 0, \text{ и } f(\gamma_z) = f(\gamma_w) \text{ для } \gamma_z, \gamma_w \in \widehat{\Omega} \implies z = w \right\} \cup \{0\}$$

непусто. Используя теоремы Монтеля и Гурвица (как в доказательстве теоремы Римана), мы получаем, что существует отображение $g \in \mathcal{R}$ такое, что $g(\widehat{\Omega}) = \mathbb{D}$. Положим теперь $\varphi(\lambda) = (g^{-1}(\lambda))(1)$ для $\lambda \in \mathbb{D}$. Так как $g \in \mathcal{R}$, такое определение корректно (у кривых, которые g переводит в λ, совпадают концы, поэтому множество $(g^{-1}(\lambda))(1)$ состоит из единственного элемента). Второй пункт остаётся без доказательства. Подробности можно найти в книге *B. Simon, Szego's Theorem and Its Descendants,* глава 9.5. $\nless$

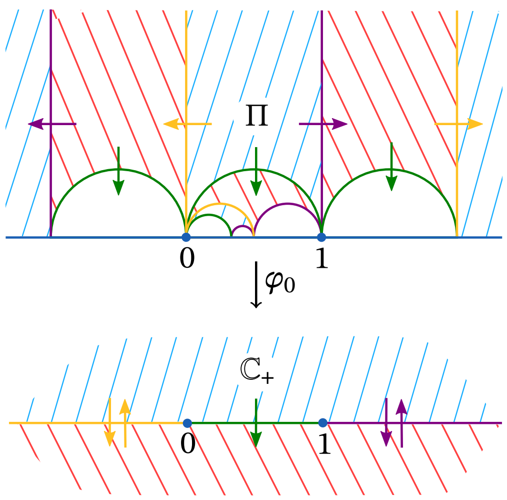
Теорема 12.4 (о модулярной функции). Существует конформное отображение из $\mathbb{D}$ на универсальную накрывающую $\mathbb{C}_{0,1}$.

Доказательство. Будем строить конформное отображение из $\widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ на $\mathbb{C}_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ — очевидно, из этого будет следовать утверждение теоремы. Рассмотрим область

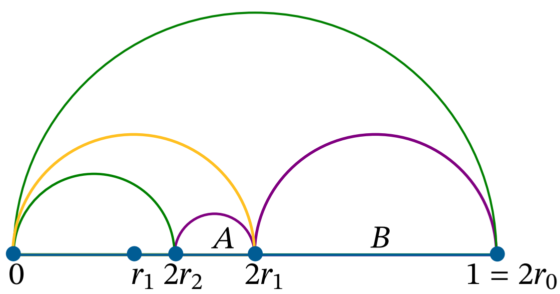
$$\Pi = \left\{z \in \mathbb{C}_+ : \operatorname{Re} z \in (0,1), |z - \tfrac{1}{2}| > \tfrac{1}{2}\right\}.$$

По теореме Римана, существует конформное отображение $\varphi_0 \colon \Pi \to \mathbb{C}_+$. Области $\Pi, \mathbb{C}_+$ можно перевести дробно-линейными преобразованиями в жордановы области (например, отображением $z \mapsto \frac{1}{z-i}$). По теореме Каратеодори, φ_0 продолжается до непрерывного инъективного отображения из $\overline{\Pi}$ на $\overline{\mathbb{C}}_+$ (как суперпозиция непрерывных инъективных отображений). При этом точки $0, 1$ переходят в точки a, b на $\mathbb{R}$, а прямые $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 1$ и полуокружность $\{|z| - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\} \cap \mathbb{C}_+$ переходят в интервалы вещественной прямой. С помощью сдвига, растяжения и отображения $z \mapsto -\frac{1}{z}$ добьёмся того, чтобы бесконечность переходила в бесконечность, $\{0,1\}$ в $\{0,1\}$. Соответственно, прямые $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 1$ отобразятся в прямые $(\infty, 0)$, $(1, \infty)$; $\{|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\} \cap \mathbb{C}_+$ — в интервал $(0,1)$.

Теперь заметим, что поскольку функция φ_0 принимает вещественные значения на границе, можно применить принцип симметрии — обычный для прямых $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$, и вариант принципа симметрии для полуокружности (лемма 11.6). После этого мы можем ещё раз применить принципы симметрии, и так далее (см. рисунок 22a).



(a) Применение принципов симметрии



(b) Радиусы кругов стремятся к нулю

В результате после счётного числа отражений мы продолжим φ_0 на некоторое подмножество $\mathbb{C}_+$. Покажем, что на самом деле получится всё $\mathbb{C}_+$. Для этого достаточно доказать, что при отражениях радиусы кругов с центрами на $\mathbb{R}$ стремятся к нулю.

Пусть r_n — последовательность радиусов смежных кругов, возникающих при отражениях. Заметим, что по построению

$$A \cdot B = r_1^2,$$

(см. рисунок 22b), то есть

$$(2r_1 - 2r_2)(2r_0 - 2r_1) = r_1^2.$$

Аналогично, можно показать, что

$$4(r_n - r_{n+1})(r_{n-1} - r_n) = r_n^2. \tag{12.1}$$

Так как последовательность r_n убывает, существует предел $\lim_{n\to\infty} r_n = a \geqslant 0$. Устремляя в (12.1) n к бесконечности, получаем, что

$$4(a-a)(a-a) = a^2 \implies a = 0,$$

что и требовалось.

Итак, мы получили продолжение $\widetilde{\varphi}_0$ исходного конформного отображения φ_0 на $\mathbb{C}_+$. По построению, $\widetilde{\varphi}_0$ отображает $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_{0,1}$ — все наши отражения не затрагивают точки 0 и 1.

Построим теперь модулярную функцию. Обозначим через $\gamma_{z_*,z}$ путь в $\mathbb{C}_+$, соединяющий фиксированную точку z_* с точкой $z \in \mathbb{C}_+$. Положим $\varphi\colon z \mapsto [\widetilde{\varphi}_0 \circ \gamma_{z_*,z}]$, где $\widetilde{\varphi}_0 \circ \gamma_{z_*,z}\colon t \mapsto \widetilde{\varphi}_0(\gamma_{z_*,z}(t))$ — путь в $\mathbb{C}_{0,1}$, $[\widetilde{\varphi}_0 \circ \gamma_{z_*,z}]$ — класс гомотопных путей в $\mathbb{C}_{0,1}$, содержащий $\widetilde{\varphi}_0 \circ \gamma_{z_*,z}$.

Преобразовывая $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{D}$ конформным образом, можно построить функцию из $\mathbb{D}$ в $\widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$. Она и будет искомой модулярной функцией. Осталось проверить биективность отображения $\varphi\colon \mathbb{C}_+ \to \widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$.

(1) *Сюръективность*: для данного $[\Gamma] \in \widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ выберем в качестве представителя ломаную $\Gamma_0 \in [\Gamma]$ с конечным числом звеньев. Тогда $\Gamma_0 = \Gamma_{01} + \dots + \Gamma_{0n}$, где $\Gamma_{0k} \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ или $\Gamma_{0k} \subset \overline{\mathbb{C}}_-$. Каждый такой кусок — это прообраз пути в $\mathbb{C}_+$, так как $\widetilde{\varphi}_0$ — биекция. А именно, по индукции мы можем определить такие пути γ_k, что $\widetilde{\varphi}_0 \circ \gamma_k = \Gamma_{0k}$, $k = 1, \dots, n$, получим путь $\gamma = \gamma_0 + \dots + \gamma_n$, для которого выполнено

$$\varphi(\gamma(1)) = [\widetilde{\varphi}_0 \circ \gamma] = [\Gamma_0] = [\Gamma].$$

(2) *Инъективность*: построим обратное отображение

$$\psi\colon [\Gamma] \mapsto \psi_1(\Gamma(1)),$$

где $(\Omega_t, \psi_t)_{t\in[0,1]}$ — аналитическое продолжение $\psi_0 = \varphi_0^{-1}$ из области $\Omega_0 = \mathbb{C}_+$ вдоль пути Γ.

Покроем путь Γ кругами (как в определении аналитического продолжения). Пусть B — один из этих кругов. Тогда можно выбрать множество U таким образом, что $\varphi_0(U) = B$ и $\varphi_0|_U$ — биекция. Достаточно, чтобы U пересекало не более двух областей, одна из которых синего, а другая — красного цветов, как на картинке 22a. Тогда это будет следовать из принципа симметрии. Осталось положить $\Omega_t = B$, $\psi_t = \widetilde{\varphi}_0^{-1}$ (где $\widetilde{\varphi}_0^{-1}$ — локально обратное отображение). Полученная функция ψ является аналитической из $\widehat{\mathbb{C}_{0,1}}$ в $\mathbb{C}_+$. Таким образом, $\psi(\varphi(z)) = z$ для всех $z \in \Pi$. Раз функции аналитические, по теореме единственности это равенство выполнено всюду. $\not<$

Утверждение 12.5 (следствие из теоремы Пикара). Пусть h — мероморфная функция в $\mathbb{C}$, и пусть существуют различные точки w_1, w_2, w_3, такие, что $h(z) \neq w_{1,2,3}$ на $\mathbb{C}$. Тогда $h \equiv \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f : z \mapsto \frac{1}{h(z) - w_1}.$$

В полюсах h эта функция имеет устранимые особенности (f там можно доопределить нулём). Значит, f — целая функция, и

$$f(z) \neq \frac{1}{w_2 - w_1}, \qquad f(z) \neq \frac{1}{w_3 - w_1}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$. Таким образом, по теореме Пикара $f \equiv \text{const}$ и $h \equiv \text{const}$. $\not<$

Пример 12.1. Если f, g — целые функции, такие, что $f^n + g^n \equiv 1$, где $n \geqslant 3$, то f, g постоянны.

Доказательство. Действительно,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^n = 1 - \frac{1}{g^n}.$$

Значит, f/g — мероморфная функция, не принимающая значения $\sqrt[n]{1}$, то есть $\{e^{\frac{2\pi i}{n}k} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Если $n \geqslant 3$, то это множество содержит хотя бы 3 элемента, и по предыдущему утверждению, $f/g \equiv \text{const}$. Из начального уравнения получаем, что $g^n \equiv \text{const}$ и $g \equiv \text{const}$ (по непрерывности), и, аналогично, $f^n \equiv \text{const}$ и $f \equiv \text{const}$. $\not<$

13 Принцип Фрагмена–Линделёфа

Обозначение. Будем писать

$$\Gamma_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi},\ r \in (0,\infty),\ \varphi \in (\alpha,\beta)\},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причём $\beta - \alpha = \lambda \in (0, 2\pi]$ — *угол раствора* λ.

Теорема 13.1 (принцип Фрагмена–Линделёфа для угла). Пусть $f\colon \overline{\Gamma}_\lambda \to \mathbb{C}$ — аналитичная в Γ_λ и непрерывная в $\overline{\Gamma}_\lambda$ функция. Пусть также

$$\begin{aligned} &|f(z)| \leqslant M \quad \text{на} \quad \partial\overline{\Gamma}_\lambda; \\ &|f(z)| \leqslant ce^{|z|^\rho}, \quad \text{где } \ \rho : 0 < \rho < \frac{\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

Тогда $|f(z)| \leqslant M$ на Γ_λ.

Пример 13.1. Функция $f(z) = e^{-iz}$ ограничена на $\partial\Gamma_\pi = \partial\overline{\mathbb{C}}_+ - \mathbb{R}$, но не ограничена в $\mathbb{C}_+$ (можно подставить $z = iy$). Действительно, наилучшее ρ, которое мы можем подставить, равно единице, но $\rho \not< \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\pi} = 1$. В частности, теорема ФЛ точна, то есть нельзя усилить условие $\rho < \frac{\pi}{\lambda}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\rho < \rho_1 < \frac{\pi}{\lambda}$. Рассмотрим аналитическую функцию

$$h_\varepsilon(z) = f(z) \cdot e^{-\varepsilon z^{\rho_1}}$$

в угле $\Gamma_\lambda = \Gamma_{\lambda,\alpha,\beta}$, где $\alpha = -\lambda/2$, $\beta = \lambda/2$ (можно всегда считать, что угол симметричен относительно $\mathbb{R}$ — иначе сделаем поворот). Тогда

$$|h_\varepsilon(z)| = |f(z)| \cdot e^{-\varepsilon \operatorname{Re}(z^{\rho_1})}.$$

Считаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^{\rho_1}) &= \operatorname{Re}(e^{\rho_1 \log z}) = \operatorname{Re}(\exp(\rho_1 \log|z| + i\rho_1 \arg z)) \\ &= \exp(\rho_1 \log|z|) \operatorname{Re}(\exp(i\rho_1 \arg z)) = |z|^{\rho_1} \cdot \cos(\rho_1 \arg z), \end{aligned}$$

где везде берётся главная ветвь логарифма. Заметим, что

$$\rho_1 \arg z \in \left[-\frac{\rho_1\lambda}{2}, \frac{\rho_1\lambda}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2} + \eta, \frac{\pi}{2} - \eta\right].$$

где $\eta > 0$, η не зависит от z.

Значит, $\cos(\rho_1 \arg z) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$, не зависящего от $z \in \overline{\Gamma}_\lambda$. Если $z \in \partial\overline{\Gamma}_\lambda$, то

$$|h_\varepsilon(z)| \leqslant M \cdot \exp(-\varepsilon \cdot \delta|z|^{\rho_1}) \leqslant M.$$

Если $z \in \Gamma_\lambda$, то

$$|h_\varepsilon(z)| \leqslant c\exp(|z|^\rho) \cdot \exp(-\varepsilon\delta|z|^{\rho_1}) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0,$$

так как $\rho < \rho_1$. Значит, существует $R_0^\varepsilon > 0 : |h_\varepsilon(z)| \leqslant M$ на $\partial(\overline{\Gamma}_\lambda \cap \overline{B(0,R)})$ для всех $R \geqslant R_0^\varepsilon$. Следовательно, по принципу максимума для ограниченной области $\Gamma_\lambda \cap B(0,R)$ получаем $|h_\varepsilon(z)| \leqslant M + \varepsilon$ для всех $\Gamma_\lambda \cap B(0,R)$. Тогда $|h_\varepsilon(z)| \leqslant M + \varepsilon$ на Γ_λ, то есть

$$|f(z) \cdot \exp(-\varepsilon z \rho_1)| \leqslant M + \varepsilon \qquad \forall z \in \Gamma_\lambda.$$

Фиксируя z, устремим ε к нулю. Получаем $|f(z)| \leqslant M$, что и требовалось. $\nless$

Теорема 13.2 (принцип Фрагмена–Линделёфа для полосы). Пусть

$$\Pi_b = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < b\},$$

$f \colon \overline{\Pi}_b \to \mathbb{C}$ — непрерывная, аналитичная в Π_b функция. Пусть $|f(z)| \leqslant M$ на $\partial\overline{\Pi}_b$ и $|f(z)| \leqslant c \cdot \exp(e^{\rho|z|})$ для некоторого $\rho \in (0, \frac{\pi}{2b})$ и всех $z \in \Pi_b$, где $c > 0$. Тогда $|f(z)| \leqslant M$ на Π_b.

Упражнение. Покажите, что условие $\rho < \frac{\pi}{2b}$ нельзя ослабить.

Доказательство. Выберем $\rho < \rho_1 < \frac{\pi}{2b}$ и положим

$$h_\varepsilon(z) = f(z) \exp(-\varepsilon \cosh(\rho_1 z)).$$

Тогда

$$|h_\varepsilon(z)| = |f(z)| \exp(-\varepsilon \operatorname{Re}(\cosh(\rho_1 z)))$$

При этом

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\cosh(\rho_1 z)) &= \tfrac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{\rho_1 z} + e^{-\rho_1 z}),\\
&= \tfrac{1}{2}(e^{\rho_1 \operatorname{Re} z} \cos(\rho_1 \operatorname{Im} z) + e^{-\rho_1 \operatorname{Re} z} \cos(\rho_1 \operatorname{Im} z)),\\
&= \cosh(\rho_1 \operatorname{Re} z) \cdot \cos(\rho_1 \operatorname{Im} z).
\end{aligned}$$

Значит,

$$|h_\varepsilon(z)| = |f(z)| \exp(-\varepsilon \cosh(\rho_1 \operatorname{Re} z) \cos(\rho_1 \operatorname{Im} z)).$$

Пусть $\delta > 0 : \cos(\rho_1 \operatorname{Im} z) \geqslant \delta$ для всех $z \in \overline{\Pi}_b$. Тогда $|h_\varepsilon(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant M$ на $z \in \partial\overline{\Pi}_b$. С другой стороны,

$$|h_\varepsilon(z)| \leqslant \exp\left(e^{\rho|z|} - \varepsilon \cosh(\rho_1 \operatorname{Re} z)\right) \xrightarrow[z \to \infty]{z \in \Pi_b} 0,$$

так как $\rho < \rho_1$. По принципу максимума для ограниченных областей $|h_\varepsilon(z)| \leqslant M + \varepsilon$ на Π_b. Значит, $|f(z)| = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} |h_\varepsilon(z)| \leqslant M$. $\nless$

Теорема 13.3 (теорема Адамара о трёх прямых). Пусть функция f аналитична в полосе $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$ и непрерывна в её замыкании. Если f ограничена в этой полосе, и

$$M(t) = \sup_{\operatorname{Re} z = t} |f(z)|, \qquad t \in [a, b],$$

то $\log M$ — выпуклая функция на промежутке $[a,b]$. В частности,

$$M(x) \leqslant M(a)^t \cdot M(b)^{1-t} \qquad \text{для} \;\; x = ta + (1-t)b.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = M(a)^{\frac{z-b}{z-a}} M(b)^{\frac{a-z}{a-b}}$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ имеем

$$|h(a+iy)| = M(a), \qquad |h(b+iy)| = M(b).$$

Пусть $g(z) = \frac{f(z)}{h(z)}$. Тогда $|g(z)| \leqslant 1$ на $\partial\overline{\Pi}_{a,b}$, где $\Pi_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$. Так как f ограничена, то

$$|g(z)| \leqslant c_1 \cdot e^{\frac{c_2|z|}{|a-b|}} \qquad \forall z \in \Pi_{a,b},$$

где $c_2 > 0$, и по теореме Фрагмена–Линделёфа $|g(z)| \leqslant 1$ на $\Pi_{a,b}$, то есть $|f(z)| \leqslant |h(z)|$ для любого $z \in \Pi_{a,b}$. Пусть $x = \operatorname{Re} z$. Тогда $|h(z)| = M(a)^{\frac{x-b}{a-b}} \cdot M(b)^{\frac{a-x}{a-b}}$,

$$\log M(x) \leqslant \frac{x-b}{a-b} \log M(a) + \frac{a-x}{a-b} \log M(b).$$

Заметим, что $x = at + b(1-t)$, где $t = \frac{x-b}{a-b}$:

$$a \cdot \frac{x-b}{a-b} + b\left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right) = \frac{a(x-b) - b(a-x)}{a-b} = \frac{ax - bx}{a-b} = x.$$

Значит,

$$\log M(ta + (1-t)b) \leqslant t \log M(a) + (1-t) \log M(b)$$

для любого $t \in (0,1)$. Такое же неравенство для $x_1, x_2 : a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ означает, что $\log M$ — выпуклая функция на $[a,b]$. $\not<$

14 Теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера

Теорема 14.1 (Вейерштрасс). Пусть $\{a_n\}$ — последовательность комплексных[22] чисел, причём $|a_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая целая функция f, что $\{a_n\}$ — это последовательность нулей f, причём каждый ноль имеет кратность, равную числу членов последовательности, совпадающих с ним.

Замечание. Условие на стремление модулей a_n к бесконечности эквивалентности требованию дискретности множества нулей. Это условие необходимо: если f обращается в ноль на множестве, содержащем предельную точку, то $f \equiv 0$ в $\mathbb{C}$ по теореме единственности.

Какую функцию можно было бы придумать? $f = \prod(z - a_n)$ — плохо, так как произведение не сходится. Более правдоподобный кандидат —

$$f = z^k \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

но эта функция определена только тогда, когда $\sum 1/a_n < \infty$.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция

$$G(a, p) = \begin{cases} z, & \text{если } a = 0, \\ \left(1 - \frac{z}{a}\right) \exp\left(1 + \frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a}\right)^p\right), & \text{иначе,} \end{cases}$$

называется *множителем Вейерштрасса*.

Отметим, что $G(a, p)$ — целая функция для всех a и p, и $(G(a, p))(a) = 0$.

Утверждение 14.2. Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $|a_n| \to +\infty$. Тогда произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} G(a_n, n)$$

сходится как произведение аналитических функций.

Доказательство. Докажем, что произведение сходится равномерно на $\overline{B(0, R)}$ к некоторой функции, не обращающейся в ноль на $\overline{B(0, R)}$. Найдём такое N, что $\frac{R}{|a_n|} \leqslant \frac{1}{2}$ для всех $n \geqslant N$. Тогда условие сходимости равносильно тому, что

$$\prod_{n=N}^{\infty} G(a_n, n) = \prod_{n=N}^{\infty} \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right) \tag{14.1}$$

сходится равномерно к функции без нулей в $\overline{B(0, R)}$, где выбрана главная ветвь логарифма. Заметим, что каждый множитель в (14.1) можно представить в следующем

[22] необязательно попарно различных

виде:
$$c_n(z) = \left[\log(1-w) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}\right] = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k.$$

Значит,
$$|c_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^k \leqslant \left[z \leqslant \overline{B(0,R)}\right] \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n},$$

то есть
$$|c_n(z)| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{для } z \in \overline{B(0,R)}.$$

Значит, по признаку Вейерштрасса сходимости рядов $\sum_{n \geqslant N} c_n(z)$ сходится равномерно в $\overline{B(0,R)}$, что и требовалось. $\not<$

Доказательство теоремы Вейерштрасса. Пусть $E = \{a_n\}_{n=1}^{M}$, где M — либо натуральное число, либо бесконечность. Функция $f = \prod_{n \geqslant 1} G(a_n, n)$ решает задачу, так как $f(a_n) = 0$ и $f(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus E$, поскольку $\prod_{n=N}^{\infty} G(a_n, n)$ не имеет нулей в круге $B(0, |z|+1)$ при большом N, а $\prod_{k=1}^{N-1} G(a_k, k)$ обнуляется только на $\{a_k\}_{k=1}^{N-1}$. $\not<$

Следствие 14.3. Пусть f — мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Тогда существуют целые функции h_1, h_2, такие, что $f = h_1/h_2$ всюду, кроме полюсов f.

Доказательство. Пусть E — множество полюсов f. Это дискретное подмножество $\mathbb{C}$. Построим h_2 по правилу
$$h_2 = \prod_{n=1}^{\infty} G(a_n, n),$$
где $\{a_n\}_{n \geqslant 1} = E$; каждый член последовательности повторяется столько раз, какова кратность полюса f. Тогда h_2 — целая функция, и $f \cdot h_2$ — аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus E$, причём каждая точка E — устранимая особенность. Значит, $h_1 = f \cdot h_2$ — целая функция, и утверждение доказано. $\not<$

Замечание. Если $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty$, то сходится произведение $\prod_{n \geqslant 1} G(a_n, p)$. Действительно, в доказательстве утверждения о произведениях Вейерштрасса,
$$|c_n(z)| = \left|\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p\right| = O\left(\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p+1}\right) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Значит, ряд $\sum |c_n(z)|$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$.

Теорема 14.4 (Миттаг-Леффлер). Пусть E — дискретное подмножество $\mathbb{C}$, каждой точке $a \in E$ сопоставлена функция
$$\varphi_a(z) = \frac{c_{a,-1}}{z-a} + \cdots + \frac{c_{a,-N_a}}{(z-a)^{N_a}},$$
где $N_a \in \mathbb{N}$. Тогда существует мероморфная функция f, множество особенностей которой совпадает с E, и такая, что для любой точки $a \in E$ главная часть ряда Лорана f в окрестности a совпадает с φ_a.

Доказательство. Занумеруем точки E так, что $E = \{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$, $|a_n| \to +\infty$. Для любого $n \in \mathbb{N}$, φ_{a_n} — аналитическая функция в круге $B(0, \frac{2}{3}|a_n|)$. Значит, существуют такие многочлены p_n, что

$$\max_{z\in B(0,|a_n|/2)} |\varphi_{a_n} - p_n|(z) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

так как ряд Тейлора φ_{a_n} сходится равномерно в $B(0, |a_n|/2)$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \big(\varphi_{a_n}(z) - p_n(z)\big), \quad \text{где} \;\; z \in \mathbb{C} \setminus E.$$

Это аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus E$, так как для любого компакта K, не пересекающегося с E, найдётся такое число $N \in \mathbb{N}$, что

$$|\varphi_{a_n}(z) - p_n(z)| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad (\forall z \in K)(\forall n > N).$$

Значит, ряд $\sum_{n=N}^{\infty}(\varphi_{a_n}(z) - p_n(z))$ сходится равномерно к аналитической функции. Для любого $a_n \in E$ главная часть ряда Лорана f имеет вид φ_{a_n} (надо снова рассмотреть суммы $\sum_{N+1}^{\infty}, (\varphi_{a_n}(z) - p_n(z)\big)$ и $\sum_1^{N-1}$, особенность в a_n имеет только $(\varphi_{a_n}(z) - p_n(z)\big))$.

$\not<$

15 Рост и коэффициенты ряда Тейлора целых функций

Определение. Число $\rho \in [0, +\infty]$ называется *порядком целой функции* f, если

$$\rho = \inf\{k > 0 : |f(z)| \leqslant c_k \cdot e^{|z|^k} \ \forall z \in \mathbb{C},\ c_k > 0\}.$$

Определение. Пусть f — целая функция порядка $\rho \in (0, \infty)$. Тогда *типом* функции f относительно порядка p называется число

$$\sigma = \inf\{A > 0 : |f(z)| \leqslant c_A \cdot e^{A|z|^\rho} \ \forall z \in \mathbb{C},\ c_A > 0\}.$$

Пример 15.1. Функция e^{az} имеет порядок 1 и тип a.

Пример 15.2. Поймём, что порядок и тип функции $z \sin z$ равны единице. Действительно,

$$|z \sin z| \leqslant |z| e^{|z|} = e^{|z| + \log |z|} \leqslant m_\varepsilon \exp(|z|^{1+\varepsilon}).$$

Таким образом, порядок $\leqslant 1$. С другой стороны, если $z_y = iy$, то $|z_y \sin z_y| \sim |z_y| \frac{e^{|z_y|}}{2}$. Значит, не существует такого $\varepsilon > 0$, что

$$|z_y| \frac{e^{|z_y|}}{2} \leqslant m_\varepsilon \cdot e^{|z|^{1-\varepsilon}}.$$

Пример 15.3. У функции e^{3z^2} порядок 2 и тип 3.

Теорема 15.1. Пусть $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ — целая функция. Тогда

$$\rho = \limsup_{n \to \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|c_n|}}.$$

Если же $\rho > 0$ — порядок f, то тип функции f определяется по формуле

$$\sigma = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{n}{e\rho} \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \right).$$

Пример 15.4. Рассмотрим функцию

$$f(z) = e^z = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Проверим первую формулу:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{n \log n}{\log n!} = \left[n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n (1 + o(1)) \right] = \limsup_{n \to \infty} \frac{n \log n}{c + \log n + n \log \frac{n}{e}} = 1,$$

и это действительно совпадает с ρ.

Вторая формула:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{e\cdot 1}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}(2\pi n)^{-1/2n}\cdot\frac{e}{n}\right)(1+o(1)) = 1 = \sigma.$$

Лемма 15.2. Пусть $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ — целая функция, $M_r(f)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$. Если $M_r(f)\leqslant e^{Ar^k}$, то

$$|c_n| \leqslant m_{k,A}\left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k} \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{15.1}$$

Доказательство. Имеем

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M_r(f)}{r^n} \leqslant \exp(Ar^k - n\log r).$$

Найдём минимум выражения справа по r:

$$(Ar^k - n\log r)' = kAr^{k-1} - \frac{n}{r} = 0 \iff kAr^k = n,$$

откуда

$$|c_n| \leqslant \exp\left(\frac{n}{k}-\frac{n}{k}\log\frac{n}{kA}\right) = e^{n/k}\cdot\left(\frac{n}{kA}\right)^{-n/k} = \left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k},$$

что и требовалось. ⊄

Лемма 15.3. Если $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ — целая функция, коэффициенты c_n которой удовлетворяют неравенству (15.1), то для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $x_\varepsilon>0$, что

$$|f(z)| \leqslant x_\varepsilon e^{(A+\varepsilon)|z|^k} \qquad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Доказательство. Считаем:

$$|f(z)| \leqslant \sum |c_n|\cdot|z|^n = [|z|=r] = \sum |c_n| r^n \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k}\cdot r^n. \tag{15.2}$$

Можно прибавить к f многочлен $p=-\sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j$, тогда оценка верна или неверна для f и $f+p$ одновременно, и можно считать, что в последней сумме (15.2) суммирование ведётся от $n\geqslant [k]+1$. Пусть $m_n=[n/k]$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{eAk}{n}\right)^{n/k}\cdot r^n &\leqslant c_1\cdot\sum_{n\geqslant [k]+1}\left(\frac{eA}{m_n}\right)^{m_n}(r^k)^{m_n}\cdot r^{k+1}\\ &\leqslant c_2\left(\sum_{m\geqslant 1}\left(\frac{eA}{m}\right)^m (r^k)^m\right) r^{k+1}\\ &\leqslant c_3\sum_{m\geqslant 1}\frac{(r^k)^m}{m!}\cdot\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\cdot\frac{e^m A^m}{m^m}\cdot r^{k+1}\end{aligned}$$

$$= c_4 r^{k+1} \sum_{m\geqslant 1} \frac{(Ar^k)^m}{m!}\sqrt{m} \leqslant [(1+\varepsilon)^m \geqslant c_\varepsilon \sqrt{m}]$$
$$\leqslant c_\varepsilon r^{k+1} \sum_{m\geqslant 1} \frac{(A(1+\varepsilon)r^k)^m}{m!} \leqslant \widetilde{c}_\varepsilon e^{A(1+2\varepsilon)r^k},$$

что завершает доказательство. $\not<$

Определение. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — последовательности вещественных чисел. Будем писать $a_n \leqslant_n b_n$, если существует такая возрастающая последовательность индексов n_j, что $a_{n_j} \leqslant b_{n_j}$ для всех j.

Доказательство теоремы 15.1. Пусть $\rho \in (0, \infty)$ — порядок f. Тогда по доказанным леммам

$$c\left(\frac{e(\rho-\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho-\varepsilon}} \leqslant_n |c_n| \leqslant c\left(\frac{e(\rho+\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}} \qquad \text{при больших } n,$$

где левое неравенство выполнено, так как иначе порядок f не превосходил бы $\rho-\varepsilon$ по второй лемме. Значит,

$$\left(\frac{n}{\varepsilon(\rho+\varepsilon)}\right)^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{|c_n|} \leqslant_n \left(\frac{n}{e(\rho-\varepsilon)}\right)^{\frac{n}{\rho-\varepsilon}}.$$

Логарифмируя, получаем неравенства

$$\frac{n}{\rho+\varepsilon}(\log n + \mathrm{const}) \leqslant \log\frac{1}{|c_n|} \leqslant_n \frac{n}{\rho-\varepsilon}(\log n + \widetilde{\mathrm{const}}).$$

Тогда

$$\frac{n\log n(1+o(1))}{\log\frac{1}{|c_n|}} \leqslant \rho+\varepsilon \qquad \text{при больших } n,$$
$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log\frac{1}{|c_n|}} \leqslant \rho \qquad \text{так как } \varepsilon \text{ — любое.}$$

Но для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая последовательность индексов n_j, что

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{n_j \log n_j}{\log\frac{1}{|cn_j|}} \geqslant \rho-\varepsilon, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log\frac{1}{|c_n|}}.$$

Посчитаем теперь формулу для σ. Если ρ — порядок f, и σ — тип f относительно ρ, то по леммам

$$\left(\frac{e(\sigma-\varepsilon)\rho}{n}\right)^{n/\rho} < f < \left(\frac{e(\sigma+\varepsilon)\rho}{n}\right)^{n/\rho}$$

$\not<$

Упражнение. Если f — целая функция, то порядок функций f и f' совпадает.

16 Формула Йенсена

Теорема 16.1 (Йенсен). Пусть f — функция, непрерывная в $\overline{B(0,r)}$ и аналитическая в $B(0,r)$, не имеющая нулей в $C(0,r) = \partial\overline{B(0,r)}$, $f(0) \neq 0$. Пусть $a_1, \ldots, a_N$ — нули f с учётом кратности. Тогда

$$\log|f(0)| - \sum_{n=1}^{N} \log\frac{|a_n|}{r} = \int_{\mathbb{T}} \log|f(r\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi),$$

где m — нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$, то есть $m(\mathbb{T}) = 1$.

Доказательство.

(1) Пусть $r = 1$, нулей у f нет. Тогда определена ветвь логарифма:

$$\log|f(z)| = \mathrm{Re}(\log f(z)), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

При этом $\log f(z)$ — аналитическая функция, то есть $\log|f(z)|$ — гармоническая функция. Значит, по теореме о среднем

$$\log|f(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log|f(\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi).$$

(2) Пусть $r = 1$, есть нули $a_1, \ldots, a_N$. Рассмотрим произведение Бляшке

$$B = \prod_{j=1}^{N} \frac{|a_j|}{a_j} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}.$$

Тогда f/B — аналитическая функция без нулей в $\mathbb{D}$. К ней можно применить предыдущий пункт, и получить, что

$$\log|f(0)| - \log\prod_{k=1}^{N}|a_k| = \log\left|\frac{f(0)}{B(0)}\right| = \int_{\mathbb{T}} \log\left|\frac{f(\xi)}{B(\xi)}\right| \mathrm{d}m(\xi)$$
$$= [\xi \in \mathbb{T}, |B(\xi)| = 1] = \int_{\mathbb{T}} \log|f(\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi),$$

что и требовалось.

(3) Наконец, пусть r — любое число, большее нуля. Рассмотрим функцию $g(z) = f(rz)$, где $z \in \mathbb{D}$, $\widetilde{a}_n$ — нули g. Тогда

$$\log|g(0)| - \sum_{n=1}^{N} \log|\widetilde{a}_n| = \int_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \log|f(r\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi).$$

Осталось заметить, что $g(w) = 0 \iff f(rw) = 0$, то есть $\widetilde{a}_n = a_n/r$. $\not<$

Определение. Пусть f — целая функция, $r > 0$. Тогда функция $n(r)$, равная количество нулей f в $\overline{B(0,r)}$, называется *считающей функцией нулей*.

Утверждение 16.2. Пусть f — аналитическая в $B(0,r)$ и непрерывная в $\overline{B(0,r)}$ функция, не имеющая нулей на $C(0,r)$ и имеющая нули $a_1,\ldots,a_N$ в $B(0,R)$, занумерованные с учётом кратности. Пусть также $f(0) \neq 0$. Тогда

$$-\sum_{n=1}^{N} \log\frac{|a_n|}{r} = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

где n — считающая функция нулей f.

Доказательство. Покажем, что

$$N\varphi(r) - \sum_{n=1}^{N} \varphi(|a_n|) = \int_0^r n(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{16.1}$$

где $\varphi \in C^1(0,+\infty)$. Подставляя потом $\varphi = \log x$ получим искомую формулу. Занумеруем нули по возрастанию; тогда

$$\begin{aligned}\int_0^r n(t)\varphi'(t) &= \int_0^{|a_1|} n(t)\varphi'(t) + \int_{|a_1|}^{|a_2|} n(t)\varphi'(t) + \int_{|a_2|}^{|a_3|} n(t)\varphi'(t) + \cdots + \int_{|a_N|}^{r} n(t)\varphi'(t)\\ &= 1\cdot\big(\varphi(|a_2|) - \varphi(|a_1|)\big) + 2\big(\varphi(|a_3|) - \varphi(|a_2|)\big) + \cdots + N\big(\varphi(r) - \varphi(|a_N|)\big)\\ &= -\varphi(|a_1|) - \varphi(|a_2|) - \cdots - \varphi(|a_N|) + N\varphi(r),\end{aligned}$$

что и требовалось. $\not<$

Следствие 16.3. Для любой целой функции f, такой, что $f(0) = 1$, выполнена оценка

$$n(r) \leqslant \log M_{er}(f) \qquad \forall r \geqslant 0.$$

Доказательство. По формуле Йенсена и предыдущему утверждению

$$\log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \log|f(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi).$$

Поскольку $f(0) = 1$, первое слагаемое уходит. Подставляя er вместо r, получаем оценку

$$\int_0^{er} \frac{n(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathbb{T}} \log\max_{|z|=er}|f(z)|\,\mathrm{d}m(z) = \log M_{er}(f).$$

Тогда

$$n(r) = n(r)\int_r^{er}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_r^{er}\frac{n(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{er}\frac{n(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \log M_{er}(f),$$

что и требовалось. $\not<$

Теорема 16.4. Пусть f — целая функция конечного порядка $\rho > 0$, $\{a_k\}$ — нули f, занумерованные с учётом кратности в порядке возрастания модуля. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k: a_k \neq 0} \frac{1}{|a_k|^{\rho+\varepsilon}}. \tag{16.2}$$

Доказательство. Можно считать, что $a_k \neq 0$ для любого k и $f(0) = 1$ (деля, если нужно, на z^m и умножая на константу — от этого порядок не изменится). Возьмём $\lambda = \rho + \varepsilon$, $N \in \mathbb{N}$, и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{|a_k|^{\lambda}} = \left[\text{формула (16.1) для } \varphi(t) = \frac{1}{t^{\lambda}}\right] = N\varphi(r) - \int_0^r n\left(\frac{1}{t^{\lambda}}\right)' \mathrm{d}t,$$

где $|a_N| < r$, и в круге $\overline{B(0,r)}$ нет других нулей, кроме $a_1, \ldots, a_N$. Далее,

$$-\int_0^r n\left(\frac{1}{t^{\lambda}}\right)' \mathrm{d}t + N\varphi(r) = \lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} \mathrm{d}t + N\varphi(r) \leqslant \tag{16.3}$$

$$\leqslant \lambda \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} \mathrm{d}t + \lambda \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} \mathrm{d}t \tag{16.4}$$

$$\leqslant \lambda \int_{|a_1|}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} \mathrm{d}t \tag{16.5}$$

$$\leqslant \lambda \int_{|a_1|}^{\infty} \frac{\log M_{et}(f)}{t^{\lambda+1}} \mathrm{d}t \tag{16.6}$$

$$\leqslant \lambda \int_{|a_1|}^{\infty} \frac{|et|^{\rho+\varepsilon/2} \cdot c_{\varepsilon/2}}{t^{\rho+\varepsilon+1}} \tag{16.7}$$

$$= c_{\varepsilon/2} \cdot \lambda \cdot e^{\rho+\varepsilon/2} \int_{|a_1|}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\varepsilon/2}} < \infty, \tag{16.8}$$

где (16.4) выполнено, так как $n(t) \geqslant N$ при $t \geqslant r$, (16.6) — по следствию 16.3.

Таким образом, все частичные суммы ряда (16.2) ограничены некоторым фиксированным числом, то есть ряд сходится. $\not<$

Следствие 16.5. Пусть f — целая функция конечного порядка ρ, $\{a_k\}$ — её нули, занумерованные с учётом кратности по возрастанию модуля. Тогда сходится произведение Вейерштрасса $\prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, [\rho])$. В частности,

$$f = \prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, [\rho]) \cdot e^{g},$$

где g — целая функция.

Доказательство. Мы знаем, что произведение $\prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, p)$ сходится, если

$$\sum_{k: a_k \neq 0} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} < \infty.$$

Осталось заметить, что $[\rho] + 1 > \rho$, и воспользоваться предыдущей теоремой,

$$g = \log \left(\frac{f}{\prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, [\rho])} \right).$$

$\nless$

17 Теорема Адамара о факторизации целых функций

Теорема 17.1 (Адамар). Пусть f — целая функция конечного порядка $\rho > 0$, $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ — нули, занумерованные с учётом кратности по возрастанию модуля, за исключением нуля в начале координат. Пусть $p = [\rho]$. Тогда существует многочлен P_p степени $\leqslant p$, такой, что

$$f(z) = z^m e^{P_p(z)} \prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, p),$$

где $m \geqslant 0$ — кратность f в нуле.

Разобьём доказательство этой теоремы на несколько лемм.

Лемма 17.2. Пусть g — аналитическая в $\mathbb{D}$ и непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$ функция, $g(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Тогда существует такая константа $c \in \mathbb{R}$, что

$$\log g(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)| \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, \mathrm{d}m(\xi) + ic, \tag{17.1}$$

где $\log g$ — произвольная ветвь логарифма функции g.

Доказательство. Обозначим правую часть формулы (17.1) через $F(z)$. Тогда

$$\operatorname{Re} F(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)| \operatorname{Re}\left(\frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\right) \mathrm{d}m(\xi) \tag{17.2}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)| \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\, \mathrm{d}m(\xi) \tag{17.3}$$

$$= \log|g(z)| = \operatorname{Re}(\log g(z)), \tag{17.4}$$

где первое равенство в (17.4) выполнено по теореме 3.10. Поскольку функции F и $\log g$ аналитичны, а их вещественные части равны, эти функции совпадают с точностью до мнимой константы, то есть $F = \log g + ic$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. $\not<$

Лемма 17.3. Пусть g — аналитическая в $\mathbb{D}$ и непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$ функция, $g(z) \neq 0$ на $\mathbb{T}$, B — произведение Бляшке, составленное из нулей функции g. Тогда

$$\log g(z) - \log B(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)| \frac{1+\xi z}{1-\bar{\xi}z}\, \mathrm{d}m(\xi) + ic$$

для некоторого $c \in \mathbb{R}$ в любой односвязной области в $\mathbb{D}$, не содержащей нулей g.

Доказательство. Применим предыдущую лемму к функции g/B (ясно, что она не равна нулю в $\mathbb{D}$). Получим

$$\log\frac{g}{B} = \int\limits_{\mathbb{T}} \log\frac{|g(\xi)|}{|B(\xi)|} \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\, \mathrm{d}m(\xi) + ic \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Осталось заметить, что в области из условии $\log g$ и $\log B$ определены, а потому $\log \frac{g}{B} = \log g - \log B$. $\not<$

Доказательство теоремы 17.1 Адамара. Зафиксируем $r > 0$, $g\colon r \mapsto f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$ — аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и непрерывная в $\overline{\mathbb{D}}$. Будем считать r таким, что $g(z) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{T}$. Пусть $\alpha_k = a_k/r$ — нули g в $\mathbb{D}$, где $k = 1, \ldots, N$, $N = n(r)$, а n — считающая функция нулей f. Деля f на $z^m \cdot c$, можно считать, что $f(0) = g(0) = 1$.

По лемме,

$$\log g(z) - \log B(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)| \frac{1 + \overline{\xi} z}{1 - \overline{\xi} z} \, \mathrm{d}m(\xi) + ic \qquad \forall z \in \Omega, \tag{17.5}$$

где Ω — некоторая односвязная область, не содержащая точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$B(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z}.$$

Хотим дифференцировать формулу (17.5). Так как

$$\frac{1 + \overline{\xi} z}{1 - \overline{\xi} z} = \frac{2}{1 - \overline{\xi} z} - 1,$$

имеем

$$\left(\frac{1 + \overline{\xi} z}{1 - \overline{\xi} z}\right)^{(p+1)} = \frac{2(\overline{\xi})^{p+1} \cdot (p+1)!}{(1 - \overline{\xi} z)^{p+2}}.$$

Далее,

$$\left(\log\left(\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z}\right)\right)^{(p+1)} = \left(-\frac{1}{\alpha_k - z} + \frac{\overline{\alpha}_k}{1 - \overline{\alpha}_k z}\right)^{(p)} = -\frac{p!}{(\alpha_k - z)^{p+1}} + \frac{(\overline{\alpha}_k)^{p+1} \cdot p!}{(1 - \overline{\alpha}_k z)^{p+1}}.$$

Значит,

$$(\log g)^{(p+1)}(z) + \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{p!}{(\alpha_k - z)^{p+1}} - \frac{(\overline{\alpha}_k)^{p+1} \cdot p!}{(1 - \overline{\alpha}_k z)^{p+1}}\right] = \int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\xi)| \frac{2(\overline{\xi})^{p+1} \cdot (p+1)!}{(1 - \overline{\xi} z)^{p+2}} \, \mathrm{d}m(\xi).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|(\log g)^{(p+1)}(z) + \sum_{k=1}^{N} \frac{p!}{(\alpha_k - z)^{p+1}}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{p!}{(1 - |z|)^{p+1}} + \log \max_{\xi \in \mathbb{T}} |g(\xi)| \cdot \frac{2(p+1)!}{(1 - |z|)^{p+2}} \\ &= \frac{p! \cdot N}{(1 - |z|)^{p+1}} + \log M_r(f) \cdot \frac{2(p+1)!}{(1 - |z|)^{p+2}}.\end{aligned}$$

Обозначим $w = rz$ и запишем предыдущее неравенство для функции f:

$$\left| (\log f)^{(p+1)}(w) \cdot r^{p+1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{p!}{\left(\alpha_k - \frac{w}{r}\right)^{p+1}} \right| \leqslant \frac{2(p+1)!}{\left(1 - \frac{|w|}{r}\right)^{p+1}} \left(N + \frac{\log M_r(f)}{1 - \frac{|w|}{r}} \right).$$

Оценим последний множитель (вспомним, что $N = n(r) \leqslant \log M_{er}(f)$):

$$N + \frac{\log M_r(f)}{1 - \frac{|w|}{r}} \leqslant \log M_{er}(f) \cdot \left(1 + \frac{r}{r - |w|}\right) \leqslant ((er)^{\rho+\varepsilon} + c_\varepsilon) \left(1 + \frac{r}{r - |w|}\right)$$

для любого r и некоторого $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\left| (\log f)^{(p+1)}(w) \cdot r^{p+1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{p!}{\left(\alpha_k - \frac{w}{r}\right)^{p+1}} \right| \leqslant \frac{2(p+1)!}{(r - |w|)^{p+1}} ((er)^{\rho+\varepsilon} + c_\varepsilon) \left(1 + \frac{r}{r - |w|}\right).$$

Выберем ε так, что $\rho + \varepsilon < [\rho] + 1 = p + 1$. Тогда при w в круге $B(0, R)$ и $r \to \infty$ правая часть стремится к нулю. Значит,

$$(\log f)^{(p+1)}(w) = -p! \sum_{k=1}^{N_*} \frac{1}{(a_k - w)^{p+1}}, \tag{17.6}$$

где N_* — число нулей f, если оно конечно, и бесконечность в противном случае. Последний ряд сходится (доказывали). Формула (17.6) верна в односвязной области Ω, не содержащей нулей f.[23] Тогда

$$\frac{-p!}{(a_k - w)^{p+1}} = \left(\log\left(1 - \frac{w}{a_k}\right) + \frac{w}{a_k} + \cdots + \left(\frac{w}{a_k}\right)^p \right)^{(p+1)} = (\log G(a_k, p))^{(p+1)},$$

так как

$$\left(\log\left(1 - \frac{w}{a_k}\right)\right)^{(p+1)} = (\log(a_k - w))^{(p+1)} = -\left(\frac{1}{a_k - w}\right)^{(p)} = -\frac{p!}{(a_k - w)^{p+1}}.$$

Таким образом,

$$\left((\log f)(w) - \log\left[\prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, p)\right](w) \right)^{(p+1)} \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Значит,

$$\log f(w) - \log \prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, p)(w) = P_p(w),$$

[23] Я не уверен на 100%, что это то, что имелось в виду. На картинке плоскость с разрезами, проходящими через нули f, за исключением начала координат. (OM)

где P_p — многочлен степени не выше p, а потому

$$f(w) = e^{P_p(w)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} G(a_k, p), \tag{17.7}$$

так как $0 \in \Omega$ в любой области Ω указанного вида, P_p не зависит от выбора, и формула (17.7) верна всюду в $\mathbb{C}$. $\not<$

Утверждение 17.4 (формула произведения для синуса).

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}.$$

Она целая, так как

$$g(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi\sqrt{z})^{2n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!} z^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n.$$

Нетрудно проверить, что g имеет порядок $\rho = \frac{1}{2}$. Тогда $[\rho] = p = 0$, и по теореме Адамара

$$\frac{\sin \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}} = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right),$$

где $c = g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$. Значит,

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

что и требовалось. $\not<$

Теорема 17.5. Г-функция Эйлера — мероморфная функция без нулей, и

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

где

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

— постоянная Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Это произведение Вейерштрасса с константой $p = 1$; оно сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Ясно, что $G(z-1)$ — тоже целая функция, причём её нули находятся в точках $-\mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$G(z-1) = zG(z)e^{h(z)}, \tag{17.8}$$

так как любая целая функция без нулей представляется в виде e^h — это просто логарифм (здесь $h(z)$ — целая функция). Покажем, что $h \equiv \gamma$. Для этого можно посчитать производную h и доказать, что она равна нулю.

$$\begin{aligned}
(\log G(z))' &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{n}} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right), \\
(\log G(z-1))' &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1+z} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1-z} - \frac{1}{n-1}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-z} - \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{z} + (\log G(z))'.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
h(z) &= \log \frac{G(z-1)}{zG(z)}, \\
h'(z) &= (\log G(z-1))' - (\log G(z))' - \frac{1}{z} = 0.
\end{aligned}$$

Всё эти формулы верны на положительной полуоси, но так как функции аналитичны, это означает, что $h' \equiv 0$ в $\mathbb{C}$ по теореме единственности. Таким образом, мы доказали, что h — константа. Подставим $z = 1$ в формулу (17.8):

$$1 = G(0) = 1 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n} \cdot e^{c}.$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} \cdot \prod_{n=1}^{N} e^{-1/n} \cdot e^c \implies \\
1 &= \lim_{N\to\infty} (N+1) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) \cdot e^c \implies \\
c &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log(N+1)\right) = \gamma,
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Хотим теперь проверить, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} G(z).$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z} G(z)},$$

и покажем, что:

(1) $\widetilde{\Gamma}(z+1) = z\Gamma(z)$;

(2) $\log \widetilde{\Gamma}$ выпукла на $\mathbb{R}_+$.

Тогда по теореме Бора–Моллерупа (см. первый семестр), $\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$ на $\mathbb{R}_+$, а значит $\widetilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ на всём $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Свойство (1) проверяется следующим образом:

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z} G(z)} = \frac{1}{e^{\gamma z} e^{-\gamma} G(z-1)} = \frac{z-1}{(z-1)e^{\gamma(z-1)} G(z-1)} = (z-1)\widetilde{\Gamma}(z-1).$$

Для доказательства (2) посчитаем вторую производную:

$$\begin{aligned}
(\log(ze^{\gamma z} G(z)))'' = (\log z)'' + (\log e^{\gamma z})'' + \sum_{n\geqslant 1} \left(\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right) \leqslant 0 \iff \\
-\frac{1}{z^2} + 0 - \frac{1}{\left(1+\frac{z}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \leqslant 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось. $\not<$

Следствие 17.6 (формула дополнения Γ-функции). Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Доказательство. Считаем:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z)\Gamma(-z) \cdot (-z) \\
&= (-z) \cdot \frac{1}{ze^{\gamma z} \prod_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}} \cdot \frac{1}{(-z)e^{-\gamma z} \prod_{n\geqslant 1} \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{z/n}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n}} \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi z}.
\end{aligned}
$$

$\nless$

18 Граничное поведение гармонических функций в единичном круге

Определение. Пусть μ — борелевский заряд на единичной окружности $\mathbb{T}$. Интегралом Пуассона заряда μ будем называть гармоническую функцию

$$(\mathcal{P}_\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\,\mathrm{d}\mu(\xi).$$

Замечания.

1. Гармоничность этой функции следует, например, из того, что это вещественная часть аналитической функции:
$$(\mathcal{P}_\mu)(z) = \operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z}\,\mathrm{d}\mu(\xi)\right).$$
2. Если $\mu \geqslant 0$, то $\mathcal{P}_\mu \geqslant 0$ в $\mathbb{D}$.
3. Для $u = \mathcal{P}_\mu$ имеет место неравенство
$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi) \leqslant |\mu|(\mathbb{T}).$$
Действительно,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi) &\leqslant \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|r\xi|^2}{|1-r\xi\bar{\zeta}|^2}\,\mathrm{d}\mu(\zeta)\,\mathrm{d}m(\xi)\\ &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|r\xi|^2}{|1-r\xi\bar{\zeta}|^2}\,\mathrm{d}m(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\zeta).\end{aligned}$$
Значение под вторым интегралом равно единице по свойству ядра Пуассона, а потому
$$\int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi) = \int_{\mathbb{T}} |\mu|(\zeta) = |\mu|(\mathbb{T}).$$

Замечание. Если $u \geqslant 0$ — гармоническая функция в $\mathbb{D}$, то

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi) = u(0) < \infty.$$

Теорема 18.1. Пусть u — гармоническая функция в $\mathbb{D}$, причём

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi) < \infty.$$

Тогда существует такой единственный борелевский заряд μ, что $u = \mathcal{P}_\mu$.

В доказательстве используется несколько следствий из теорем Рисса – Маркова и Банаха – Алаоглу из функционального анализа:

1. Если $\{\mu_n\}$ — последовательность зарядов на $\mathbb{T}$, таких, что $|\mu|(\mathbb{T}) \leqslant C$ для всех $n \geqslant 1$, то можно извлечь подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, $*$-слабо сходящуюся к некоторому борелевскому заряду μ на $\mathbb{T}$, то есть для любой функции $\varphi \in C(\mathbb{T})$ существует предел
$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi\, \mathrm{d}\mu_{n_k} = \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi\, \mathrm{d}\mu.$$

2. Выполнено равенство
$$|\mu|(\mathbb{T}) = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi\, \mathrm{d}\mu \right|.$$
В частности, если
$$\int \varphi\, \mathrm{d}\mu_1 = \int \varphi\, \mathrm{d}\mu_2 \qquad \forall \varphi \in C(\mathbb{T}),$$
то $|\mu_1 - \mu_2|(\mathbb{T}) = 0$, то есть $\mu_1 \equiv \mu_2$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{r_n\} \subset [0, 1)$, такую, что $r_n \to 1$. Пусть $\mu_n = u(r_n\xi)\, \mathrm{d}m(\xi)$. По условию,
$$|\mu_n|(\mathbb{T}) = \int\limits_{\mathbb{T}} |u(r_n\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi) \leqslant c \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, существует такая подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, что для любой функции $\varphi \in C(\mathbb{T})$ будет сходимость $\int_{\mathbb{T}} \varphi\, \mathrm{d}\mu_{n_k} \to \int_{\mathbb{T}} \varphi\, \mathrm{d}\mu$. В частности,
$$\mathcal{P}_\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \xi z|^2}\, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - \xi z|^2}\, \mathrm{d}\mu_{n_k} = \lim_{k\to\infty} u(r_{n_k} z),$$

так как для любой функции v, гармонической в $\mathbb{D}$ и непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$, выполнено $v(z) = (\mathcal{P}_{v\, \mathrm{d}m})(z)$. Значит,
$$(\mathcal{P}_\mu)(z) = \lim_{k\to\infty} u(r_{n_k} z) = u(z) \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

то есть $u = \mathcal{P}_\mu$.

Теперь докажем единственность. Если $\widetilde{\mu}$ таково, что $u = \mathcal{P}_{\widetilde{\mu}}$, то $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_{\widetilde{\mu}}$, $\mathcal{P}_{\mu - \widetilde{\mu}} = 0$ в $\mathbb{D}$.

Достаточно показать, что если ν — заряд на $\mathbb{T}$, $\mathcal{P}_\nu \equiv 0$ в $\mathbb{D}$, то $\nu = 0$.

Если $\mathcal{P}_v = 0$ в $\mathbb{D}$, то
$$\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 + \xi z}{1 - \overline{\xi} z}\, \mathrm{d}\nu \right) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{2}{1-\overline{\xi}z} - 1\right) \mathrm{d}\nu\right) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D},\\
&\operatorname{Re}\left(\int \mathrm{d}\nu\right) = \mathcal{P}_\nu(0) = 0 \implies\\
&\operatorname{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\mathrm{d}\nu(\xi)}{1-\overline{\xi}z}\right) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Продифференцируем k раз по z:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\xi}^k\,\mathrm{d}\nu(\xi)}{1-\overline{\xi}z}\right) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}, \implies\\
&\operatorname{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \overline{\xi}^k\,\mathrm{d}\nu(\xi)\right) = 0 \implies\\
&\operatorname{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi\,\mathrm{d}\nu(\xi)\right) = 0 \qquad \forall \varphi \in C(\mathbb{T}),
\end{aligned}$$

так как система тригонометрических полиномов $\sum_{k=-N}^{M} c_k\xi^k$ не исчезает ни в какой точке и разделяет точки $\mathbb{T}$, то есть, по теореме Стоуна – Вейерштрасса она плотна в $C(\mathbb{T})$.

Тогда для любого φ существует такое $p = \sum_{k=-N}^{M} c_k\xi^k$, что

$$\sup_{\xi\in\mathbb{T}} |\varphi(\xi) - p(\xi)| < \varepsilon.$$

Значит,

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{T}} \varphi\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \left|\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{T}} p\,\mathrm{d}\nu\right| + \int\limits_{\mathbb{T}} |p-\varphi|\,\mathrm{d}|\nu| \leqslant |\nu|(\mathbb{T})\cdot\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

то есть $\operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{T}} \varphi\,\mathrm{d}\nu\right) = 0$. Если $\nu = \overline{\nu}$, то это означает, что $\nu \equiv 0$, см. свойство (2). Если же ν — произвольный, то $\mathcal{P}_{\operatorname{Re}\nu}(z) = 0$, $\mathcal{P}_{\operatorname{Im}\nu}(z) = 0$ в $\mathbb{D}$ и всё сводится к вещественному случаю. $\not<$

Следствие 18.2. Если $u \geqslant 0$, то $u = \mathcal{P}_\mu$ для неотрицательной меры μ на $\mathbb{T}$. Действительно, μ — это $*$-слабый предел неотрицательных мер, то есть $\mu \geqslant 0$.

Основная цель — следующая теорема:

Теорема 18.3. Пусть μ — борелевский заряд на $\mathbb{T}$, $\mu = f\,\mathrm{d}m + \mu_s$ — его разложение в абсолютно непрерывную и сингулярную части $f\,\mathrm{d}m$, μ_s.[24] Тогда для любого $\alpha \in (0,1)$

[24]см. теорему Радона – Никодима из предыдущего семестра

при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ по мере Лебега существует предел

$$\lim_{z\to\xi,\, z\in\Gamma_\alpha} \mathcal{P}_\mu(z) = f(\xi),$$

где $\Gamma_\alpha = \operatorname{conv}\bigl(\{\xi\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \alpha\}\bigr)$ — *угол Штольца.*

Эту теорему можно сформулировать следующим образом: любая гармоническая функция u в $\mathbb{D}$ со свойством

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)| \, \mathrm{d}m(\xi) < \infty$$

почти всюду имеет угловые граничные значения, и они совпадают с производной Радона – Никодима её порождающей меры.

Лемма 18.4. Пусть $\varphi \in C[-a, a]$ — непрерывная неотрицательная чётная функция, убывающая на промежутке $[0, a]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^N \subset [0, +\infty)$, такой, что:

(1) $\displaystyle \max_{t\in[-a,a]} \left| \varphi(t) - \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{1}{|I_k|} \chi_{I_k}(t) \right| \leqslant \varepsilon;$

(2) $\displaystyle \sum_{k=1}^N \lambda_k \leqslant \int_{-a}^{a} \varphi(t) \, \mathrm{d}t + 2a\varepsilon;$

где I_k — промежутки вида $[-a_k, a_k]$, $a_k \in [0, a]$.

Доказательство. Выберем ступенчатую функцию на $[-a, a]$ так, чтобы эта функция (скажем, φ_ε), принимала конечное число значений, была выполнена оценка

$$\max_{t\in[-a,a]} |\varphi(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon,$$

и φ_ε убывала бы на $[0, a]$. Пусть $\varphi_\varepsilon = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{[-a_k,a_k]}$, $c_k \geqslant 0$, $\lambda_k = c_k \cdot |I_k|$, где $I_k = [-a_k, a_k]$. Очевидно, что свойство (1) выполнено. Проверим второе:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = \int_{-a}^{a} \varphi_\varepsilon,$$

и тогда (2) получается из пункта (1). $\not<$

Теорема 18.5. Пусть μ — заряд на единичной окружности $\mathbb{T}$, $u = \mathcal{P}_\mu$, $\mu = f \, \mathrm{d}m + \mu s$, $\xi \in \mathbb{T}$. Если существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\mu(B(\xi, \delta))}{m(B(\xi, \delta))} = L \in [-\infty, \infty],$$

то существует предел $\lim_{r\to 1} u(r\xi) = L$. В частности, при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ по мере Лебега существует предел $\lim_{r\to 1} u(r\xi) = f(\xi)$.

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение и воспользоваться теоремой Лебега о дифференцировании мер.

Зафиксируем такое ξ, что

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mu(B(\xi,\delta))}{m(B(\xi,\delta))}=L.$$

Рассмотрим функцию

$$p_r=\frac{1-r^2}{|1-\overline{\xi}(r\xi_0)|^2}.$$

Так как ядро Пуассона — аппроксимативная единица, то по лемме

$$p_r(\xi)=\sum_{k=1}^{N_r}\lambda_{r,k}\frac{\chi_{I_k}}{m(I_k)}+g_r(\xi), \tag{18.1}$$

где $\lambda_{r,k}\geqslant 0, \sum_{k=1}^{N_r}\lambda_{r,k}\xrightarrow{r\to 1}1, I_k=\left\{e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})}, \mathrm{th}\in[-a_k,a_k]\right\}, \xi_0=e^{i\,\mathrm{th}_0}, \max_{\xi\in\mathbb{T}}|g_r(\xi)|\xrightarrow{r\to 1}0$. Почему такое разложение существует? Рассмотрим $\widetilde{\varphi}(\mathrm{th})=p_r(e^{i(\mathrm{th}+\mathrm{th}_0)}), \mathrm{th}\in[-\pi,\pi]$.

$$\begin{aligned}
g_1&=\chi_{E_r}(e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})})\cdot p_r(e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})}),\\
g_2&=\chi_{[-\pi,\pi]\setminus E_r}(e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})})\cdot p_r(e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})})-\varphi_{\varepsilon_r},
\end{aligned}$$

где φ_{ε_r} — функция из леммы для $\varphi=\chi_{[-\pi,\pi]\setminus E_r}(e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})})\cdot p_r(e^{i(\mathrm{th}_0+\mathrm{th})})$, $\varepsilon_r\to 0$, $g_r=g_1+g_2$. Пользуясь разложением (18.1) получаем

$$u(r\xi_0)=\int\limits_{\mathbb{T}}p_r(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi)=\int\sum_{k=1}^{N_{r,k}}\lambda_{r,k}\frac{\chi_{I_k}(\xi)}{m(I_k)}\,\mathrm{d}\mu(\xi)+\int\limits_{\mathbb{T}}g_r(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi).$$

$$\left|\int g_r(\xi)\,\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\max|g_r(\xi)|\cdot|\mu|(\mathbb{T})\xrightarrow{r\to 1}0.$$

$$\sum_{k=1}^{N_{r,k}}\lambda_{r,k}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\chi_{I_k}(\xi)}{m(I_k)}\,\mathrm{d}\mu(\xi)=\sum_{k=1}^{N_{r,k}}\lambda_{r,k}\frac{\mu(I_k)}{m(I_k)}\xrightarrow{r\to 1}L,$$

что и требовалось. ⊀

Напомним определение *максимальной функции Харди – Литтлвуда* меры μ:

$$(M^*\mu)(\xi)=\lim_{\Delta\to 0}\sup_{0<\delta<\Delta}\frac{\mu(B(\xi,\delta))}{m(B(\xi,\delta))}.$$

Радиальная максимальная функция гармонической функции u — это

$$(M_r^*u)(\xi)=\lim_{\Delta\to 0}\sup_{r\in[1-\Delta,1)}|u(r\xi)|.$$

Угловая максимальная функция гармонической функции u:

$$(M_\alpha^* u)(\xi) = \lim_{\Delta\to 0} \sup_{z\in\Gamma_\alpha(\xi)\cap B(\xi,\Delta)} |u(z)|,$$

где $\Gamma_\alpha(\xi) = \operatorname{conv}(\{\xi\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \alpha\})$.

Лемма 18.6. Пусть $u = \mathcal{P}_\mu$, где μ — заряд на $\mathbb{T}$. Тогда существует такая константа $c = c(\alpha)$, что для всех $\xi \in \mathbb{T}$

$$(M_\alpha^* u)(\xi) \leqslant c M_r^* \widetilde{u}(\xi), \tag{18.2}$$

$$(M_r^* \widetilde{u})(\xi) \leqslant c M_{|\mu|}^*(\xi), \tag{18.3}$$

где $\widetilde{u} = \mathcal{P}_{|\mu|}$.

Доказательство. $u \leqslant \widetilde{u}$, а потому можно считать, что $\mu \geqslant 0$ и $u = \widetilde{u}$. В этом случае неравенство (18.2) следует из неравенства Гарнака.

$u \geqslant 0$ в B_1 и отношение радиусов кругов B_1 к B_2 не зависит от $r \in [0,1)$. Тогда

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} u(r\xi) \leqslant u(z) \leqslant \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} u(r\xi) \qquad \forall z \in B_2,$$

где r_1 — радиус B_1, r_2 — радиус B_2. Тогда

$$(M_\alpha^* u)(\xi) \leqslant \frac{r_1/r_2 + 1}{r_1/r_2 - 1} (M_r^* u)(\xi).$$

Кроме того, $(M_r^* u)(\xi) \leqslant (M^* u)(\xi)$, так как ядро Пуассона — выпуклая комбинация функций $\frac{\chi_I}{m(I)}$ + малая поправка (по лемме). $\nprec$

Следствие 18.7. Если $\mu \perp m$, то

$$\lim_{z\to\xi,\, z\in\Gamma_\alpha(\xi)} \mathcal{P}_\mu(z) = 0$$

при m-почти всех $\xi \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Снова по неравенству Гарнака достаточно проверить, что $\lim_{r\to 1} \mathcal{P}_\mu(r\xi) = 0$ при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$. Но это так, потому что

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\mu(B(\xi,\delta))}{m(B(\xi,\delta))} = 0.$$

Так как $\mu \perp m$, по теореме 18.5 всё получается. $\nprec$

Доказательство теоремы 18.3. Можно считать, что μ — вещественный заряд, $\mu_s = 0$, так как $\mathcal{P}_{\mu_1+\mu_2} = \mathcal{P}_{\mu_1} + \mathcal{P}_{\mu_2}$ для любых зарядов μ_1, μ_2 и

$$\mathcal{P}_{\mu_s}(z) \xrightarrow[z\to\xi,\, z\in\Gamma_\alpha]{} 0$$

при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ по предыдущему следствию (сведение к неотрицательному случаю возможно благодаря разложению Хана и тому, что $\mathcal{P}_{\mu_1+\mu_2} = \mathcal{P}_{\mu_1} + \mathcal{P}_{\mu_2}$).

Пусть теперь $\mu = f\,\mathrm{d}m$, $f \in L^1(\mathbb{T})$, $u := \mathcal{P}_\mu$ — гармоническая функция в $\mathbb{D}$. При почти всех $\xi \in \mathbb{T}$

$$\sup_{z\in\Gamma_\alpha} |u(z)| < \infty,$$

так как $(M_\alpha^* u)(\xi) \leqslant c(M^* f)(\xi)$, и

$$m\{(M^* f)(\xi) > t\} \leqslant c\frac{\|f\|}{t}L^1(\mathbb{T}) \qquad \forall t > 0,$$

(слабая оценка на максимальную функцию Харди – Литлвуда, см. предыдущий семестр). Таким образом, предел $\lim_{z\to\xi,\, z\in\Gamma_\alpha(\xi)} u(z)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r\to 1}(\Omega_r u)(\xi) = 0, \tag{18.4}$$

где

$$(\Omega_r u)(\xi) = \sup_{\substack{z\in\Gamma_\alpha(\xi)\\ |z|=r}} u(z) - \inf_{\substack{z\in\Gamma_\alpha(\xi)\\ |z|=r}} u(z).$$

Докажем, что (18.4) выполнено для почти всех $\xi \in \mathbb{T}$. Для этого проверим, что для всех $t > 0$ выполнено равенство

$$m\big(\{\xi : \limsup_{r\to 1}(\Omega_r u)(\xi) > t\}\big) = 0.$$

Заметим, что если v — гармоническая функция в $\mathbb{D}$, то для всех $r \in [0, 1)$

$$\Omega_r(u) \leqslant \Omega_r(u - v) + \Omega_r(v),$$

так как $\sup u \leqslant \sup(u - v) + \sup v$, $\inf u \geqslant \inf(u - v) + \inf v$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем функцию $g \in C(\mathbb{T})$, такую, что $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leqslant \varepsilon$. Такая функция существует, так как $C(\mathbb{T})$ плотно в $L^1(\mathbb{T})$. Пусть также $v = \mathcal{P}_g$. Будем в дальнейшем писать для удобства $|E|$ вместо $m(E)$. Тогда

$$|\{\xi : \limsup(\Omega_r u)(\xi) > t\}| \leqslant |\{\limsup(\Omega_r v)(\xi) > \tfrac{t}{2}\}| + |\{\limsup \Omega_r(u - v)(\xi) > \tfrac{t}{2}\}|.$$

Первое слагаемое равно нулю при $r \to 1$, так как g непрерывно.

$$\Omega_r(u - v)(\xi) \leqslant 2M_\alpha^*(u - v)(\xi) \leqslant 2cM^*(u - v)(\xi)$$

для всех $r \in [0, 1)$. Значит,

$$\{\xi : \limsup(\Omega_r u)(\xi) > t\} \leqslant |\{\xi : M^*(f - g)(\xi) > \tfrac{t}{2c}\}| \leqslant \frac{2c\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})}}{t} \leqslant \frac{2c\varepsilon}{t}.$$

Это неравенство выполнено для всех $\varepsilon > 0$, а потому

$$\left|\left\{\xi : \limsup_{r\to 1} \Omega_r(u)(\xi) > t\right\}\right| = 0.$$

Итак, при почти всех ξ существует предел $\widetilde{f}(\xi) := \lim_{z\to\xi,\, z\in\Gamma_\alpha} u(z)$. Но, как мы знаем, при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ существует предел $\lim_{r\to 1} u(r\xi) = f(\xi)$. Значит, почти везде на $\mathbb{T}$ выполнено $f = \widetilde{f}$, что и требовалось. $\not<$

Следствие 18.8. Пусть f — ограниченная аналитическая функция в $\mathbb{D}$. Тогда при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$ существует предел $\lim_{z\to\xi,\, z\in\Gamma_\alpha(\xi)} f(z)$.

Доказательство. Применим теорему 18.3 к функциям $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m \leqslant \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \qquad \forall r \in [0,1).$$

Значит, u и v имеют угловые граничные значения почти везде в $\mathbb{T}$. $\not<$

Следствие 18.9. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Тогда $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ имеет угловые граничные значения почти везде на $\mathbb{T}$.

Доказательство. Проверим условие на $\overline{u, v}$:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^2\,\mathrm{d}m(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}} \sum a_n\overline{a}_k r^{n+k}\xi^n\overline{\xi}^k\,\mathrm{d}m = \sum_{k,n\geqslant 0} a_k\overline{a}_k r^{n+k} \int\limits_{\mathbb{T}} \xi^{n-k}\,\mathrm{d}m(\xi).$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \xi^j\,\mathrm{d}m(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{jt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Значит,

$$\sum_{k,n\geqslant 0} a_k\overline{a}_k r^{n+k} \int\limits_{\mathbb{T}} \xi^{n-k}\,\mathrm{d}m(\xi) = \sum |a_k|^2 r^{2k} \leqslant \sum |a_k|^2 < \infty.$$

Таким образом,

$$\left(\int 1\cdot|f(r\xi)|\,\mathrm{d}m(\xi)\right) \leqslant [\text{КБШ}] \leqslant \sqrt{\int |f(r\xi)|^2\,\mathrm{d}m(\xi)} \leqslant \sqrt{\sum |a_k|^2},$$

$$\int |u(r\xi)|\,\mathrm{d}m \leqslant \int |f(r\xi)|\,\mathrm{d}m \leqslant \left(\sum |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Значит, u, v, f имеют угловые граничные значения. $\not<$

Следствие 18.10. Пусть $\{a_k\} \subset \mathbb{D}$, $\sum(1 - |a_k|) < \infty$,

$$B = \prod \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}.$$

Тогда B имеет угловые граничные значения, равные по модулю единице почти всюду на $\mathbb{T}$.

Доказательство. Так как $|B(z)| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$, B имеет угловые граничные значения, назовём их f, $f \in L^1(\mathbb{T})$. По формуле Йенсена,

$$\log|B(0)| - \sum_{a_k : |a_k| \leqslant r} \log \frac{|a_k|}{r} = \int_{\mathbb{T}} \log|B(r\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi)$$
$$\leqslant [\log \text{ — вогнутая функция}] \leqslant \log \int_{\mathbb{T}} |B(r\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi) \xrightarrow{r\to 1} \log \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|\, \mathrm{d}m$$

Тогда

$$L_r \to \log|B(0)| - \sum_{k\geqslant 0} \log|a_k| = \log\left|\prod \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - 0}{1 - \bar{a}_k 0}\right| - \sum_{k\geqslant 0} \log|a_k|$$
$$= \log\left(\prod |a_k|\right) - \sum \log|a_k| = 0.$$

Значит,

$$1 \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|\, \mathrm{d}m(\xi). \tag{18.5}$$

При этом $|f(\xi)| \leqslant 1$ почти везде на $\mathbb{T}$, так как

$$f(\xi) = \lim_{z\to\xi,\, z\in\Gamma_\zeta(\xi)} B(z), \qquad |B| \leqslant 1.$$

Условие (18.5) теперь влечёт $|f(\xi)| = 1$ при почти всех $\xi \in \mathbb{T}$. $\not<$

Приложение A

Графики комплексных функций

Для того, чтобы в трехмёрном (или даже двумерном) пространстве нарисовать график комплексной функции, приходится восполнять нехватку размерности другими средствами — а именно, цветом и его насыщенностью. Стандартный трёхмерный график комплексный функции выглядит так: точкам плоскости OXY (соответствующей комплексной плоскости $\mathbb{C}$) на оси Z сопоставляется значение модуля f. Аргумент же показывается с помощью циклической цветовой функции. Смотря на цвета можно что-то узнать о самой функции f: например, аргумент закручивается в разную сторону в зависимости от того, проходит он вокруг нуля или полюса (принцип аргумента), как показано на картинке ниже:

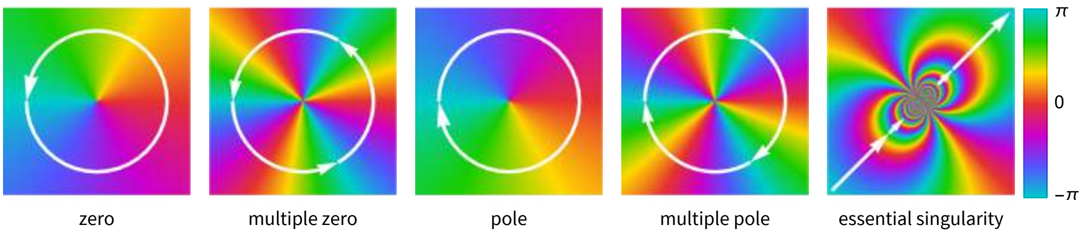


Рис. A.1: Нули, полюса и существенные особенности на комплексном графике

Двумерный график можно представлять себе как “вид сверху” на трёхмерный график, причём значение модуля обозначается насыщенностью цвета — чем больше значение, тем более он близок к белому.

Справа от трёхмерных графиков на картинках ниже показано, как именно изменяется цвет в зависимости от аргумента, а на двумерных также показана зависимость насыщенности от значений модуля.

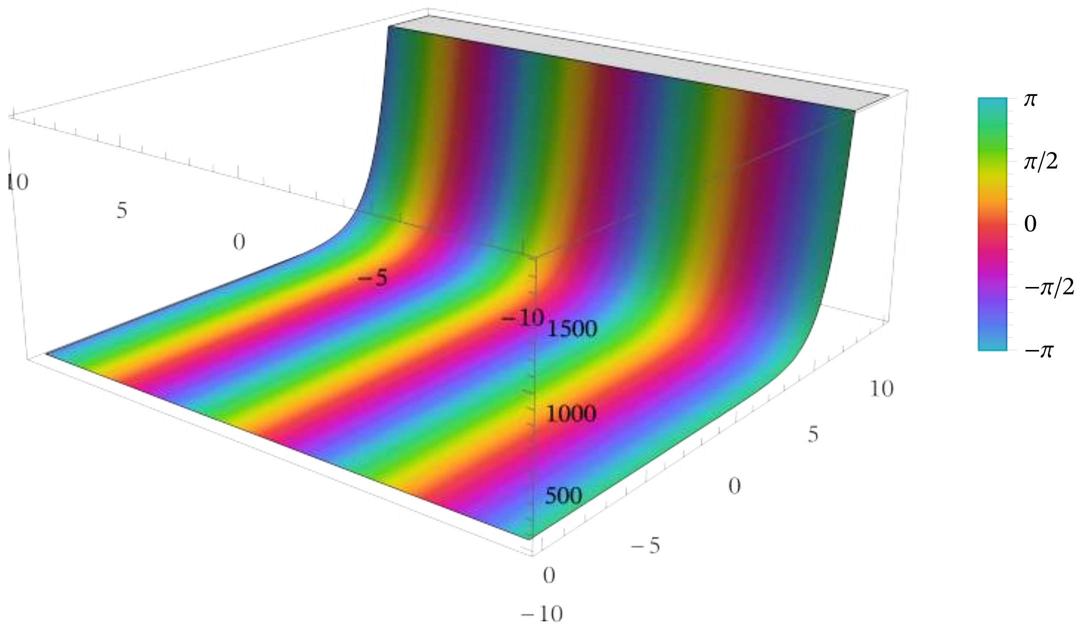


Рис. А.2: Трёхмерный график $\exp(z)$

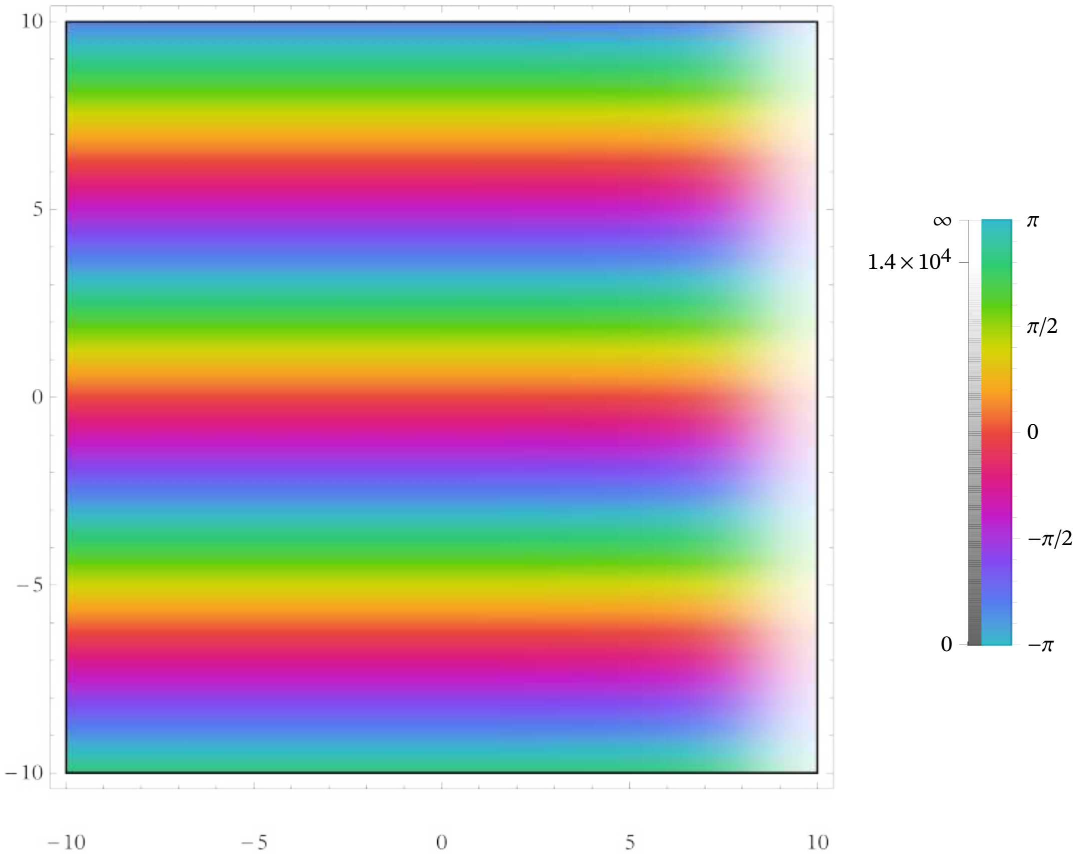


Рис. А.3: Двумерный график $\exp(z)$

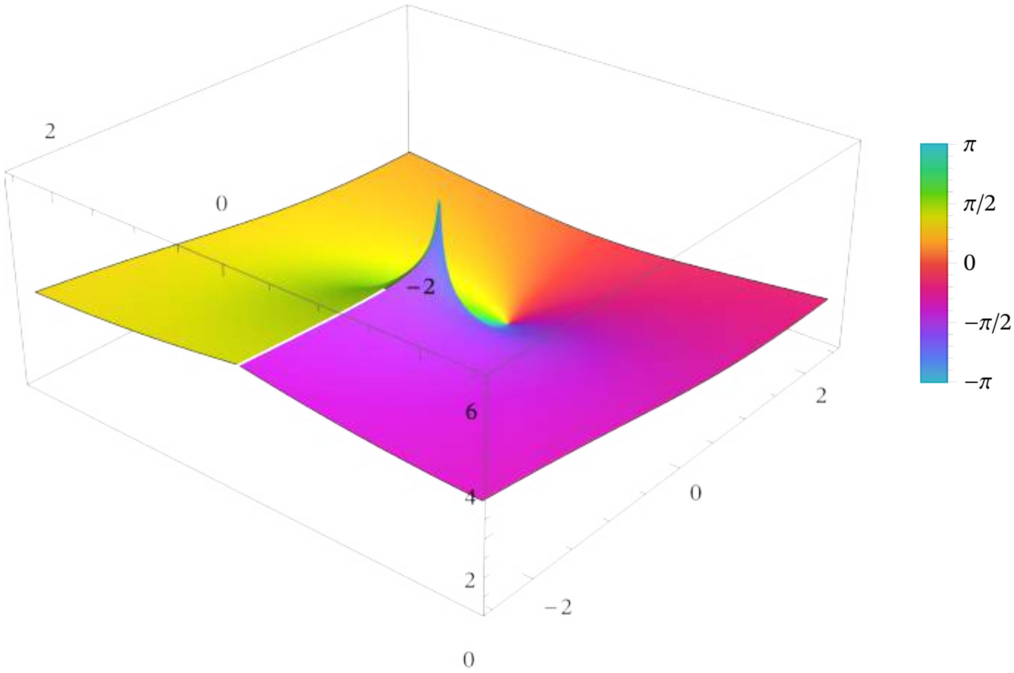


Рис. A.4: Главная ветвь $\log z$

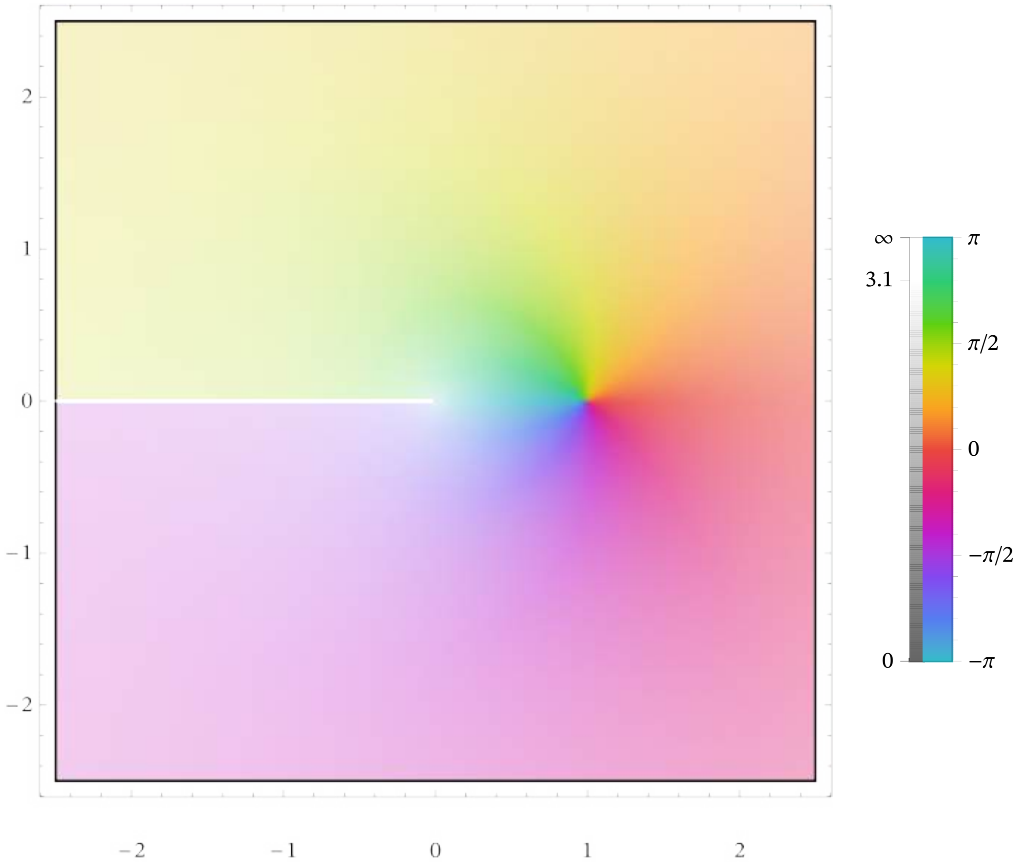


Рис. A.5: Главная ветвь $\log z$

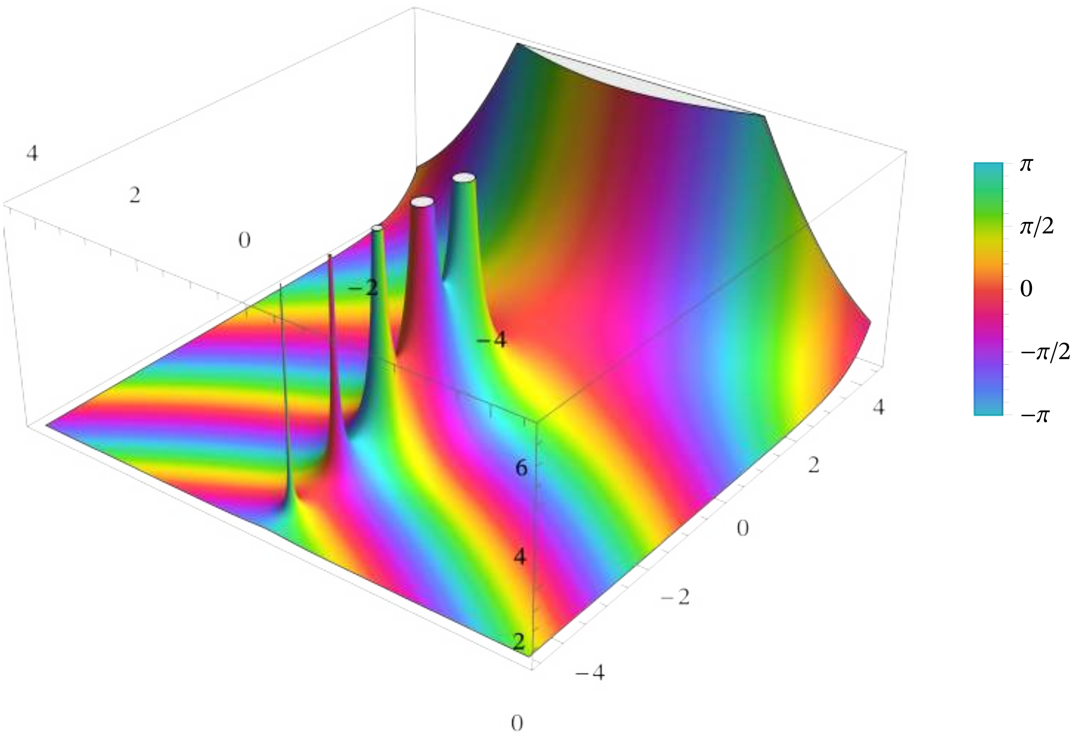


Рис. A.6: Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z)$

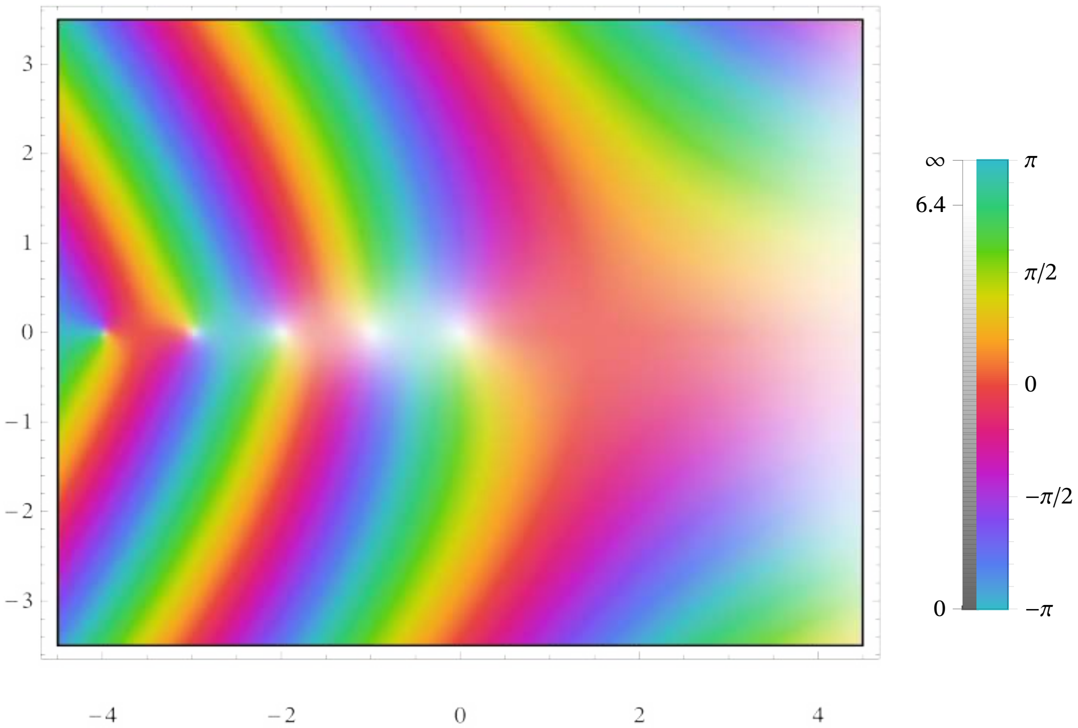


Рис. A.7: *Вернуться к утверждению* 7.5

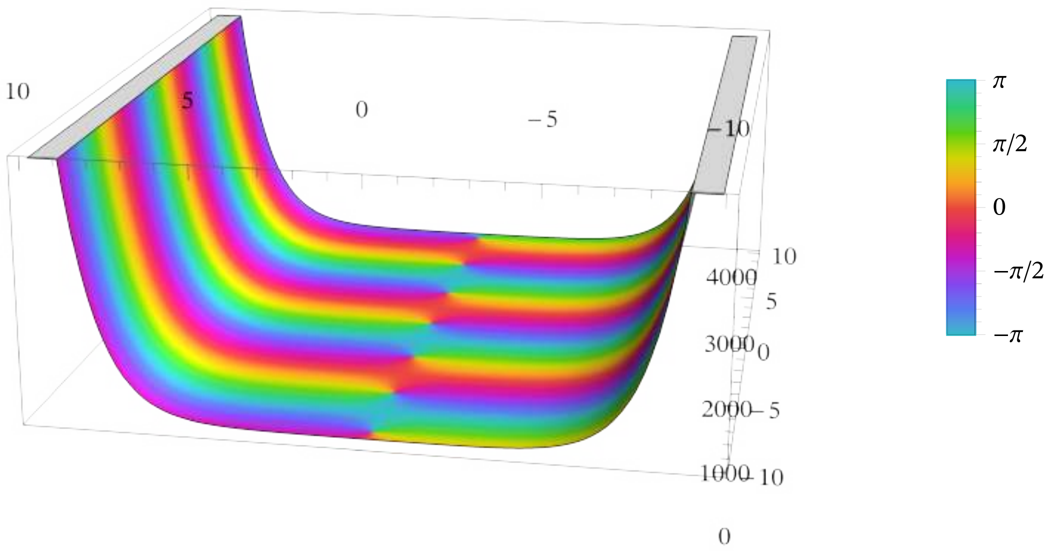


Рис. A.8: sin z

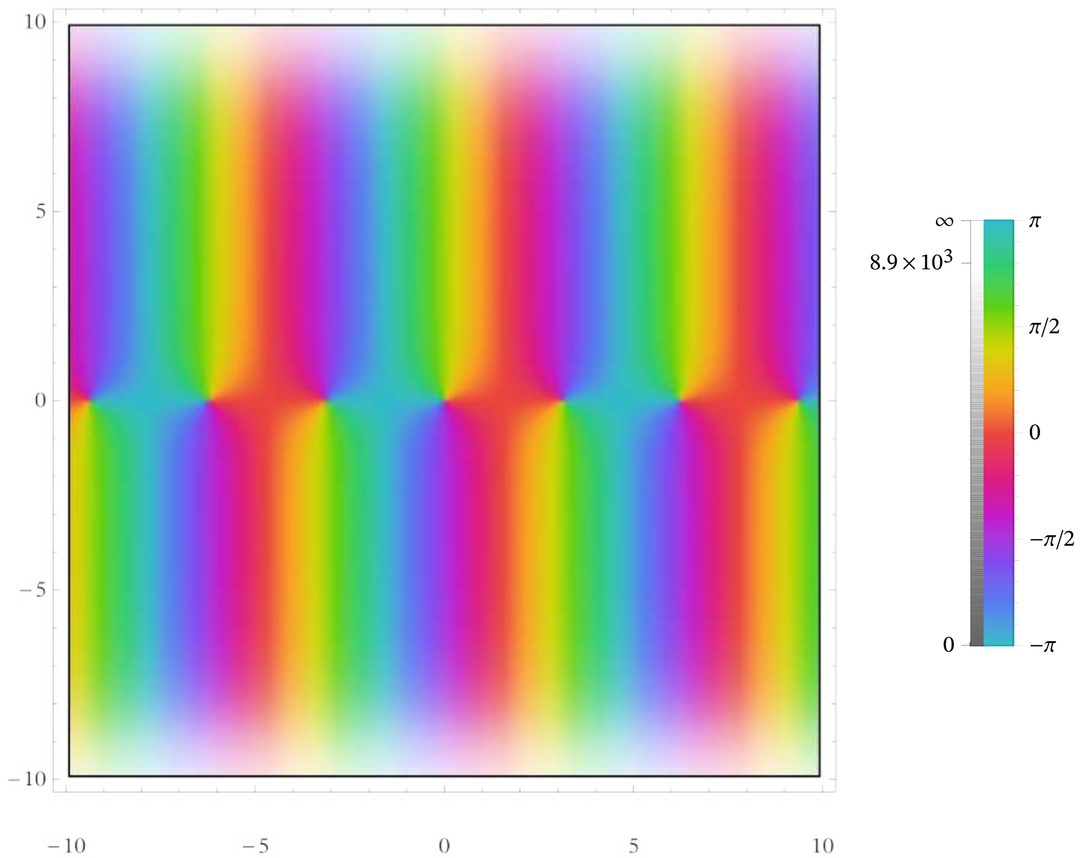


Рис. A.9: sin z

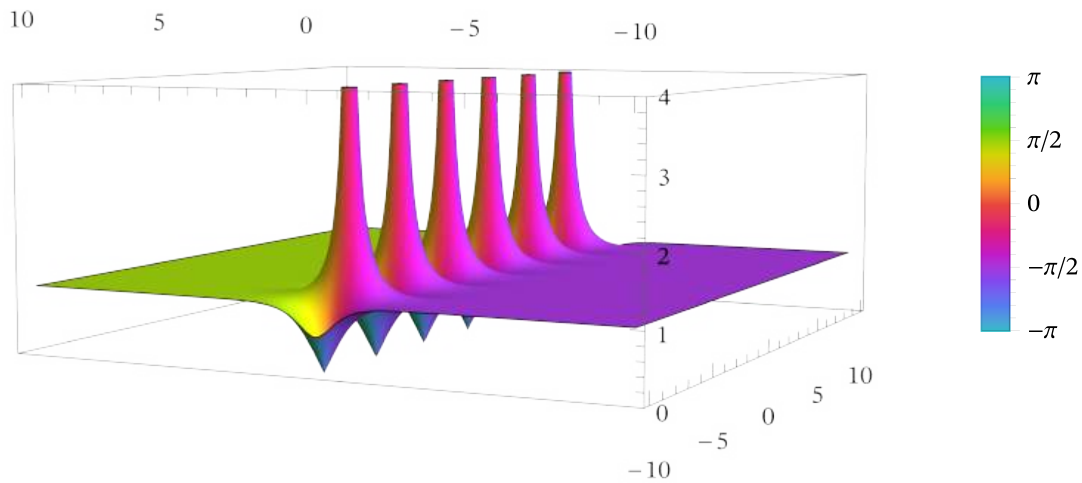


Рис. A.10: $\tan z$

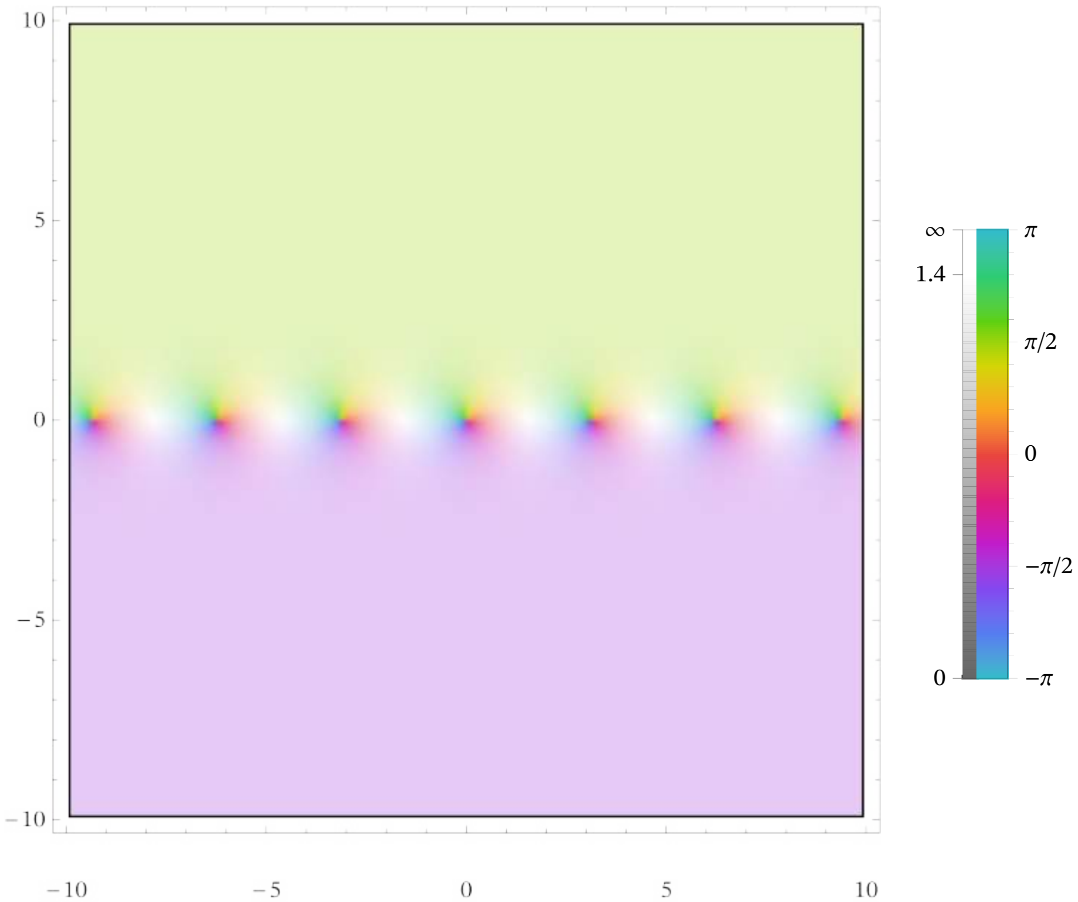


Рис. A.11: $\tan z$