Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и компьютерных наук

Анализ Фурье

Конспект основан на лекциях
Романа Викторовича Бессонова

29 января 2021 г.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Факультет
математики
и компьютерных
наук СПбГУ

Конспект основан на лекциях по анализу Фурье, прочитанных Романом Викторовичем Бессоновым студентам Факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета в осеннем семестре 2020–2021 учебного года.

В конспекте содержится материал 5-го семестра.

Авторы:

Михаил Опанасенко
Александр Гребенников

Последняя версия и исходный код:

Сайт СПБГУ: https://spbu.ru.
Сайт факультета МКН: https://math-cs.spbu.ru.

Оглавление

Анализ Фурье

1 Преобразование Фурье на классе Шварца

1.1 Определение

Определение. *Преобразованием Фурье* функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ называется интеграл

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x), \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$, λ_n — мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\langle x, t\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Обратным преобразованием Фурье* функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ называется интеграл

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x), \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначение. Если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \qquad |x|^\alpha := |x_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |x_n|^{\alpha_n}.$$

1.2 Пространство Шварца

Определение. *Пространством Шварца* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называется множество таких функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, что для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ с целыми неотрицательными коэффициентами выполнено условие

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^\alpha \left| \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta}(x) \right| < \infty.$$

Другими словами, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — это гладкие функции, все частные производные которых убывают на бесконечности быстрее любого полинома. Нетрудно видеть, что $p_{\alpha,\beta}$ — полунормы.

Пример 1.1. $e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Пример 1.2. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.[1]

[1] Напомним, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — гладкие функции с компактным носителем. Ясно, что при взятии производной носитель не увеличивается, а непрерывная функция на компакте ограничена.

Нетрудно заметить, что функции $p_{\alpha,\beta}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ из определения пространства Шварца — полунормы. С помощью них можно задать на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ топологию.

Определение. База топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в точке $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — это множество вида

$$V_{A,\varepsilon}(f) := \{g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : p_{\alpha,\beta}(f-g) < \varepsilon \ \ \forall p_{\alpha,\beta} \in A\}, \tag{1.1}$$

где A — это произвольный конечный набор полунорм $p_{\alpha,\beta}$.

Ясно, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с указанной топологией — это локально выпуклое (линейное топологическое) пространство.

Утверждение 1.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Фреше[2].

Доказательство. Определим

$$\rho(f,g) := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{p_n(f-g)+1},$$

где $\{p_n\}$ — занумерованные в произвольном порядке полунормы $p_{\alpha,\beta}$. Нетрудно проверить[3], что топология, задаваемая такой инвариантной метрикой, совпадает с топологией, задаваемой окрестностями (1.1).

Осталось проверить полноту. Пусть $\{f_k\}$ — последовательность Коши в метрике ρ. Пространство непрерывных ограниченных функций $C_b(\mathbb{R}^n)$ вместе с sup-нормой банахово[4], а потому функции $x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f_k$ сходятся к некоторой непрерывной ограниченной $f_{\alpha,\beta}$ для любых мультииндексов α, β. По теореме Стокса–Зейделя[5]

$$x^\alpha \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f_{0,0} = f_{\alpha,\beta}.$$

Значит, $f_{0,0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, $\rho(f_k, f_{0,0}) \to 0$, что и требовалось. ∎

1.3 Алгебраические свойства преобразования Фурье

Теорема 1.2 (алгебраические свойства преобразования Фурье). Для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ выполнены следующие свойства:

(1) $\mathcal{F}(f(\square - x_0))(t) = e^{-i\langle x_0, t\rangle}(\mathcal{F}f)(t)$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$; [6]

(2) $\mathcal{F}(e^{i\langle x, t_0\rangle} f)(t) = (\mathcal{F}f)(t - t_0)$;

[2] *Пространство Фреше* — это полное метризуемое локально выпуклое пространство.

[3] Мы это доказывали в курсе функционального анализа для произвольного ЛВП со счётным числом полунорм.

[4] Это факт из функционального анализа.

[5] Она утверждает, что если $h_k \in C^1(\mathbb{R})$, $h_k \to h \in C(\mathbb{R})$ и $h_k' \rightrightarrows g \in C(\mathbb{R})$, то $h' = g$. В данном случае все сходимости равномерны.

[6] Здесь $f(\square - x_0)$ обозначает функцию $t \mapsto f(t - x_0)$.

(3) если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$,

$$D_\alpha = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k},$$ [7]

то $(\mathcal{F}(D_\alpha f))(t) = t^\alpha (\mathcal{F} f)(t)$.

(4) $\mathcal{F}(x^\alpha f)(t) = (-1)^{|\alpha|} D_\alpha (\mathcal{F} f)(t)$;

(5) для любых $f, g \in L^1$ имеет место равенство

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F} f) \cdot (\mathcal{F} g),$$

где

$$(f * g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) \, \mathrm{d}\lambda_n(x)$$

— *свёртка функций f и g.*

Доказательство.

(1) Распишем по определению:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(\square - x_0))(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0) e^{-i\langle x, t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(w) e^{-i\langle w + x_0, t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(w) \\ &= e^{-i\langle x_0, t\rangle} (\mathcal{F} f)(t).\end{aligned}$$

(2) По определению:

$$\mathcal{F}(e^{i\langle x, t_0\rangle} f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, t_0\rangle - i\langle x, t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) = (\mathcal{F} f)(t - t_0).$$

(3) Доказываем по индукции. Достаточно рассмотреть случай $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)(x) \cdot e^{-i\langle x, t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg[\frac{1}{i} f(x) \cdot e^{-i\langle x, t\rangle} \Bigg|_{x_1 = -\infty}^{x_1 = +\infty} \\ &\qquad - \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{i} f(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-i\langle x, t\rangle})\right)(x, t) \, \mathrm{d}x_1 \Bigg] \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{i}\right) \cdot (-i t_1) \cdot f(x) e^{-i\langle x, t\rangle} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}\lambda_{n-1}(x)\end{aligned}$$

[7] Эта запись обозначает композицию дифференциальных операторов.

$$= t_1(\mathcal{F}f)(t) = t^\alpha(\mathcal{F}f)(t).$$

(4) Аналогично, достаточно рассмотреть случай $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x_1 f)(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e^{-i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{-i} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} e^{-i\langle x,t\rangle} \right)(x,t) \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{-i} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \right)(t) \\
&= -D_\alpha(\mathcal{F}f)(t).
\end{aligned}$$

Здесь третье равенство верно, так как если навесить на обе его части интеграл по t_1, то получится в точности теорема Фубини.

(5) Для начала поймём, что $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y-x) \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \right| \mathrm{d}\lambda_n(y) &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(y-x)| \, \mathrm{d}\lambda_n(y) \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, \mathrm{d}\lambda_n(y).
\end{aligned}$$

(Здесь мы пользуемся инвариантностью меры Лебега относительно сдвигов и теоремой Тонелли.) Значит, $\mathcal{F}(f * g)$ определено. Распишем:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(f * g))(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y-x) e^{-i\langle y,t\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \, \mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,t\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y-x) e^{-i\langle y-x,t\rangle} \cdot \, \mathrm{d}\lambda_n(y) \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}f)(t) \cdot (\mathcal{F}g)(t),
\end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Отметим, что $L^1(\mathbb{R})$ — коммутативная банахова алгебра относительно операции свёртки.

Лемма 1.3. Имеет место равенство

$$\mathcal{F}\left(e^{-\|x\|^2/2}\right)(t) = e^{-\|t\|^2/2}.$$

Доказательство. Если $\mathcal{F}_1$ — преобразование Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то

$$\mathcal{F}\big(e^{-\|x\|^2/2}\big)(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{F}_1\big(e^{-\widetilde{x}^2/2}\big)(t_k), \qquad (\widetilde{x} \in \mathbb{R}).$$

Поэтому можно считать, что $n = 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(e^{-x^2/2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ixt}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+2ixt-t^2)/2}\,\mathrm{d}x \cdot e^{-t^2/2} \\ &= e^{-t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Поскольку $g(z) = e^{-z^2/2}$ — целая функция, $\int_{\Gamma_N} g\,\mathrm{d}z = 0$, где Γ_N — прямоугольник вида (см. рисунок 1)

$$\Gamma_{1,N} + \Gamma_{2,N} + \Gamma_{3,N} + \Gamma_{4,N} = [-N, N] + [N, N+it] + [N+it, -N+it] + [-N+it, -N].$$

Очевидно, что $\int_{\Gamma_{2,N}} g\,\mathrm{d}z \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ и $\int_{\Gamma_{4,N}} g\,\mathrm{d}z \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Следовательно,

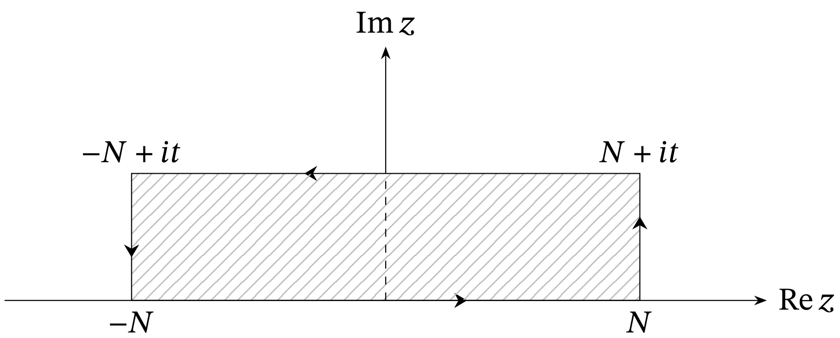

Рис. 1: Контур Γ_N

$$\int\limits_{\Gamma_{1,N}} g\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma_{3,N}} g\,\mathrm{d}z \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x = -\lim_{N\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_{3,N}} g\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_{1,N}} g\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_1(e^{-x^2/2}) = e^{-t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x = e^{-t^2/2},$$

что и требовалось. ■

1.4 Формула обращения для преобразования Фурье

Упражнение. Докажите, что если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.4 (формула обращения для преобразования Фурье). Для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big((\mathcal{F}f)(\square)\big)(x),$$

то есть

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(y) \right) e^{i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(t).$$

(По теореме об алгебраических свойствах преобразования Фурье внутри первого интеграла стоит функция из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.)

Доказательство. Сначала проверим, что формула верна в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\big((\mathcal{F}f)(\square)\big)(0) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(y)\, \mathrm{d}\lambda_n(t) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(y)\, \mathrm{d}\lambda_n(t) \\
[\text{теорема Фубини}] &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2} e^{-i\langle y,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(t)\, \mathrm{d}\lambda_n(y).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Во втором равенстве используется теорема Лебега о мажорированной сходимости. Посчитаем внутренний интеграл:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon^2\|t\|^2/2} e^{-i\langle y,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(t) = [s = \varepsilon t] &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\|s\|^2/2} e^{-i\langle \frac{y}{\varepsilon}, s\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(s) \cdot \varepsilon^{-n} \\
[\text{лемма 1.3}] &= e^{\|\frac{y}{\varepsilon}\|^2/2} \cdot \varepsilon^{-n} (2\pi)^{n/2}.
\end{aligned}$$

Продолжим равенство (1.2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\big((\mathcal{F}f)(\square)\big)(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \varepsilon^{-n} e^{-\|\frac{y}{\varepsilon}\|^2/2}\, \mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\varepsilon w) e^{-\|w\|^2/2}\, \mathrm{d}\lambda_n(w) \\
[\text{т. Лебега}] &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(0) e^{-\frac{1}{2}\|w\|^2}\, \mathrm{d}\lambda_n(w) \\
[\text{лемма 1.3}] &= f(0).
\end{aligned}$$

Теперь будем доказывать общий случай. Как мы помним из теоремы 1.2 (1),

$$
\begin{aligned}
e^{i\langle x,t\rangle}\mathcal{F}(f)(t) &= e^{i\langle x,t\rangle}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y-x,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(w+x)e^{-i\langle w,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_n(w) = \mathcal{F}(f(x+\square))(t).
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы можем свести общий случай к случаю $x = 0$ для другой функции:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f)(t)\big)(x) &= \mathcal{F}^{-1}\big(e^{i\langle x,t\rangle}\mathcal{F}(f)(t)\big)(0) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f(x+\square))\big)(0) = f(x+0) = f(x),
\end{aligned}
$$

что и требовалось. ■

1.5 Преобразование Фурье — гомеоморфизм $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Лемма 1.5. $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$, имеем

$$
\mathcal{F}^2(f)(x) = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(f)\big)(-x) = f(-x).
$$

Следовательно, $\mathcal{F}^4(f)(x) = \mathcal{F}^2(f)(-x) = f(x)$. ■

Теорема 1.6 (о преобразовании Фурье на классе Шварца). Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ — это гомеоморфизм $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на себя.

Доказательство. По упражнению выше $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. По лемме 1.5 $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $\mathcal{F}$ инъективно и сюръективно, а также из непрерывности $\mathcal{F}$ следует непрерывность отображения $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$.

Значит, осталось проверить непрерывность $\mathcal{F}$ как отображения из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на себя. Это пространство метризуемо, то есть непрерывность можно проверять на последовательностях. Пусть $f_k \to f$, где $f_k, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Хотим проверить, что для любых мультииндексов α, β выполняется

$$
\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left| t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\beta}\mathcal{F}f_k - t^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\beta}\mathcal{F}f\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
$$

Покажем, что:

(1) отображения $g \mapsto x^\gamma g$ и $g \mapsto \frac{\partial}{\partial x^\gamma} g$ непрерывны;

(2) если $f_k \to f$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\|\mathcal{F}(f_k - f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

После этого можно будет внести умножение на t^α и взятие производных под преобразование Фурье по теореме 1.2 (3, 4), при этом по пункту (1) выражения для f_k будут стремиться к соответствующим выражениям для f в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, и останется воспользоваться пунктом (2).

(1) Пусть $g_k \to g$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда непрерывность функций второго вида получается сразу из определения:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left| t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t^\gamma} g_k\right) - t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t^\gamma} g\right)\right| = \sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left| t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^{\beta+\gamma}} g_k - t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^{\beta+\gamma}} g\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Для непрерывности функций первого вида заметим, что $\frac{\partial}{\partial t^\beta}(t^\gamma g)$ представляется в виде конечной линейной комбинации выражений $t^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial t^{\beta_i}} g$ для некоторых мультииндексов β_i, γ_i; поэтому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left| t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\beta}(t^\gamma g_k) - t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\beta}(t^\gamma g)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n c_i \sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left| t^{\alpha+\gamma_i} \frac{\partial}{\partial t^{\beta_i}} g - t^{\alpha+\gamma_i} \frac{\partial}{\partial t^{\beta_i}} g\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

(2) Проверим, что из сходимости f_k к f в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует, что $f_k \to f$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$.[8]

Можно считать, что $f = 0$. Тогда $f_k \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Значит,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_k(x)| \to 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^{2n}|f_k(x)| \to 0.$$

Здесь мы воспользовались стремлением к нулю полунормы $p_{0,0}(f_k)$ и полунорм $p_{\alpha,0}(f_k)$ для некоторых мультииндексов с $|\alpha| = 2n$.

Оценим L^1-норму f_k:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|\,\mathrm{d}\lambda_n(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^{2n})|f_k(x)|\cdot\frac{1}{1+\|x\|^{2n}}\,\mathrm{d}\lambda_n(x)\\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+\|x\|^{2n})|f_k(x)|\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{1+\|x\|^{2n}}\,\mathrm{d}\lambda_n(x).\end{aligned}$$

Здесь первый множитель стремится к нулю, а второй конечен, так как его можно по формуле коплощади разбить на интегралы по сферам и получить оценку сверху числом $\int_0^{+\infty}\frac{Cr^{n-1}}{1+r^{2n}}\,\mathrm{d}r$.

Таким образом, $f_k \to f$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$, и мы можем завершить доказательство:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}f - \mathcal{F}f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}(f-f_k)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f-f_k)(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_n(x)\right|\end{aligned}$$

[8]Интуитивно это очевидно, потому что сходимость в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — сходимость всех частных производных быстрее любого многочлена — это очень сильное условие.

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \qquad \blacksquare$$

1.6 Преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и его унитарность

Следствие 1.7. Преобразование Фурье продолжается до унитарного оператора в $L^2(\mathbb{R}^n)$. В частности, имеет место *равенство Парсеваля*:

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $|f|^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, так как пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ замкнуто относительно операций умножения и сопряжения. Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = (2\pi)^{n/2}\big(\mathcal{F}(|f|^2)\big)(0) = \big(\mathcal{F}f * \mathcal{F}\overline{f}\big)(0). \tag{1.3}$$

Объясним второе равенство, а именно, поймём, что преобразование Фурье переводит произведение в свёртку (с точностью до домножения на константу). Как мы помним,

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2} \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Подставляя $-t$ вместо t, получаем

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (2\pi)^{n/2} \cdot \mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g).$$

Обозначим $F := \mathcal{F}^{-1}(f)$, $G := \mathcal{F}^{-1}(g)$. Тогда

$$f * g = (2\pi)^{n/2} \cdot \mathcal{F}(FG).$$

Отсюда по биективности преобразования Фурье равенство

$$\mathcal{F}(FG) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\big(\mathcal{F}(F) * \mathcal{F}(G)\big)$$

выполнено для любых $F, G \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Продолжим цепочку равенств (1.3):

$$(\mathcal{F}f(t) * \overline{\mathcal{F}f(-t)})(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(t)\overline{(\mathcal{F}f)(t)} \,\mathrm{d}\lambda_n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(t)|^2 \,\mathrm{d}\lambda_n(t).$$

Значит, $\mathcal{F}$ — изометрия $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ относительно L^2-нормы.

Покажем, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$.[9] Если это не так, то его замыкание имеет нетривиальное ортогональное дополнение, то есть существует такая функция $g \in$

[9] Альтернативное доказательство этого факта можно получить из того, что C_0 плотно в L^2, C_0^∞ плотно в C_0, и $C_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$L^2(\mathbb{R}^n)$, ненулевая на множестве положительной меры, что $\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}\,\mathrm{d}\lambda_n = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Можно считать, что $\mathrm{Re}(g) \geqslant \varepsilon$ на некотором компакте K положительной меры. Найдём такое открытое множество U, что $K \subset U$ и $\lambda_n(U) \leqslant (1+\delta)\lambda_n(K)$. Покроем K конечным числом шаров, лежащих внутри U, и построим на них разбиение единицы. При $\delta \to 0$ суммы функций из разбиения аппроксимируют χ_K, и при этом они лежат в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда по теореме Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_K \overline{g}\,\mathrm{d}\lambda_n = 0.$$

Но это противоречит выбору K.

Таким образом, $\mathcal{F}$ можно продолжить на всё пространство L^2. Поскольку $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, верно также $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$, а потому $\mathcal{F}$ — унитарный оператор. ∎

2 Преобразование Фурье на классе распределений медленного роста

2.1 Определение распределений и их свойства

Определение. Через $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ мы будем обозначать пространство Фреше, состоящее из гладких функций с инвариантной метрикой, задаваемой следующим образом:

$$\rho(f,g) := \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|f-g\|_N}{\|f-g\|_N + 1},$$

где

$$\|f\|_N := \sup_{\substack{x\in K_N \\ |\alpha|\leqslant N}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) \right|,$$

а K_N — последовательность вложенных компактов, в объединении дающих всё $\mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть K — компакт,

$$\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n) := \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset K\},$$

с метрикой, индуцированной с $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Определим *пространство основных функций* как

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := (C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathcal{T}),$$

где $\mathcal{T}$ — *топология индуктивного предела* пространств Фреше. Топология $\mathcal{T}$ определяется базой в нуле, состоящей из выпуклых уравновешенных[10] множеств $U \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, таких что $U \cap \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ открыто в $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ для любого компакта K.

Утверждение 2.1 (без доказательства). Выполнены следующие утверждения:

[10]Уравновешенность означает, что если $u \in U$, то $cu \in U$ для любого $c \in \mathbb{C} : |c| = 1$.

(1) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — полное[11] локально выпуклое топологическое пространство;

(2) $f_n \to f$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует такой компакт K, что $\operatorname{supp} f_n \subset K$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ в $\mathcal{D}_K$;

(3) у $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ нет счётной базы, а потому секвенциальная замкнутость не равносильна замкнутости.

Определение. *Распределением* или *обобщённой функцией* называется линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Пространство обобщённых функций*[12] обозначается через $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 2.2 (без доказательства). Линейный функционал φ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ лежит в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда для любого компакта K существуют такие числа $N := N(K) \in \mathbb{N}$ и $c := c(K) > 0$, что

$$\varphi(f) \leqslant c\|f\|_N \qquad (\forall f \in \mathcal{D}_K),$$

где

$$\|f\|_N = \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\leqslant N}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) \right|,$$

При этом минимальное такое $N_0 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, что существуют соответствующие $N(K) \leqslant N_0$, называется *порядком распределения*.

2.2 Распределения медленного роста

Определение. *Распределение медленного роста* — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Пространство распределений медленного роста обозначается через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 2.3. Имеет место включение

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Его нужно понимать в том смысле, что если $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда по утверждению 2.2 существует такая функция $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и компакт K, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдётся функция $f_N \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию

$$|\varphi(f_N)| \geqslant N\|f_N\|_N.$$

Обозначим $g_N := f_N/(N\|f_N\|_N)$. Тогда при $N \geqslant |\alpha|$

$$|\varphi(g_N)| \geqslant 1, \quad p_{\alpha,\beta}(g_N) \leqslant \frac{p_{\alpha,\beta}(f_N)}{N\|f_N\|_N} \leqslant \frac{\sup_{x\in K}|x^\beta|}{N} \to 0.$$

[11] Полнота здесь означает, что разности попадают в окрестность нуля (метрики нет).
[12] то есть пространство, сопряжённое к пространству основных функций

Таким образом, $g_N \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, однако $\varphi(g_N) \not\to 0$. Противоречие, так как φ непрерывно. ■

2.3 Распределения, соответствующие функциям

Обозначение. Вместо $\varphi(f)$ будем писать (φ, f). Если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то через φ_f будем обозначать функционал

$$g \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} fg \,\mathrm{d}\lambda_n$$

(возможно, он не везде определён, пока это только обозначение).

Пример 2.1. Если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.[13]

Пример 2.2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, то $\varphi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Так как класс Шварца метризуем, достаточно проверять, что из сходимости $g_k \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует сходимость $(\varphi_f, g_k) \to 0$. Это так по неравенству Гёльдера:

$$|(\varphi_f, g_k)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |fg_k| \,\mathrm{d}\lambda_n \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. (Мы раньше проверяли, что сходимость в классе Шварца влечёт сходимость в L^1; доказательство для произвольного p аналогично.) ■

2.4 Примеры распределений медленного роста

Пример 2.3. Пусть $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ и мультииндекс α фиксированы. Определим

$$\varphi\colon\ f \mapsto 2f(x_0) + 3\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}\right)(x_1).$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $f_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$|\varphi(f_k)| \leqslant 2p_{0,0}(f_k) + 3p_{\alpha,0}(f_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$ ■

Пример 2.4. Пусть $f(x) = e^x \sin(e^x)$. Тогда $\varphi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $g_k \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда

$$|(\varphi_f, g_k)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} g_k(x) e^x \sin(e^x) \,\mathrm{d}x\right|$$

[13] В этом курсе мы ничего не будем доказывать про распределения; только про распределения медленного роста.

$$= \left| -g_k(x)\cos(e^x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{\mathbb{R}} g_k'(x)\cos(e^x)\,\mathrm{d}x \right|$$
$$\leqslant 0 + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g_k'(x)(1+x^2)| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\cos(e^x)|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

что и требовалось. ■

Пример 2.5. Пусть $f(x) = e^x$. Тогда $\varphi_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но φ_f определена не на всём $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Чтобы проверить принадлежность $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ воспользуемся утверждением 2.2. Для компакта K выберем N таким, что $K \subset K_N$ (см. определение метрики на C_0^∞), и положим $c = \int_{K_N} e^x$. Тогда для любой функции $g \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$

$$(\varphi_f, g) = \int\limits_K fg\,\mathrm{d}\lambda_1 \leqslant c \sup_{x\in K_N} g(x) \leqslant c\|g\|_N.$$

Чтобы показать вторую часть утверждения, рассмотрим следующую функцию g:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x \leqslant -1, \\ h(x), & -1 \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $h(x)$ — гладкий спуск с единицы. С одной стороны, очевидно, что $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, а с другой стороны интеграл

$$(\varphi_f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}} fg\,\mathrm{d}\lambda_1$$

расходится, так как $fg = 1$ на $\mathbb{R}_+$. Таким образом, функция φ_f не определена на g. ■

Пример 2.6. Определим функционал Φ по правилу

$$\Phi\colon f \mapsto p.v.\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Тогда $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Упражнение. ■

2.5 Преобразование Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Определение. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда *преобразованием Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$* распределения φ называется такой линейный функционал $\mathcal{F}\varphi$, что

$$(\mathcal{F}\varphi, f) = (\varphi, \mathcal{F}f) \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(Здесь в левой части равенства преобразование Фурье в новом смысле, а справа — в старом).

Утверждение 2.4. Если на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ задана слабая топология $\sigma(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, то

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

— гомеоморфизм.

Доказательство. Для начала покажем, что $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $g_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{F}(g_n) \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по теореме 1.6. Поскольку $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathcal{F}\varphi, g_n) = (\varphi, \mathcal{F}g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Заметим, что $\mathcal{F}^4\varphi = \varphi$, так как

$$(\mathcal{F}^4\varphi, f) = (\varphi, \mathcal{F}^4 f) = (\varphi, f).$$

Из этого следует, что $\mathcal{F}$ — биекция. Осталось понять, что функция $\mathcal{F}$ непрерывна на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Обозначим

$$V_{A,\varepsilon}(\varphi) := \{\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : |(\varphi - \psi, f)| < \varepsilon \ \ \forall f \in A\},$$

где A — конечное подмножество $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда непрерывность $\mathcal{F}$ следует из равенства

$$\mathcal{F}^{-1}(V_{A,\varepsilon}(\varphi)) = V_{\mathcal{F}A,\varepsilon}(\mathcal{F}^{-1}\varphi),$$

Соответственно, функция $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$ также непрерывна. ∎

2.6 Согласованность определений преобразования Фурье

Напомним, что если $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то мы определяем φ_f по правилу

$$\varphi_f\colon h \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f h \,\mathrm{d}\lambda_n \qquad \forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Заметим, что если $\varphi_f = \varphi_g$ как элементы $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то $f = g$ почти всюду. Для этого достаточно аппроксимировать χ_K функциями из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, где K — произвольный компакт. Тогда получится, что интегралы по f и по g совпадают на любом компакте. Это и значит, что $f = g$ почти всюду.

Таким образом, мы можем отождествлять f и φ_f. Если функция f такова, что $\varphi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то можно рассматривать $\mathcal{F}f = \mathcal{F}\varphi_f$. При этом возникает вопрос согласованности нового определения преобразования Фурье со старым.

Утверждение 2.5. Пусть $\mathcal{F}_{old,1}$ — преобразование Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$ или на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; $\mathcal{F}_{old,2}$ — преобразование Фурье на $L^2(\mathbb{R}^n)$; $\mathcal{F}_{new}$ — преобразование Фурье на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда выполнено следующее:

$$\begin{aligned} f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ &\Longrightarrow\ \mathcal{F}_{old,1} f = \mathcal{F}_{new} f \ \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\\ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ &\Longrightarrow\ \mathcal{F}_{old,2} f = \mathcal{F}_{new} f \ \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

(Вместо $\mathcal{F}_{new}f$ формально нужно было бы писать $\mathcal{F}_{new}\varphi_f$, а вместо $\mathcal{F}_{old}f$ — $\varphi_{\mathcal{F}_{old}f}$, но мы их отождествили).

Доказательство. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда[14]

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{new}f, h) &= (f, \mathcal{F}_{old,1}h) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \cdot (\mathcal{F}_{old,1}h)(t)\, \mathrm{d}\lambda_n(t) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)h(x)e^{-i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(x)\, \mathrm{d}\lambda_n(t) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)h(x)e^{-i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(t)\, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(x) \cdot h(x)\, \mathrm{d}\lambda_n(x) \\
&= (\mathcal{F}_{old,1}f, h).
\end{aligned}
$$

Значит, $\mathcal{F}_{new}f = \mathcal{F}_{old,1}f$. Пусть теперь $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{new}f, h) &= (f, \mathcal{F}_{old,1}h) \\
&= \left[f_k \to f \text{ в } L^2(\mathbb{R}^n), f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \right] \\
&= \lim_{k\to\infty} (f_k, \mathcal{F}_{old,1}h) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\mathcal{F}_{old,1}f_k, h) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\mathcal{F}_{old,2}f_k, h) \\
&= (\mathcal{F}_{old,2}f, h).
\end{aligned}
$$

Здесь мы пользовались непрерывностью $\mathcal{F}_{old,2}$, которая следует из его унитарности. Таким образом, $\mathcal{F}_{new}f = \mathcal{F}_{old,2}f$. ■

2.7 Дифференцирование распределений

Научимся дифференцировать распределения.

Определение. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Положим

$$
\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi, f \right) := (-1)^{|\alpha|} \left(\varphi, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \right).
$$

[14] Отметим, что если f и g — функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, то по нашим соглашениям

$$
(f, g) = (\varphi_f, g) = \varphi_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} fg\, \mathrm{d}\lambda_n.
$$

Это в точности скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что отчасти мотивирует введение таких обозначений.

Утверждение 2.6. Пусть α — произвольный мультииндекс. Тогда:

$$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \implies \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$
$$\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

В частности, мы получаем интересный факт — произвольные распределения можно сколько угодно раз дифференцировать.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда по утверждению 2.2 для любого K существуют такие $N \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, что

$$|(\varphi, f)| \leqslant c\|f\|_N \qquad \forall f \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n),$$

Тогда нетрудно проверить, что при $\widetilde{N} := N + |\alpha|$, $\widetilde{c} := c$ справедливо неравенство

$$\left|\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi, f\right)\right| \leqslant \widetilde{c} \cdot \|f\|_{\widetilde{N}}.$$

Докажем вторую импликацию. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi, h_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \left(\varphi, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}h_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а последнее верно, так как $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — мы проверяли непрерывность операции дифференцирования в классе Шварца. ■

2.8 Произведение распределения и гладкой функции

Определение. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Определим

$$f \cdot \varphi \colon h \mapsto (\varphi, fh) \qquad \forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Аналогично, пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}f \leqslant c\|x\|^{N(\alpha)}$, $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Определим

$$f \cdot \varphi \colon h \mapsto (\varphi, fh) \qquad \forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Утверждение 2.7.

- Для любого $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ выполнено $f \cdot \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- Для любого $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ выполнено $f \cdot \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Докажем только второе утверждение. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(f \cdot \varphi, h_n) = (\varphi, f \cdot h_n)$, а $(\varphi, f \cdot h_n) \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, так как

$$|p_{\alpha,\beta}(f \cdot h_n)| \leqslant \mathrm{const}_{\alpha,\beta} \cdot \sup_{\substack{\gamma_1 \leqslant |\beta|, \gamma_2 \leqslant |\beta| \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| \frac{\partial^{|\gamma_1|}}{\partial x^{\gamma_1}} f(x) \cdot \frac{\partial^{|\gamma_2|}}{\partial x^{\gamma_2}} h(x) \cdot |x|^\alpha \right|$$

$$\leqslant \mathrm{const}_{\alpha,\beta,f} \cdot \sup_{\substack{|\gamma_2|\leqslant|\beta| \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left| \frac{\partial^{|\gamma_2|}}{\partial x^\beta} h_n(x) \right| \cdot |x|^{\widetilde{\alpha}} \cdot \|x\|^{N(\beta)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

поскольку $h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Утверждение 2.8. Новое определение производной согласуется со старым, то есть для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \varphi_f = \varphi_{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f}$$

Доказательство. Упражнение. ∎

2.9 Распределения и свёртка

Определение. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Определим

$$(\varphi * f, h) := (\varphi, \widetilde{f} * h) \qquad \forall h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

где $\widetilde{f}(x) := f(-x)$. Аналогично, для $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ определяем

$$(\varphi * f, h) := (\varphi, \widetilde{f} * h) \qquad \forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Утверждение 2.9.

- Если $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi * f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- Если $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Доказываем только второе утверждение. Пусть $h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathcal{F}h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}\widetilde{f} \cdot \mathcal{F}h_n \to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{f} * h_n \to 0$ (так как $\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно). Тогда $(\varphi, \widetilde{f} * h_n) \to 0$, так как $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, и потому $\varphi * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Утверждение 2.10. Новое определение свёртки согласуется со старым, то есть для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\varphi_g * f = \varphi_{g*f}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
(g * f, h) &\overset{\text{нов. опр.}}{=\!=\!=} (g, \widetilde{f} * h) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\widetilde{f}(y-x)\, \mathrm{d}\lambda_n(x)\, \mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x) f(x-y)\, \mathrm{d}\lambda_n(x)\, \mathrm{d}\lambda_n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)(g * f)(x)\, \mathrm{d}\lambda_n(x)
\end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{стар. опр.}} (g * f, h). \qquad \blacksquare$$

Пример 2.7. Обобщённая функция $\delta_0 \colon h \mapsto h(0)$ называется *дельта-функцией Дирака*. Утверждается, что

$$\delta_0 * f = f \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(\delta_0 * f, h) = (\delta_0, \widetilde{f} * h) = (\widetilde{f} * h)(0) = \left.\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(y - x) h(x) \, \mathrm{d}\lambda_n(x)\right|_{y=0} = (f, h). \qquad \blacksquare$$

Утверждение 2.11. Пусть

$$D^\alpha = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_k}.$$

Тогда для всех $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = t^\alpha \mathcal{F}(\varphi).$$

Доказательство. Утверждение следует из цепочки равенств

$$(\mathcal{F} D^\alpha \varphi, h) = (-1)^{|\alpha|} (\varphi, D^\alpha \mathcal{F} h) = (\varphi, \mathcal{F}(x^\alpha h)) = (t^\alpha \mathcal{F} \varphi, h).$$

Второе равенство здесь выполнено, так как

$$(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F} h = \mathcal{F}(x^\alpha h) \qquad \forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \qquad \blacksquare$$

2.10 Преобразование Фурье свёртки

Утверждение 2.12. Для любого распределения $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\varphi * f) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}\varphi) \cdot (\mathcal{F} f).$$

Доказательство. Вычисление:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(\varphi * f), h) &= (\varphi * f, \mathcal{F} h) \\
&= (\varphi, \widetilde{f} * \mathcal{F} h) \\
&= (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{f} * \mathcal{F} h)) \\
&= (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}(f * \mathcal{F}^{-1} h)) \\
&= (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F} f \cdot h) \\
&= (2\pi)^{n/2} ((\mathcal{F}\varphi) \cdot (\mathcal{F} f), h).
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

2.11 Ещё один пример

Пример 2.8. Посчитаем $\mathcal{F}(x^2)$, где $x^2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Для любого $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 g\right) = t^2 \mathcal{F} g,$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 g\right) = t^2 \mathcal{F}^{-1} g,$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 g = \mathcal{F}(t^2 \mathcal{F}^{-1} g).$$

Подставим $g = \mathcal{F}1$:

$$\mathcal{F}(x^2) = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \mathcal{F}1 = -\frac{\partial}{\partial x^2}\mathcal{F}1.$$

При этом

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}1, h) &= (1, \mathcal{F}h)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y) e^{-i\langle y,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_1(y)\, \mathrm{d}\lambda_1(t)\\ &= [\text{по } 1.4] = (2\pi)^{1/2} h(0)\end{aligned}$$

Значит, $\mathcal{F}1 = (2\pi)^{1/2}\delta_0$.[15] Тогда $\mathcal{F}(x^2) = -(2\pi)^{1/2}\delta_0''$, где δ_0'' — это функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, такой что $\delta_0''\colon h \mapsto h''(0)$.

3 Приложения преобразования Фурье

3.1 Теорема Хёрмандера

Обозначим через $P(D)$ следующий дифференциальный оператор:

$$P(D) := \sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k}, \quad \text{где } P = \sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha x^\alpha,\ c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Определение. Будем писать

$$P(D) f = g$$

для $f, g \in L^2(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(f, P^*(D)\varphi)_{L^2(\Omega)} = (g, \varphi)_{L^2(\Omega)},$$

где $P^*(D) = Q(D)$, $Q = \sum_{|\alpha|\leqslant N} \overline{c}_\alpha x^\alpha$.

[15]Альтернативное доказательство этого утверждения можно получить, применив $\mathcal{F}$ к равенству $\mathcal{F}\delta_0 = 1$.

Теорема 3.1 (Хёрмандер). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой функции $g \in L^2(\Omega)$ и любого многочлена $P = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha x^\alpha$ существует такая функция $f \in L^2(\Omega)$, что

$$P(D)f = g.$$

Лемма 3.2. Пусть $p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k$, g аналитична в $\mathbb{D}$ и непрерывна в его замыкании. Тогда

$$|c_k g(0)|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} |p(z)g(z)|^2 \, \mathrm{d}m(z),$$

где m — нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен[16]

$$q(z) = \overline{c_0} z^k + \overline{c_1} z^{k-1} + \dots + \overline{c_k}.$$

При $z \in \mathbb{T}$ имеем $q(z) = z^k \overline{p(z)}$. Отметим, что $q(0) = \overline{c_k}$ и $|q(z)| = |p(z)|$ на $\mathbb{T}$. По теореме о среднем для гармонических функций (отдельно для вещественной и мнимой частей)[17]

$$\overline{c_k} g(0) = q(0)g(0) = \int\limits_{\mathbb{T}} q(z)g(z) \, \mathrm{d}m(z).$$

Тогда по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} |\overline{c}_k g(0)|^2 &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{T}} 1 \cdot |q(z)g(z)| \, \mathrm{d}m(z) \right)^2 \\ &\leqslant m(\mathbb{T}) \cdot \int\limits_{\mathbb{T}} |q(z)g(z)|^2 \, \mathrm{d}m(z) \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} |p(z)g(z)|^2 \, \mathrm{d}m(z). \end{aligned}$$

■

Доказательство теоремы Хёрмандера.

Шаг 1. Для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|P(D)\varphi\|_{L^2} \geqslant c\|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.1}$$

где c не зависит от φ. Зафиксируем $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^n$. Для каждого $z \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, определённую по правилу

$$\widehat{\varphi}(\zeta) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle \zeta, x \rangle} \, \mathrm{d}\lambda_n(x) = (\mathcal{F}\varphi)(\zeta).$$

Тогда $g = z \mapsto \widehat{\varphi}(t_0 + t_1 z)$ — целая функция[18]. Применим лемму 3.2 к функции g и

[16] «Отражённый многочлен» (на окружности)

[17] Произведение аналитичных функций аналитично, а аналитическая функция гармонична.

[18] Дифференцируемость несложно доказать по определению.

многочлену $p = z \mapsto P(t_0 + t_1 z)$ степени N:

$$|c_n g(0)|^2 = |P_N(t_1)\widehat{\varphi}(t_0)|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} |g(z)p(z)|^2 \, \mathrm{d}m(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} |P(t_0 + t_1 z) \cdot \widehat{\varphi}(t_0 + t_1 z)|^2 \, \mathrm{d}m(z),$$

где $P_N = \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha x^\alpha$. Проинтегрируем это неравенство по $\lambda_n(t_0)$:

$$|P_N(t_1)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(t_0)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(P\widehat{\varphi})(t_0 + t_1 z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) \, \mathrm{d}m(z). \tag{3.2}$$

Левый интеграл конечен, так как подынтегральное выражение лежит в пространстве Шварца, в частности, в L^2. Имеем

$$(P\widehat{\varphi})(t_0 + t_1 z) = \mathcal{F}(P(D)\varphi)(t_0 + t_1 z),$$

так как мы знаем[19], что $\mathcal{F}(\prod_{k=1}^n \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k})^{\alpha_k} = t^\alpha \mathcal{F}$. Теперь воспользуемся свойством преобразования Фурье, чтобы избавиться от сдвига:

$$\mathcal{F}(P(D)\varphi)(t_0 + t_1 z) = \mathcal{F}\big(x \mapsto (P(D)\varphi)(x) \cdot e^{-i\langle z t_1, x\rangle}\big)(t_0)$$

Преобразуем правую часть неравенства (3.2):

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(p\widehat{\varphi})(t_0 + t_1 z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) \, \mathrm{d}m(z) &= \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}((P(D)\varphi)(x) e^{-\langle t_1 z, x\rangle})|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) \, \mathrm{d}m(z) \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(P(D)\varphi)(x) e^{-\langle t_1 z, x\rangle}|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) \, \mathrm{d}m(z). \end{aligned}$$

Во втором равенстве мы воспользовались равенством Парсеваля. С помощью того же равенства преобразуем левую часть (3.2):

$$|P_N(t_1)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(t_0)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) = |P_N(t_1)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(x).$$

Таким образом, мы получили, что

$$|P_N(t_1)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(P(D)\varphi)(x) e^{-\langle t_1 z, x\rangle}|^2 \, \mathrm{d}\lambda_n(t_0) \, \mathrm{d}m(z). \tag{3.3}$$

Так как степень P равна N, то существует точка t_1, такая что $P_N(t_1) \neq 0$. Для такого t_1 положим

$$A := \sup_{x \in \Omega,\, z \in \mathbb{T}} |e^{-i\langle t_1 z, x\rangle}|$$

Отметим, что A конечно из-за ограниченности Ω. Теперь оценим L^2-норму φ с помо-

[19]Формально мы знаем это только для вещественного преобразования Фурье, но в случае комплексного при условии $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ проходит то же доказательство.

щью неравенства (3.3) и числа A:

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(\frac{A}{|P_N(t_1)|}\right)^2 \cdot \int\limits_{\mathbb{T}} \|P(D)\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}m(z) = \left(\frac{A}{|P_N(t_1)|}\right)^2 \cdot \|P(D)\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Это и есть неравенство (3.1) для $c = |P_N(t_1)|/A$.

Шаг 2. Покажем, что для любой функции $g \in L^2(\Omega)$ существует функция $f \in L^2(\Omega)$, такая что

$$P(D)f = g.$$

Для этого рассмотрим функционал Φ на $P(D)(C_0^\infty(\Omega))$, определённый по правилу

$$\Phi\colon P(D)\varphi \mapsto (\varphi, g)_{L^2(\Omega)}.$$

Он корректно задан, так как если $P(D)\varphi_1 = P(D)\varphi_2$, то по первому шагу $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2} = 0$. Так как эти функции непрерывны, то $\varphi_1 = \varphi_2$. Кроме того,

$$|\Phi(P(D)\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)} \leqslant [\text{шаг } 1] \leqslant c \cdot \|P(D)\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Значит, оператор Φ ограничен на области своего задания. По теореме Хана–Банаха существует его непрерывное продолжение на всё пространство $L^2(\Omega)$. По теореме Рисса о представлении существует такая функция $f \in L^2(\Omega)$, что

$$(\varphi, g)_{L^2(\Omega)} = \Phi(P(D)\varphi) = (P(D)\varphi, f)_{L^2(\Omega)} = (\varphi, P^*(D)f)_{L^2(\Omega)}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда следует, что $P^*(D)f = g$.

Осталось лишь рассмотреть P^* вместо P. В этом случае мы получим, что что для всех $g \in L^2(\Omega)$ существует такая функция $f \in L^2(\Omega)$, что

$$P(D)f = P^{**}(D)f = g,$$

что и требовалось. ■

3.2 Теорема Пэли–Винера

Теорема 3.3 (Пэли, Винер). Пусть f — целая функция, $f \not\equiv 0$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $f \in L^2(\mathbb{R})$, порядок f равен 1 и тип f не превосходит некоторого числа $a > 0$;

(2) существует такая функция $g \in L^2[-a, a]$, что $\|g\|_{L^2} \neq 0$ и $f = \mathcal{F}^{-1}g$, то есть

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-a}^{a} g(t)e^{itz}\,\mathrm{d}t.$$

Доказательство. (2) $\Longrightarrow$ (1). Ясно, что $f \in L^2(\mathbb{R})$, так как $f = \mathcal{F}^{-1}g$ для $g \in L^2(\mathbb{R})$[20]. Кроме того,

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-a}^{a} |g(t)| e^{|t\cdot \operatorname{Im} z|}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{a|\operatorname{Im} z|} \left(\int\limits_{-a}^{a} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}t \right)^{1/2} \\
&\leqslant c(a)\cdot e^{a|\operatorname{Im} z|} \leqslant c(a)\cdot e^{a|z|}.
\end{aligned}$$

Значит, тип f относительно порядка 1 не превосходит a. Так как $g \not\equiv 0$, то по равенству Парсеваля $f \not\equiv 0$.

Также f — целая функция (как интеграл целой), и $|f(z)| \leqslant c(a)$ для любого $z \in \mathbb{R}$. Проверим, что порядок f равен единице. Если $\rho < 1$ — порядок f, то по принципу Фрагмена–Линделёфа $|f(z)| \leqslant c(a)$ для любого $z \in \mathbb{C}_\pm$ (так как полуплоскость — угол раствора $\pi < \frac{\pi}{\rho}$). Тогда по теореме Лиувилля $f \equiv \mathrm{const}$. Но при этом $f \in L^2(\mathbb{R})$, то есть $f \equiv 0$. Противоречие.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Хотим показать, что подходит $g = \mathcal{F} f$. Для этого нужно проверить, что $g|_{\mathbb{R}\setminus[-a,a]} = 0$ почти всюду. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что что для любого $t_0 \in \mathbb{R}\setminus[-a,a]$ и любого $\varepsilon > 0$, такого что $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon) \cap [-a,a] = \varnothing$, выполнено

$$\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{3.4}$$

После этого по теореме о дифференцировании мер[21] мы получим, что

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{a.e.}} g(t_0).$$

Тогда $g = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}\setminus[-a,a]$.

Будем считать, что $t_0 < -a - 2\varepsilon$ (то есть t_0 лежит левее $-a$), так как можно заменить $g(t)$ на $g(-t)$ и, соответственно, $f(z)$ на $-f(-z)$. Условие (3.4) равносильно

$$\frac{\left(\mathcal{F} f, \chi_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}\right)_{L^2(\mathbb{R})}}{2\varepsilon} = 0 \iff \left(f, \mathcal{F}^{-1}\chi_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}\right)_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

В последней эквивалентности мы воспользовались унитарностью $\mathcal{F}$. Посчитаем:

$$(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]})(x) = e^{it_0 x}\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]})(x),$$

[20]Поскольку $L^1[-a,a] \subset L^2[-a,a]$, мы знаем явную формулу для $\mathcal{F}^{-1}g$.

[21]Альтернативное доказательство можно получить, рассмотрев множество $\{z : \operatorname{Re} g(z) > \frac{1}{N}\}$ и приблизив его по мере открытыми. Или можно сказать, что функция g ортогональна всем ступенчатым функциям на $L^2[-a,a]$, то есть ортогональна всему $L^2[-a,a]$, а значит равна нулю в этом пространстве.

$$(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{itx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{itx}}{ix}\bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\varepsilon x} - e^{-i\varepsilon x}}{ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\varepsilon x}{x}.$$

Таким образом, нужно проверить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-it_0x}\frac{\sin(\varepsilon x)}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Под интегралом стоит целая функция $F(z) = f(z)e^{-it_0z}\sin(\varepsilon z)/z$, поэтому её интеграл по контуру Γ_R (отрезок $[-R, R]$ и верхняя полуокружность C_R^+) равен 0:

$$0 = \oint\limits_{\Gamma_R} F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} F(z)\,\mathrm{d}z + \oint\limits_{C_R^+} F(z)\,\mathrm{d}z.$$

Следовательно, достаточно доказать, что $\oint_{C_R^+} F(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ при $R \to \infty$. Чтобы воспользоваться леммой Жордана, хотим представить F в виде

$$F(z) = h(z)e^{i\alpha z}, \quad \text{где } \alpha > 0,\ |h(z)| \xrightarrow{|z|\to\infty} 0,\ z \in \mathbb{C}^+.$$

Пусть сначала $|f(z)| \leqslant c$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда функция $e^{i(a+\varepsilon)z}f(z)$ ограничена на сторонах 1 и 2 координатных четвертей. Для вещественной прямой это очевидно, а если $z = it$, то значение

$$|e^{i(a+\varepsilon)z}f(z)| = |f(it)|e^{-(a+\varepsilon)t}$$

ограничено при $t \geqslant 0$, так как тип f не превосходит a. Кроме того, эта функция имеет порядок 1. Следовательно, по принципу Фрагмена–Линделёфа для каждой из этих четвертей (угол раствора $\pi/2 < \frac{\pi}{1}$) имеем $|e^{i(a+\varepsilon)z}f(z)| \leqslant c$ для всех $z \in \mathbb{C}^+$. Обозначим

$$h(z) := f(z)\cdot e^{i(a+2\varepsilon)z}\cdot\frac{\sin\varepsilon z}{z}.$$

Тогда

$$F(z) = f(z)\cdot e^{-it_0z}\cdot\frac{\sin\varepsilon z}{z} = h(z)e^{i\alpha z},$$

где $\alpha = -a - 2\varepsilon - t_0 > 0$. Имеем

$$|h(z)| \leqslant c\cdot\left|e^{i\varepsilon z}\cdot\frac{\sin\varepsilon z}{z}\right| = c\cdot\left|\frac{e^{2i\varepsilon z}-1}{2z}\right| \leqslant \frac{c_1}{|z|} \xrightarrow[z\in\mathbb{C}^+]{|z|\to\infty} 0.$$

Таким образом, по лемме Жордана $\oint_{C_R^+} F \to 0$, то есть теорема доказана в предположении, что $|f(x)| \leqslant c$ на $\mathbb{R}$. Теперь рассмотрим функции

$$f_\delta(z) = \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\delta} f(z+\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Они целые как интегралы целых[22], имеют порядок $\leqslant 1$ и тип относительно единичного порядка $\leqslant a$, и, кроме того,

$$|f_\delta(x)| \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta |f(z+\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant [\text{нер-во Гёльдера}] \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = c(\delta).$$

То есть функции f_δ ограничены на вещественной оси. Из этого, в частности, следует, что их порядок равен единице (проверяли в доказательстве импликации $2 \implies 1$). Таким образом, по уже доказанному $\operatorname{supp}\mathcal{F} f_\delta \subset [-a, a]$.

Хотим проверить, что $f_\delta \to f$ в L^2 при $\delta \to 0$. Это очевидно для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Покажем, что операторы

$$T_\delta \colon f \mapsto \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta f(\square+\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

равномерно ограничены, а именно, что $\sup_{\delta\in(0,1)} \|T_\delta\| \leqslant 1$:

$$\|T_\delta f\|_{L^2}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta f(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}x \leqslant [\text{нер-во Гёльдера и теорема Фубини}]$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+\tau)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau = \|f\|_{L^2}^2.$$

Итого[23], $\|I - T_\delta\| \leqslant 2$ для всех $\delta > 0$, $(I - T_\delta)(f) \to 0$ на плотном подмножество $C_0^\infty(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R})$. Тогда $(I - T_\delta)(f) \to 0$ для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, $f_\delta \to f$ в $L^2(\mathbb{R})$. Тогда $\mathcal{F} f_\delta \to \mathcal{F} f = g$ в $L^2(\mathbb{R})$, и $\operatorname{supp} g \subset [-a, a]$, что и требовалось. ∎

3.3 Следствия из теоремы Пэли–Винера

Следствие 3.4. Множество целых функций порядка 1 типа $\leqslant a$, лежащих в $L^2(\mathbb{R})$, вместе с нулевой функцией образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения, наследованного из $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Все свойства, кроме полноты, очевидны[24]. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в этом пространстве. Тогда $\mathcal{F} f_n$ — последовательность Коши в пространстве $L^2[-a, a]$, которое полно, то есть существует такая функция $g \in L^2[-a, a]$, что $\mathcal{F} f_n \to g$. Тогда $f_n \to \mathcal{F}^{-1} g$. ∎

Определение. Пространство из предыдущего следствия называется *пространством Пэли–Винера* и обозначается через PW_a.

[22] Можно по определению проверить существование производной, переставив интеграл и предел.

[23] Здесь I — тождественный оператор.

[24] Замкнутость относительно сложения не совсем очевидна, но доказывается она также, как и полнота.

Следствие 3.5. Если $f \in \mathrm{PW}_a$, то $|f(z)| \leqslant c e^{a|\operatorname{Im} z|}$. Мы это знаем из доказательства теоремы Пэли–Винера, импликации (2) $\Longrightarrow$ (1). ■

Следствие 3.6. Если $f \in \mathrm{PW}_a$, то $\|f'\|_{L^2} \leqslant a\|f\|_{L^2}$.

Доказательство. Действительно,

$$\|f'\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{F}(f')\|_{L^2}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |t \cdot (\mathcal{F}f)(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \big[\operatorname{supp}\mathcal{F}f \subset [-a, a]\big]$$

$$\leqslant a^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f)(t)|^2 \,\mathrm{d}t = a^2\|f\|_{L^2}^2.$$ ■

Следствие 3.7. Если $f \in \mathrm{PW}_a$, то $|f(x)| \to 0$ при $x \to \infty$ и $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Имеем $f = \mathcal{F}^{-1}g$, где $g \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда утверждение следует из леммы Римана–Лебега (см. ниже). ■

3.4 Лемма Римана–Лебега

Теорема 3.8 (лемма Римана–Лебега). Имеет место следующее включение:

$$\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset \left\{ h \in C(\mathbb{R}^n) : h(x) \xrightarrow[\|x\|\to\infty]{} 0 \right\}.$$

Доказательство. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, t\rangle} \,\mathrm{d}\lambda_n(x).$$

(1) Покажем, что функция $\mathcal{F}f$ непрерывна. Заметим, что

$$|(\mathcal{F}f)(t) - (\mathcal{F}f)(t+s)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - S_s f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

где $S_s \colon f(t) \mapsto f(t+s)$.

Значит, достаточно доказать, что $S_s f \to f$ при $s \to 0$ для всех f. Для этого достаточно показать сходимость на плотном множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (это очевидно) и ограниченность норм S_s:

$$\|S_s f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+s)\,\mathrm{d}x| = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда следует, что $\|S_s\| = 1$.

(2) Покажем, что $(\mathcal{F}f)(t) \to 0$ при $\|t\| \to \infty$. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, откуда следует требуемое. Если f — произвольная функция из $L^1(\mathbb{R}^n)$, то найдём

такую функцию $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$|(\mathcal{F}f)(t)| \leqslant |\mathcal{F}(f - f_\varepsilon)(t)| + |(\mathcal{F}f_\varepsilon)(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{n/2}} + |(\mathcal{F}f_\varepsilon)(t)| \to 0.$$

Значит, $(\mathcal{F}f)(t) \to 0$ при $\|t\| \to \infty$. ■

3.5 Теорема Котельникова–Шеннона–Виттакера

Теорема 3.9 (Теорема Котельникова–Шеннона–Виттакера). Для любой функции $f \in \mathrm{PW}_\pi$ выполнено равенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Более того,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Заметим, что система $E = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис пространства $L^2[-\pi,\pi]$. Действительно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt} = \frac{e^{i(m-n)t}}{m-n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad (\forall n \neq m),$$

то есть элементы E попарно ортогональны; и если $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = 0$, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}} g(z)z^n\,\mathrm{d}m(z) = 0 \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

где $g(e^{it}) = f(t)$. Значит, по теореме Стоуна–Вейерштрасса (тригонометрические полиномы — алгебра Стоуна на окружности),

$$\int\limits_{\mathbb{T}} g(z)h(z)\,\mathrm{d}m(z) = 0$$

для любой функции $h \in C(\mathbb{T})$. Значит, $g \equiv 0$, то есть ортогональное дополнение E тривиально.

Теперь применим $\mathcal{F}^{-1}$ к этому базису. Как мы вычисляли в доказательстве теоремы Пэли–Винера,

$$\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-a,a]} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(ax)}{x}.$$

Тогда

$$\left\{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\chi_{[-\pi,\pi]}\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-\pi,\pi]})(x-n))\right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}\right\}_{n\in Z}$$

— ортонормированный базис в PW_π. Из курса функционального анализа мы знаем, что в этом случае

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}, \tag{3.5}$$

где ряд сходится $L^2(\mathbb{R})$,

$$c_n = \left(f, \frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}\right)_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что сходимость в правой части (3.5) равномерна на компактах в $\mathbb{C}$. Пусть $|z| \leqslant K$, тогда $|\sin(\pi(z-n))| \leqslant e^{\pi K}$, а $\sum c_n^2$ и $\sum \frac{1}{(z-n)^2}$ сходятся равномерно по z:

$$\sum_{|n|>N} c_n \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)} \leqslant [\text{КБШ}] \leqslant \left(\sum_{|n|>N} c_n^2 \cdot \sum_{|n|>N} \frac{\sin^2(\pi(z-n))}{(\pi(z-n))^2}\right)^{1/2} \to 0.$$

Тогда в (3.5) справа стоит целая функция (как равномерный на компактах предел целых). Две целые функции совпадают почти всюду на $\mathbb{R}$, то есть по теореме единственности

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)} \qquad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Чтобы получить, что $c_N = f(N)$, нужно подставить в эту формулу $z = N$. ■

Интерпретация в теории обработки сигналов

Сигнал с конечной энергией — $f \in L^2(\mathbb{R})$, спектр сигнала — $\operatorname{supp} f$, сигнал с ограниченным спектром — такая функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, что $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$ для некоторого числа a.

«Инженерная задача» — передавать сигнал в зависимости от времени. Формула обращения преобразования Фурье может быть интерпретирована следующим образом: любой сигнал — это «линейная комбинация» гармоник $\{e^{ixt}\}_{t\in\mathbb{R}} = \{\cos xt + i\sin xt\}_{t\in\mathbb{R}}$. На практике сигналы часто имеют ограниченный спектр.

С учётом теоремы Котельникова (в случае спектра $[-\pi, \pi]$) мы можем передавать не саму функцию f, а только набор $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Более того, можно ограничиться конечным числом значений $\{f(n)\}_{|n|\leqslant N}$: ошибка при передаче

$$\left\| f - \sum_{n\leqslant N} f(n) \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

стремится к нулю при $N \to \infty$, так как $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty$.

4 Дискретное преобразование Фурье

4.1 Напоминание и примеры

Замечание. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n\in I}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, $h \in \mathcal{H}$. Тогда

$$h = \sum_{n\in I}(h, e_n)e_n,$$

где ряд сходится по норме в $\mathcal{H}$,

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in I} |(h, e_n)|^2.$$

Числа (h, e_n) называются *коэффициентами Фурье* h относительно базиса $\{e_n\}$. Отображение $\mathcal{F}\colon h \mapsto \{(h, e_n)\}$ — унитарный оператор из $\mathcal{H}$ в $\ell^2(I)$.

Пример 4.1. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $\{e_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ — стандартный базис. В этом случае коэффициенты Фурье вектора — это его запись в координатах.

Пример 4.2. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, m)$, $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ имеет место представление в виде $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$, где

$$c_n = \widehat{f}(n) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\overline{z}^n \,\mathrm{d}m(z),$$

а ряд сходится в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Такое представление называется *рядом Фурье* функции f. Общий вопрос — что можно сказать о его поточечной сходимости?

4.2 Поточечная сходимость ряда Фурье

Теорема (Карлесон, без доказательства). Ряд Фурье любой функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ сходится к f почти всюду на $\mathbb{T}$.

Это очень сложная теорема; её доказательством можно заниматься целый семестр.

Утверждение 4.1. Пусть $f \in L^2(\mathbb{T})$ непрерывна в некоторой окрестности $U(z_0)$, и функция $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)z^n$ (поточечный предел) определена и непрерывна в $U(z_0)$. Тогда $f \equiv g$ на $U(z_0)$.

Доказательство. Обозначим

$$f_N(z) := \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n)z^n.$$

Мы знаем, что $f_N \to f$ в $L^2(\mathbb{T})$. Тогда f_N сходится к f по мере[25], и по теореме Рисса существует такая подпоследовательность $\{N_k\}$, что f_{N_k} сходится к f поточечно почти всюду на $\mathbb{T}$. С другой стороны, $f_N \to g$ поточечно на $U(z_0)$. Значит, $f = g$ почти всюду на $U(z_0)$, и по непрерывности $f \equiv g$ на $U(z_0)$. ∎

[25] Это простое следствие неравенства Чебышева из теории меры.

Тем не менее, обычно тяжело понять, непрерывна ли сумма $g(z)$. Исключением является следующее следствие:

Следствие 4.2. Если $f \in C(\mathbb{T})$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$, то

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) z^n \quad \text{всюду на } \mathbb{T}.$$

Такие функции образуют *алгебру Винера*. ∎

Теорема 4.3. Существует такая функция $f \in C(\mathbb{T})$, что ряд Фурье f не сходится к f в точке 1.

Доказательство. Пусть это не так, тогда для любой $f \in C(\mathbb{T})$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n) = f(1).$$

Рассмотрим семейство функционалов $\Phi_N : f \mapsto \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n)$ на $C(\mathbb{T})$. Для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N(f) = f(1).$$

Поскольку пространство $C(\mathbb{T})$ банахово, можно применить теорему Банаха–Штейнгауза и получить, что $\sup_{N\in\mathbb{Z}} \|\Phi_N\| < \infty$. Оценим теперь нормы Φ_N снизу:

$$\begin{aligned}
\Phi_N(f) = \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n) &= \int\limits_{\mathbb{T}} f(z) z^{-N} (1 + \dots + z^{2N}) \,\mathrm{d}m(z) \\
&= \int\limits_{\mathbb{T}} f(z) \overline{z}^N \frac{1 - z^{2N+1}}{1 - z} \,\mathrm{d}m(z) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Выбирая последовательность $f_n \to \operatorname{sgn}(\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})})$, понимаем, что:

$$\begin{aligned}
\|\Phi_N\| &\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^2((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos((2N + 1)t)}{t} \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1}^{(2N+1)\pi} \frac{1 - \cos(t)}{t} \,\mathrm{d}t \\
&\geqslant c_1 \log(N) - \int\limits_{1}^{(2N+1)\pi} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t \geqslant [\text{этот интеграл сходится}] \geqslant c_2 \log(N).
\end{aligned}$$

Противоречие. ∎

4.3 Теорема Фейера

Обозначение. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$, $N \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим

$$S_N(f, z) := \sum_{-N}^{N} \widehat{f}(k) z^k, \quad \text{где } z \in \mathbb{T}.$$

Мы знаем, что существует такая функция $f \in C(\mathbb{T})$, что $S_N(f, 1) \not\to f(1)$ при $N \to \infty$.

Теорема 4.4 (Фейер). Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $z_0 \in \mathbb{T}$, и существуют пределы

$$f(z_0 + 0) = \lim_{t \to 0^+} f(e^{it} z_0), \quad f(z_0 - 0) = \lim_{t \to 0^+} f(e^{-it} z_0).$$

Тогда ряд Фурье f в точке z_0 сходится по Чезаро к значению

$$\frac{f(z_0 + 0) + f(z_0 - 0)}{2}.$$

В частности, если f непрерывна в точке z_0, то ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) z_0^k$$

сходится по Чезаро к $f(z_0)$. Если же $f \in C(\mathbb{T})$, то этот ряд сходится по Чезаро к функции f равномерно на $\mathbb{T}$.

Доказательство. По определению сходимость по Чезаро в точке z_0 означает, что существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f, z_0) = \frac{f(z_0 + 0) + f(z_0 - 0)}{2}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f, z_0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(\xi) \overline{\xi}^k z_0^k \, \mathrm{d}m(\xi) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi) p_N(\xi, z_0) \, \mathrm{d}m(\xi),$$

где

$$p_N(\xi, z_0) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \overline{\xi}^k z_0^k$$

— некоторый тригонометрический многочлен. Для продолжения доказательства нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 4.5. Имеет место следующее равенство:

$$p_N(\xi, z_0) = \frac{1}{N+1} |1 + \overline{\xi} z_0 + \cdots + (\overline{\xi} z_0)^N|^2 = \frac{1}{N+1} \left| \frac{1 - (\overline{\xi} z_0)^{N+1}}{1 - \overline{\xi} z_0} \right|^2.$$

Доказательство. Меняем порядок суммирования и вычисляем:

$$\begin{aligned}
p_N(\xi, z_0) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=|k|}^{N} \bar{\xi}^k z_0^k \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N}^{N} (N - |k| + 1) \bar{\xi}^k z_0^k \\
&= \frac{1}{N+1} (1 + \bar{\xi} z_0 + \cdots + (\bar{\xi} z_0)^N)(1 + (\bar{\xi} z_0)^{-1} + \cdots + (\bar{\xi} z_0)^{-N}) \\
&= \frac{1}{N+1} |1 + \bar{\xi} z_0 + \cdots + (\bar{\xi} z_0)^N|^2.
\end{aligned}$$

Здесь третье равенство проверяется раскрытием скобок. ■

Лемма 4.6. Семейство $\{p_N(\square, z_0\}_{N\in\mathbb{Z}_+}$ является аппроксимативной единицей с центром в точке z_0, то есть:

(1) $p_N \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{T}} p_N(\xi, z_0)\,\mathrm{d}m(\xi) = 1$;

(2) для всех $\delta > 0$ выполнено

$$\sup_{|\xi - z_0| > \delta} p_n(\xi, z_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Кроме того, p_N — чётная функция относительно z_0, то есть

(3) $p_N(e^{it} z_0, z_0) = p_N(e^{-it} z_0, z_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

(1) Ясно, что $p_N \geqslant 0$; $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{T})$, поэтому

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} p_N(\xi, z_0)\,\mathrm{d}m(\xi) &= \frac{1}{N+1} \int_{\mathbb{T}} |q(\xi)|^2\,\mathrm{d}m(\xi) \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{q}(k)|^2 \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{n} |z_0^k|^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = 1,
\end{aligned}$$

где $q(\xi) = 1 + \bar{\xi} z_0 + \cdots + (\bar{\xi} z_0)^N$. Во втором равенстве мы воспользовались формулой Парсеваля.

(2) Если $\delta > 0$ и $|\xi - z_0| > \delta$, то

$$p_N(\xi, z_0) = \frac{1}{N+1} \left| \frac{1 - (\bar{\xi} z_0)^{N+1}}{1 - \bar{\xi} z_0} \right|^2 \leqslant \frac{1}{N+1} \frac{2^2}{\delta^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

(3) По предыдущей лемме,

$$p_N(e^{it}z_0, z_0) = \frac{1}{N+1}|1 + e^{-it}|z_0|^2 + \dots + e^{-iNt}|z_0|^{2N}|^2,$$
$$p_N(e^{-it}z_0, z_0) = \frac{1}{N+1}|1 + e^{it}|z_0|^2 + \dots + e^{iNt}|z_0|^{2N}|^2,$$

а эти выражения равны, так как

$$\overline{1 + e^{-it}|z_0|^2 + \dots + e^{-iNt}|z_0|^{2N}} = 1 + e^{it}|z_0|^2 + \dots + e^{iNt}|z_0|^{2N}. \qquad \blacksquare$$

Лемма 4.7. Пусть $h \in L^\infty[-\pi, \pi]$, существуют пределы

$$\lim_{x \to 0^\pm} h(x) = h(0\pm),$$

и предположим, что r_n — чётная аппроксимативная единица на $[-\pi, \pi]$ с центром в нуле. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x) r_n(x)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{h(0+) + h(0-)}{2}.$$

Доказательство. В силу чётности r_n достаточно проверить, что

$$\int_0^{\pi} h(x) r_n(x)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{h(0+)}{2}.$$

Это так, поскольку

$$\int_0^{\pi} h(x) r_n(x)\, \mathrm{d}x - \frac{h(0+)}{2} = \int_0^{\pi} (h(x) - h(0+)) r_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}.$$

Первый интеграл не больше $\sup_{x\in[0,\delta]} |h(x) - h(0+)| \cdot 1 \to 0$ при $\delta \to 0$ по условию леммы. Второй интеграл не больше $(\operatorname{ess\,sup} h) \cdot \int_\delta^\pi r_n(x)\, \mathrm{d}x$, и это число стремится к нулю при $n \to \infty$ по второму свойству аппроксимативной единицы. $\blacksquare$

Доказательство теоремы Фейера, продолжение. Положим

$$h(t) := f(z_0 e^{it}), \quad r_N(t) := \frac{1}{2\pi} \cdot p_N(z_0 e^{it}, z_0),$$

где $t \in [-\pi, \pi]$. По лемме 4.6 r_N — чётная аппроксимативная единица с центром в нуле, и по лемме 4.7

$$\int_{\mathbb{T}} f(\xi) p_N(\xi, z_0)\, \mathrm{d}m(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) p_N(z_0 e^{it}, z_0)\, \mathrm{d}t$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{h(0+) + h(0-)}{2} = \frac{f(z_0 + 0) + f(z_0 - 0)}{2}.$$

Более того, если $f \in C(\mathbb{T})$, то оценки в лемме 4.7 равномерны по z_0. ■

Замечание. В инженерных задачах часто бывает, что надо передать некоторую функцию с помощью конечного набора чисел. Теорема Фейера позволяет восстановить непрерывную функцию по конечному числу её коэффициентов Фурье с *равномерно малой* погрешностью.

4.4 Теорема Харди

Теорема 4.8 (Харди). Пусть $f \in \mathrm{BV}(-\pi, \pi)$,[26]

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x.$$

Тогда ряд Фурье функции f

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

сходится к числу

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

для любого $x \in (-\pi, \pi)$.

Замечание. Так как $f \in \mathrm{BV}(-\pi, \pi)$, то f представляется в виде линейной комбинации монотонных функций, а потому значения $f(x \pm 0)$ существуют.

Пример 4.3. Любая кусочно-гладкая функция на $(-\pi, \pi)$ с ограниченной (и даже просто суммируемой по мере Лебега) производной является функцией из $\mathrm{BV}(-\pi, \pi)$, поэтому можно применить к ней теорему Харди. Например, ряд Фурье функции $|x|$ сходится к ней самой всюду на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Доказательство теоремы Харди. Напомним, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится по Чезаро и $|a_n| \leqslant \frac{c}{n}$ для всех $n \geqslant 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится в обычном смысле[27]. Таким образом, осталось понять, что для ряда $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$ есть оценка $|\widehat{f}(n) e^{int}| \leqslant \frac{c}{|n|}$ при каждом $t \in [-\pi, \pi]$, или, что то же самое, есть оценка $|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{c}{|n|}$. После этого можно будет воспользоваться теоремой Фейера для функции $h(e^{it}) = f(t)$ и тауберовой теоремой Харди. Оценка на коэффициенты вытекает из следующей леммы. ■

Лемма 4.9. Если $f \in \mathrm{BV}(-\pi, \pi)$, то $\widehat{f}(n) = O(\frac{1}{n})$ при $|n| \to \infty$.

Доказательство. Переопределим f в точках разрыва (если такие есть) значением $f(x-0)$. Новая функция будет непрерывной слева, при этом она всё ещё будет лежать в $\mathrm{BV}(-\pi, \pi)$ (это очевидно для ограниченных монотонных функций, а любая функция ограниченной вариации есть линейная комбинация нескольких ограниченных монотонных функций) и будет иметь те же коэффициенты Фурье, так как мы меняем

[26] Напомним, что BV — функции ограниченной вариации (bounded variation). Здесь мы рассматриваем функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, то есть имеется в виду, что $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ — функции ограниченной вариации в обычном смысле.

[27] Это тауберова теорема Харди, см. конспект второго семестра.

функцию на счётном множестве, то есть множестве меры ноль. Таким образом, мы можем считать функцию f непрерывной слева. Тогда существует такой заряд μ, что[28]

$$f(x) = \mu\big([-\pi, x)\big) + f(-\pi) \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Тогда при $|n| \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(-\pi) + \int\limits_{[-\pi,x)} \mathrm{d}\mu(s)\right)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
[|n| \geqslant 1] &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{[-\pi,x)} \mathrm{d}\mu(s)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)}\int\limits_{s}^{\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)}\left(\left.\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_{s}^{\pi}\right)\mathrm{d}\mu(s) \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{-2i\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)}(e^{-in\pi} - e^{-ins})\,\mathrm{d}\mu(s) = O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

Объясним поподробнее последний переход. Подынтегральная функция g ограничена по модулю константой $c = 2$. Кроме того, в теории меры мы проходили оценку

$$\left|\int\limits_{[-\pi,\pi)} g(s)\,\mathrm{d}\mu(s)\right| \leqslant \int\limits_{[-\pi,\pi)} |g(s)|\,\mathrm{d}|\mu|(s),$$

где $|\mu|$ — вариация заряда μ. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{[-\pi,\pi)} g(s)\,\mathrm{d}\mu(s)\right| \leqslant 2|\mu|([-\pi,\pi)).$$

■

[28]См. курс по теории меры (теорема 16.3).

5 Формула суммирования Пуассона

Теорема 5.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta_{\mathbb{Z}^d} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k$, где δ_k — мера Дирака в точке k, то есть

$$\delta_k(S) = \begin{cases} 1, & k \in S, \\ 0, & k \notin S, \end{cases} \qquad \text{где} \;\; S \subset \mathbb{R}^n.$$

Аналогично, положим $\delta_{2\pi\mathbb{Z}^d} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_{2\pi k}$. Тогда

$$\mathcal{F}(\delta_{\mathbb{Z}^d}) = (2\pi)^{d/2}\delta_{2\pi\mathbb{Z}^d}. \tag{5.1}$$

Здесь мера $\delta_{\mathbb{Z}^d}$ рассматривается как распределение медленного роста.

Замечание. Равенство (5.1) означает, что для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\varphi)(k) = (2\pi)^{d/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2\pi k),$$

или, иными словами, что для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(k) = (2\pi)^{d/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(2\pi k) = (2\pi)^{d/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\varphi)(2\pi k).$$

Доказательство. Возьмём произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и определим

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(x+k).$$

Этот ряд сходится поточечно, так как

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x+k)| &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{c_0}{1+\|k\|^{2d}} \\ &\leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}\lambda_d(t)}{1+\|t\|^{2d}} \\ &= c_2 \int\limits_0^\infty \frac{|S(0,1)|r^{d-1}}{1+r^{2d}}\,\mathrm{d}r \\ &\leqslant c_3 \left(1 + \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{1+r^{d+1}}\right) < \infty. \end{aligned}$$

Покажем по индукции, что $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Предположим, что для некоторого мульти-индекса α

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \psi(x+k), \quad \text{где} \;\; \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x_i}\psi$ также лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то есть ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x+k)$$

сходится равномерно. Тогда по теореме Стокса–Зейделя

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha \partial x_i}f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\psi_i(x+k),\quad \text{где } \psi_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\psi.$$

Таким образом, мы получаем переход индукции. Отметим также, что $f(x+k)=f(x)$ для всех $k\in\mathbb{Z}^d$.

Обозначим $Q:=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$, и заметим, что система функций $\{e^{2\pi i\langle x,k\rangle}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L^2(Q)$. Действительно,

$$\int\limits_Q |e^{2\pi i\langle x,k\rangle}|^2\,\mathrm{d}\lambda_d(x)=\int\limits_Q 1\,\mathrm{d}\lambda_d=1;$$

$$\int\limits_Q e^{2\pi i\langle x,k\rangle}\overline{e^{2\pi i\langle x,j\rangle}}=\int\limits_Q e^{2\pi i\langle x,k-j\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x).$$

Если $k\neq j$, то существует такое s_0, что $1\leqslant s_0\leqslant d$ и $k_{s_0}-j_{s_0}\neq 0$, и тогда

$$\int\limits_Q e^{2\pi i\langle x,k-j\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)=\prod_{s=1}^{d}\int\limits_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi i x_s(k_s-j_s)}\,\mathrm{d}x_s=0,$$

поскольку

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}e^{2\pi i x_{s_0}(k_{s_0}-j_{s_0})}\,\mathrm{d}x_{s_0}=0.$$

Для доказательства полноты надо перейти на $\mathbb{T}^d$ и воспользоваться теоремой Стоуна–Вейерштрасса для алгебры $\operatorname{span}\{z_1^{l_1}\dots z_d^{l_d}\mid l_1,\dots,l_d\in\mathbb{Z}\}$. Таким образом, в $L^2(Q)$ верно

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(k)e^{2\pi i\langle x,k\rangle},\tag{5.2}$$

где

$$\widehat{f}(k)=\int\limits_Q f(x)e^{-2\pi i\langle x,k\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x).$$

При этом для всех $N\in\mathbb{N}$

$$\widehat{f}(k)\leqslant\int\limits_{-1/2}^{1/2}\dots\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left|\int\limits_{-1/2}^{1/2}f(x)e^{-2\pi i k_1 x_1}\,\mathrm{d}x_1\right|\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n$$
$$=[N \text{ раз интегрируем по частям и пользуемся периодичностью } f]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1/2}^{1/2} \dots \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(2\pi k_1)^N} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x_1^N}(x) e^{-2\pi i k_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1 \right| \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n \\
&\leqslant \left[\text{можем считать, что } k_1 \geqslant \frac{\|k\|}{n} \right] \\
&\leqslant \frac{n^N}{(2\pi \|k\|)^N} \int_Q \left| \frac{\partial f}{\partial x_1^N}(x) \right| \mathrm{d}\lambda_d(x) \leqslant \frac{c_N}{1 + \|k\|^N}.
\end{aligned}
$$

Значит, ряд в правой части (5.2) сходится равномерно, то есть является непрерывной функцией от x. Тогда из сходимости в $L^2(Q)$ следует поточечная сходимость. Подставляя в (5.2) $x = 0$, получаем:

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(k) = f(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_d} \widehat{f}(k). \tag{5.3}
$$

Посчитаем $\widehat{f}(k)$ в терминах функции φ:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \int_Q f(x) e^{-2\pi i \langle x, k \rangle}\, \mathrm{d}\lambda_d(x) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \int_Q \varphi(x + j) e^{-2\pi i \langle x, k \rangle}\, \mathrm{d}\lambda_d(x) \\
&\overset{29}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \int_{Q+j} \varphi(y) e^{-2\pi i \langle y, k \rangle}\, \mathrm{d}\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-2\pi i \langle y, k \rangle}\, \mathrm{d}\lambda_d(y) \\
&= (2\pi)^{d/2} (\mathcal{F}\varphi)(2\pi k).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (2\pi)^{d/2} (\mathcal{F}\varphi)(2\pi k).
$$

Это как раз то, что мы хотели доказать — см. (5.3). ■

6 Проблема круга

6.1 Постановка и идея доказательства

Задача состоит в том, чтобы найти асимптотическое поведение для числа целых точек в круге большого радиуса с точностью до второго члена асимптотики. Другими

[29] Можем заменить x на $x + j$, так как $e^{-2\pi i \langle j, k \rangle} = 1$ при целых j и k.

словами, нас интересует поведение функции

$$N(R) := \#\{(m,n) : m^2+n^2 < R^2\}.$$

Теорема 6.1. Имеет место равенство

$$N(R) = \pi R^2 + O(R^{2/3}), \quad R \to \infty.$$

Идея доказательства. Мы хотим доказать следующее:

$$N(R) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \chi_{B(0,R)}(k) \overset{?}{=} 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \widehat{\chi}_{B(0,R)}(2\pi k) = 2\pi\widehat{\chi}_{B(0,R)}(0) + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \widehat{\chi}_{B(0,R)}(2\pi k).$$

Формально мы не можем пользоваться формулой суммирования Пуассона, так как $\chi_{B(0,R)} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Заметим, что

$$2\pi\widehat{\chi}_{B(0,R)}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \chi_{B(0,R)}(x)\,\mathrm{d}\lambda_2(x) = |B(0,R)| = \pi R^2.$$

Второе слагаемое равно $O(R^p)$, и мы можем надеяться, что степень p маленькая.

6.2 Предварительные леммы

Обозначение. Пусть $B = B(0,1)$ и

$$\varphi \geqslant 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi\,\mathrm{d}\lambda_n = 1, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset B, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\varphi_\varepsilon := \varepsilon^{-2}\varphi(\tfrac{x}{\varepsilon}).$$

Тогда

$$\varphi_\varepsilon \geqslant 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda_n = 1, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset B(0,\varepsilon), \quad \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Обозначим $\chi_\varepsilon := \chi_B * \varphi_\varepsilon$.

Лемма 6.2. Выполнено равенство

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leqslant 1-\varepsilon, \\ \xi(x), & \|x\| \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \\ 0, & \|x\| \geqslant 1+\varepsilon, \end{cases}$$

где $0 \leqslant \xi(x) \leqslant 1$. Кроме того, $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

- Если $\|x\| \leqslant 1 - \varepsilon$, то

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \chi_B(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y)\\ &= \int\limits_{B} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y)\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) = 1.\end{aligned}$$

- Если $\|x\| \geqslant 1 + \varepsilon$, то

$$\chi_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \chi_B(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) = \int\limits_{B} \varphi_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_2(y) = 0.$$

- Для любого x справедливо

$$0 \leqslant \chi_\varepsilon(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}\lambda_2 = 1.$$

Функция χ_ε лежит в $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, так как $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и можно дифференцировать по параметру. ■

Следствие 6.3. Для любых $x \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\chi_\varepsilon((1+\varepsilon)\tfrac{x}{R}) \leqslant \chi_{B(0,R)}(x) \leqslant \chi_\varepsilon((1-\varepsilon)\tfrac{x}{R}).$$

Доказательство. Из предыдущей леммы нетрудно вывести неравенства

$$\chi_\varepsilon((1+\varepsilon)x) \leqslant \chi_B(x) \leqslant \chi_\varepsilon((1-\varepsilon)x).$$

Осталось подставить x/R вместо x и заметить, что $\chi_B(x/R) = \chi_{B(0,R)}(x)$. ■

Лемма 6.4. Выполнено

$$(\mathcal{F}\chi_B)(t) = O\left(\frac{1}{\|t\|^{3/2}}\right), \quad \|t\| \to +\infty.$$

Доказательство. По определению,

$$2\pi(\mathcal{F}\chi_B)(t) = \int\limits_{B} e^{-i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_2(x) = \int\limits_{B} e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_2(x).$$

Мы знаем, что $UB = B$ и $\lambda_2(X) = \lambda_2(UX)$, если оператор $U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ унитарен. В частности, это верно для поворота U_t, который переводит фиксированный вектор t в

$\|t\| \cdot e_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_B e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_2(x) &= \int\limits_B e^{i\langle U(x),U(t)\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_2(x) \\
&= \int\limits_B e^{i\langle x,\|t\|e_1\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_2(x) \\
&= \int\limits_B e^{i\|t\|x_1}\,\mathrm{d}\lambda_2(x) \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} e^{i\|t\|x_1}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x_1^2} \cdot e^{i\|t\|x_1}\,\mathrm{d}x_1.
\end{aligned}$$

Хотим оценить асимптотику последнего интеграла при $\|t\| \to \infty$. Положим

$$f(z) := \sqrt{1-z^2} \cdot e^{i\|t\|z}.$$

Это аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Также рассмотрим отрезки

$$\begin{aligned}
\gamma &= [-1,1], \\
\gamma_{1,s} &= [-1,-1+is], \\
\gamma_{2,s} &= [-1+is,1+is], \\
\gamma_{3,s} &= [1+is,1].
\end{aligned}$$

Тогда[30]

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x_1^2} \cdot e^{i\|t\|x_1}\,\mathrm{d}x_1 = \int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_{1,s}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_{2,s}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_{3,s}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

При $s \to \infty$ имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_{2,s}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2 \cdot \max_{z\in\gamma_{2,s}} |\sqrt{1-z^2}|e^{-\|t\|s} \to 0,$$

а потому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{[-1,-1+i\infty]} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{[1,1+i\infty]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

[30] Когда мы пишем интеграл по γ, мы имеем в виду предел интегралов по $[-1+\delta i, 1+\delta i] \subset \mathbb{C}^+$ при $\delta \to 0$.

Разберёмся с асимптотикой второго интеграла (асимптотика первого находится аналогичным образом).

$$\left|\int_0^\infty \sqrt{1-(1+iy)^2}e^{i\|t\|(1+iy)}\,\mathrm{d}y\right| = O\left(\int_0^1 \sqrt{y}e^{-\|t\|y}\,\mathrm{d}y + \int_1^\infty ye^{-\|t\|y}\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= \left[u=\|t\|y, y \leqslant ce^{\|t\|y/2}\right] = O\left(\frac{1}{\|t\|^{3/2}}\int_0^{\|t\|}\sqrt{u}e^{-u}\,\mathrm{d}u + \int_1^\infty e^{-\|t\|y/2}\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= \left[\int_0^\infty \sqrt{u}e^{-u}\,\mathrm{d}u < \infty\right] = O\left(\frac{1}{\|t\|^{3/2}} + \frac{e^{-\|t\|/2}}{\|t\|}\right) = O\left(\frac{1}{\|t\|^{3/2}}\right). \qquad \blacksquare$$

6.3 Доказательство

Доказательство теоремы 6.1. Вместо $\chi_{B(0,R)}$ будем применять формулу суммирования Пуассона к функциям $\chi_\varepsilon(\frac{x}{r})$, где $r = \frac{R}{1\pm\varepsilon}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\chi_\varepsilon\left(\frac{k}{r}\right) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\left(\mathcal{F}\chi_\varepsilon\left(\frac{\square}{r}\right)\right)(2\pi k). \tag{6.1}$$

Заметим, что если $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\widetilde{\psi}(x) = \psi(\frac{x}{\lambda})$, то

$$(\mathcal{F}\widetilde{\psi})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)e^{-i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_2(x) = (\mathcal{F}\psi)(\lambda t)\cdot\lambda^2.$$

Продолжим равенство (6.1):

$$\begin{aligned}
(6.1) &= 2\pi r^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(\mathcal{F}\chi_\varepsilon)(2\pi rk)\\
&= \left[\mathcal{F}(\chi_B*\varphi_\varepsilon)(t) = 2\pi\cdot(\mathcal{F}\chi_B)(t)\cdot(\mathcal{F}\varphi_\varepsilon)(t) = 2\pi\cdot(\mathcal{F}\chi_B)(t)\cdot(\mathcal{F}\varphi)(\varepsilon t)\right]\\
&= (2\pi)^2r^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}(\mathcal{F}\chi_B)(2\pi rk)\cdot(\mathcal{F}\varphi)(\varepsilon\cdot 2\pi rk)\\
&= (2\pi)^2r^2(\mathcal{F}\chi_B)(0)\cdot(\mathcal{F}\varphi)(0) + (2\pi)^2r^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}(\mathcal{F}\chi_B)(2\pi rk)\cdot(\mathcal{F}\varphi)(\varepsilon\cdot 2\pi rk)
\end{aligned}$$

Посчитаем первое слагаемое:

$$(2\pi)^2r^2(\mathcal{F}\chi_B)(0)\cdot(\mathcal{F}\varphi)(0) = (2\pi)^2r^2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_B\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi = r^2\lambda_2(B) = \pi r^2.$$

Хотим показать, что πr^2 — главный член асимптотики. Для этого оценим остаток (пользуемся леммой 6.4 и тем, что $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{aligned}(2\pi)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} (\mathcal{F}\chi_B)(2\pi rk)\cdot(\mathcal{F}\varphi)(2\pi\varepsilon rk) &= O\left(r^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{\|rk\|^{3/2}}\cdot\frac{1}{\|\varepsilon rk\|^2+1}\right)\\ &= O\left(r^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}\lambda_2(x)}{\|rx\|^{3/2}(\|\varepsilon rx\|^2+1)}\right)\\ [u=\varepsilon rx] &= O\left(r^2\frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^2 r^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_2(u)}{\|u\|^{3/2}(\|u\|^2+1)}\right) = O(\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}),\end{aligned}$$

так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_2(u)}{\|u\|^{3/2}(\|u\|^2+1)} = \int\limits_0^\infty \frac{2\pi t}{t^{3/2}(t^2+1)}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\chi_\varepsilon\left(\frac{k}{r}\right) = 2\pi r^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Подставим $r = \frac{R}{1-\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}N(R) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\chi_{B(0,R)}(k) &\leqslant \sum_{k\in Z^2}\chi_\varepsilon\left(\frac{k}{r}\right)\\ &= 2\pi r^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\ &= 2\pi R^2 + 2\pi\left(\frac{R^2}{(1-\varepsilon)^2} - R^2\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\\ = [\text{при } \varepsilon < \frac{1}{2}] &= 2\pi R^2 + O\left(R^2\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\end{aligned}$$

Выберем оптимальное ε при фиксированном R (минимизируем значение выражения $R^2\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{(2R^2)^{2/3}}.$$

Тогда в итоговой оценке

$$R^2\varepsilon_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} = O(R^{2/3}).$$

Аналогично, подставим $r = \frac{R}{1+\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}N(R) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\chi_{B(0,R)}(k) &\geqslant \sum_{k\in Z^2}\chi_\varepsilon\left(\frac{k}{r}\right)\\ = [\text{выбираем такое же } \varepsilon_0] &= 2\pi R^2 + O(R^{2/3})\end{aligned}$$

■

7 Теорема Рисса–Торина и её приложения

7.1 Теорема Рисса–Торина

Теорема 7.1 (Рисс, Торин). Пусть μ, ν — σ-конечные меры, зафиксированы числа $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1, +\infty]$, оператор T плотно задан на простых функциях и непрерывен как оператор между пространствами $(L^{p_0}(X,\mu), L^{q_0}(Y,\nu))$ и $(L^{p_1}(X,\mu), L^{q_1}(Y,\nu))$. Тогда T непрерывен как плотно заданный оператор для любой пары $(L^{p_\theta}(X,\mu), L^{q_\theta}(Y,\nu))$, где

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right) \qquad \forall \theta \in [0,1].$$

Кроме того, $\|T\|_{p_\theta, q_\theta} \leqslant \|T\|_{p_0,q_0}^{1-\theta} \cdot \|T\|_{p_1,q_1}^{\theta}$.

Доказательство. Пусть q_0', q_1', q_θ' — сопряжённые показатели к q_0, q_1 и q_θ соответственно[31]. Зафиксируем $\theta \in (0,1)$; рассмотрим простые функции f, g, такие что

$$\|f\|_{L^{p_\theta}(\mu)} \leqslant 1, \quad \|g\|_{L^{q_\theta'}(\nu)} \leqslant 1. \tag{7.1}$$

Определим для всех $z \in \mathbb{C}$, таких что $\operatorname{Re} z \in [0,1]$[32]

$$\begin{aligned} f_z &:= |f|^{p_\theta\left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)} \operatorname{sgn} f, \\ g_z &:= |g|^{q_\theta'\left(\frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}\right)} \operatorname{sgn} g, \\ \Phi(z) &:= \int\limits_Y (T f_z) g_z \, \mathrm{d}\nu, \end{aligned}$$

где $\operatorname{sgn} z = e^{i \arg z}$ для $z \neq 0$, и $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Таким образом, $\operatorname{sgn} f \cdot |f| = f$. Докажем, что:

(1) Φ аналитична в полосе $\operatorname{Re} z \in (0,1)$ и непрерывна в полосе $\operatorname{Re} z \in [0,1]$;

(2) Φ ограничена в полосе $\operatorname{Re} z \in [0,1]$;

(3) $|\Phi(iy)| \leqslant \|T\|_{p_0,q_0}$, $|\Phi(1+iy)| \leqslant \|T\|_{p_1,q_1}$.

Тогда по теореме Адамара о трёх прямых

$$|\Phi(\theta + iy)| \leqslant \|T\|_{p_0,q_0}^{1-\theta} \cdot \|T\|_{p_1,q_1}^{\theta} = c_\theta \qquad (\forall y \in \mathbb{R}).$$

После этого останется заметить, что по определению p_θ и q_θ справедливы равенства

[31] То есть $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0'} = 1$, и аналогично для q_1' и q_θ'.

[32] Отметим, что если какие-то из p_0, p_1, q_0', q_1' равны $+\infty$, то эти определения остаются корректными.

$f_\theta = f$ и $g_\theta = g$, то есть $\Phi(\theta) = \int_Y (Tf) g \, \mathrm{d}\nu$, откуда

$$\left| \int\limits_Y (Tf) g \, \mathrm{d}\nu \right| \leqslant c_\theta$$

для любых простых функций f, g, удовлетворяющих условию (7.1). Тогда по двойственности[33] $\|Tf\|_{L^{q_\theta}(\nu)} \leqslant c_\theta$ для всех простых f, таких что $\|f\|_{L^{p_\theta}} \leqslant 1$. Это и значит, что $\|T\|_{p_\theta, q_\theta} \leqslant c_\theta$.

(1–2) Пусть $f = \sum a_k \chi_{E_k}$, $g = \sum b_l \chi_{F_l}$. Тогда Tf_z и g_z представляются в виде конечной линейной комбинации не зависящих от z функций с аналитическими (по z) коэффициентами:

$$Tf_z = \sum |a_k|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})} \operatorname{sgn}(a_k) \cdot T\chi_{E_k},$$
$$g_z = \sum |b_l|^{q'_\theta(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1})} \operatorname{sgn}(b_l) \cdot \chi_{F_l}.$$

Значит, Φ можно записать в следующем виде:

$$\Phi(z) = \sum_{k,l} |a_k|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})} \operatorname{sgn}(a_k) \cdot |b_l|^{q'_\theta(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1})} \operatorname{sgn}(b_l) \cdot \int\limits_Y T\chi_{E_k} \cdot \chi_{F_k} \, \mathrm{d}\nu,$$

— это линейная комбинация аналитических функций. При этом

$$\left| |a_k|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})} \right| = |a_k|^{p_\theta(\frac{1-\operatorname{Re} z}{p_0} + \frac{\operatorname{Re} z}{p_1})} \leqslant c \quad \text{при } \operatorname{Re} z \in [0,1].$$

Из этой оценки и аналогичной оценки для b_l следует ограниченность.

(3) Оценим $\Phi(iy)$ с помощью неравенства Гёльдера:

$$|\Phi(iy)| \leqslant \|Tf_{iy}\|_{q_0} \cdot \|g_{iy}\|_{q'_0} \leqslant \|T\|_{p_0, q_0} \cdot \|f_{iy}\|_{p_0} \cdot \|g_{iy}\|_{q'_0}.$$

Во втором неравенстве мы воспользовались непрерывностью T как оператора из L^{p_0} в L^{q_0}. Теперь надо оценить p_0-норму f_{iy}:

$$\|f_{iy}\|_{p_0}^{p_0} = \int\limits_X |f_{iy}|^{p_0} \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \left| |f|^{p_\theta(\frac{1-iy}{p_0} + \frac{iy}{q_0})} \right|^{p_0} \mathrm{d}\mu = \int\limits_X |f|^{p_\theta} \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} \leqslant 1.$$

В третьем равенстве мы избавились от мнимой части, так как $|a^{iy}| = 1$ для всех $a > 0$ и $y \in \mathbb{R}$. Последнее неравенство выполнено по нашему выбору функции f. Аналогично,

$$\|g_{iy}\|_{q'_0}^{q'_0} \leqslant \|g\|_{q'_\theta}^{q'_\theta} \leqslant 1,$$

[33] Здесь имеется в виду тот факт, что для σ-конечной меры μ существует изоморфизм

$$(L^p(\mu))^* \simeq L^{p'}(\mu).$$

и мы получаем искомую оценку на $|\Phi(iy)|$. Оценка для $\Phi(1+iy)$ выводится таким же образом. ■

7.2 Неравенство Юнга–Хаусдорфа

Теорема 7.2 (неравенство Юнга–Хаусдорфа). Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.[34] Тогда $\mathcal{F}f \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ и $\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$.

Доказательство. Обозначим $T := \mathcal{F}$. Это корректно заданный и линейный на простых функциях оператор:

$$\begin{aligned} &T\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \|T\|_{2,2} = 1; \\ &T\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \|T\|_{1,\infty} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Равенство $\|T\|_{2,2} = 1$ следует из унитарности $\mathcal{F}$ (равенство Парсеваля). Поясним оценку на вторую норму:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,t\rangle}\, \mathrm{d}\lambda_n(x) \right| \\ &\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, \mathrm{d}\lambda_n(x) \leqslant \frac{\|f\|_{L^1}}{(2\pi)^{n/2}}. \end{aligned}$$

По теореме Рисса–Торина, $T\colon L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n) \to L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n)$ для всех таких $\theta \in (0,1)$, что

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = (1-\theta)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \theta(1,0) = \left(\frac{1+\theta}{2}, \frac{1-\theta}{2}\right).$$

Убедимся, что $p_\theta \in [1,2]$ и $q_\theta = p'_\theta$. Ясно, что $p_\theta = \frac{2}{1+\theta} \in [1,2]$, и достигается каждое число в этом промежутке. Далее,

$$1 - \frac{1}{q_\theta} = 1 - \frac{1-\theta}{2} = \frac{1+\theta}{2} = \frac{1}{p_\theta},$$

то есть $\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{q_\theta} = 1$ и $q_\theta = p'_\theta$. Наконец, по второй части теоремы Рисса–Торина

$$\|T\|_{p_\theta,q_\theta} \leqslant \|T\|_{2,2}^{1-\theta} \cdot \|T\|_{1,\infty}^{\theta} = 1 \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right)^{\theta} \leqslant 1.$$

Таким образом, если $p = p_\theta$, $p' = q_\theta$, то $\|\mathcal{F}f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. ■

Упражнение. Докажите, что для любой функции $f \in L^p(\mathbb{T}, m)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, верна оценка

$$\left(\sum |\widehat{f}(n)|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{T},m)}.$$

[34] Здесь существенно, что $p \leqslant 2$. При $p > 2$ это утверждение неверно.

7.3 Неравенство Юнга для свёртки

Утверждение 7.3 (неравенство Юнга для свёртки). Пусть числа $p, q, r \in [1, +\infty]$ таковы, что

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{7.2}$$

Тогда для любых $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \tag{7.3}$$

Доказательство. Мы уже знаем, что $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Рассмотрим простые функции $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Для них выполнено следующее:

$$|(f * g)(y)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y - x) g(x)\, \mathrm{d}\lambda_n(x) \right| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g|\, \mathrm{d}\lambda_n = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1.$$

Следовательно, оператор $T\colon f \mapsto f * g$ — линейный, корректно заданный на простых функциях, непрерывный в паре $(L^{p_\theta}, L^{q_\theta})$, где $\|T\|_{1,1} \leqslant \|g\|_1$ и $\|T\|_{\infty,\infty} \leqslant \|g\|_1$,

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = (1 - \theta)\,(1, 1) + \theta(0, 0) = (1 - \theta, 1 - \theta).$$

Значит, T непрерывен как оператор из $L^{\frac{1}{1-\theta}}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{\frac{1}{1-\theta}}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{1-\theta} \in [1, +\infty]$;

$$\|T\|_{p_\theta, p_\theta} \leqslant \|g\|_1^{1-\theta} \cdot \|g\|_1^{\theta} = \|g\|_1.$$

Таким образом, $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_1$, то есть мы доказали неравенство (7.3) в случае $q = 1$. Теперь рассмотрим (тот же самый) оператор

$$\widetilde{T}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad g \mapsto f * g.$$

По только что доказанному неравенству $\|\widetilde{T}\|_{1,p} \leqslant \|f\|_p$. Кроме того,

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y - x)| \cdot |g(x)|\, \mathrm{d}\lambda_n(x) \leqslant \|g\|_{p'} \cdot \|f\|_p.$$

Значит, $\|\widetilde{T}\|_{p',\infty} \leqslant \|f\|_p$, то есть по теореме Рисса–Торина оператор $\widetilde{T}$ действует из $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n)$ для любых

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = (1 - \theta)\left(1, \frac{1}{p}\right) + \theta\left(\frac{1}{p'}, 0\right) = \left(1 - \theta + \frac{\theta}{p'}, \frac{1 - \theta}{p}\right),$$

и имеет место неравенство

$$\|\widetilde{T}\|_{p_\theta, q_\theta} \leqslant \|f\|_p^{1-\theta} \cdot \|f\|_p^{\theta} = \|f\|_p.$$

Отсюда $\|f * g\|_{q_\theta} \leqslant \|g\|_{p_\theta} \cdot \|f\|_p$. Осталось взять $\theta = \frac{p}{q'}$. Заметим, что из (7.2) следует, что $1 - \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{p}$, то есть

$$0 \leqslant \theta = \frac{p}{q'} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) \leqslant 1.$$

Нетрудно проверить, что $q_\theta = \frac{p}{1-\theta} = r$ и $p_\theta = \frac{1}{1-\theta+\frac{\theta}{p'}} = q$. ■

8 Мера Хаара

8.1 Локально компактные группы и инвариантные меры

В этом параграфе через G мы будем обозначать *локально компактную топологическую группу* (то есть хаусдорфово топологическое пространство с непрерывными операциями умножения и обращения, вместе с которыми G образует группу; в котором каждая точка имеет окрестность, замыкание которой компактно).

Определение. Пусть μ — борелевская мера на G. Тогда мера μ называется:

- *инвариантной слева*, если $\mu(E) = \mu(x^{-1}E)$ для любых $E \in \mathcal{B}(G)$ и $x \in G$;
- *инвариантной справа*, если $\mu(E) = \mu(Ex)$ для любых $E \in \mathcal{B}(G)$ и $x \in G$;
- *инвариантной*, если она инвариантна слева и справа.

Пример 8.1. Пусть $G = \mathbb{R}^n$ с операцией сложения. Тогда $\mu = \lambda_n$ — мера, инвариантная относительно G.

Пример 8.2. Пусть $G = \mathbb{T}$ с операцией умножения комплексных чисел. Тогда мера $\mu = m$ инвариантна относительно G.

Пример 8.3. Пусть $G = \mathbb{Z}^2$ с операцией сложения и дискретной топологией. Тогда считающая мера на $\mathbb{Z}^2$ инвариантна относительно G.

Замечание. Ненулевая инвариантная слева регулярная[35] мера на G называется *левой мерой Хаара* (позже мы покажем, что такая мера существует для любой локально компактной топологической группы G).

Замечание. Если μ — мера Хаара, инвариантная относительно G слева, то мера $\nu(E) = \mu(E^{-1})$ инвариантна относительно G справа.

Замечание. Если группа G коммутативна, то инвариантность слева равносильна инвариантности справа.

[35] Это значит, что мера μ конечна на компактах, и для любого борелевского множества E

$$\sup_{K \subset E} \mu(K) = \mu(E) = \inf_{E \subset U} \mu(U),$$

где супремум берётся по компактам, а инфимум — по открытым множествам.

8.2 Существование меры Хаара

Теорема 8.1. Пусть G — локально компактная топологическая группа. Тогда на G существует инвариантная слева мера Хаара.

Введём несколько обозначений:

- $C_c(G)$ — множество непрерывных функций из G в $\mathbb{R}$ с компактным носителем;
- если $g \in C_c(G)$, $x \in G$, то обозначим $g_x \colon y \mapsto g(x^{-1}y)$;
- для $f, g \in C_c(G)$, таких что $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, причём $g \not\equiv 0$, положим

$$(f : g) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} t_n \;\middle|\; x_n \in G, t_n \geqslant 0 : f(y) \leqslant \sum_{n=1}^{N} t_n g_{x_n}(y) \;\; \forall y \in G\right\}.$$

Отметим, что $(f : g) < \infty$ в силу компактности носителя f. Действительно, пусть $g(x_0) > 0$, тогда для любого $y_0 \in \operatorname{supp} f$ выполнено, что $g_{y_0 x_0^{-1}}(y_0) > 0$, и поэтому по непрерывности $g_{y_0 x_0^{-1}}$ и ограниченности f существует такое $t \geqslant 0$, что $f(y) < t g_{y_0 x_0^{-1}}(y)$ для всех y в некоторой окрестности y_0. Тогда можно выбрать из этих окрестностей конечное подпокрытие $\operatorname{supp} f$ и взять соответствующую ему линейную комбинацию.

Утверждение 8.2. Для любых функций f, f_1, f_2, g верно

- $(f : g) = (f_x : g)$ для любого $x \in G$;
- $(tf : g) = t(f : g)$ для любого $t \geqslant 0$;
- $(f_1 + f_2 : g) \leqslant (f_1 : g) + (f_2 : g)$.

Доказательство. Выполнено по определению. ■

Утверждение 8.3. Пусть $f, g, h \in C_c(G)$. Тогда

$$(f : h) \leqslant (f : g)(g : h).$$

Доказательство. Пусть $\{t_k\}$, $\{s_j\}$ — такие наборы, что для любого $y \in G$

$$f(y) \leqslant \sum_k t_k g_{x_k}(y), \quad g(y) \leqslant \sum_j s_j h_{w_j}(y).$$

Тогда

$$f(y) \leqslant \sum_k t_k \sum_j s_j h_{w_j}(x_k^{-1}y) = \sum_{k,j} t_k s_j h_{x_k w_j}(y),$$

то есть $(f : h) \leqslant (\sum t_k)(\sum s_j)$. Переходя к инфимуму в правой части, получаем требуемое неравенство. ■

Лемма 8.4. Пусть $f_0, f_1, f_2 \in C_c(G)$, $f_0, f_1, f_2 \geqslant 0$, $f_0 \not\equiv 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует E — окрестность e, такая что для любой функции $g \in C_c(G), g \geqslant 0, g \not\equiv 0$, удовлетворяющей условию $\operatorname{supp} g \subset E$, выполнено неравенство

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leqslant (f_1 + f_2 : g) + \varepsilon(f_0 : g).$$

Доказательство. По лемме Урысона[36] существует неотрицальная функция $h \in C_c(G)$, такая что

$$h(y) = \max_{w \in G}(f_1 + f_2)(w) \qquad \text{при} \;\; f_1(y) + f_2(y) \neq 0.$$

Действительно, $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$ — замкнутое подмножество компакта $\operatorname{supp} f_1 \cup \operatorname{supp} f_2$, то есть компакт; и у него есть окрестность U с компактным замыканием, так как группа G локально компактна[37]. Тогда лемму Урысона можно применить к замкнутым множествам $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$ и $G \setminus U$. Носитель функции, полученной в лемме Урысона, будет лежать в компакте $\overline{U}$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Рассмотрим теперь функцию $f := f_1 + f_2 + \delta h$. Нетрудно видеть, что она лежит в $C_c(G)$. найдём непрерывные функции h_1, h_2 с компактным носителем, такие что $0 \leqslant h_1, h_2, h_1 + h_2 \leqslant 1$, $h_1 f = f_1$ и $h_2 f = f_2$. Они существуют, так как $\operatorname{supp} f_{1,2} \subset \operatorname{Int}(\operatorname{supp} f)$, то есть можно определить по формуле $f_{1,2}/f$ при $f \neq 0$ и нулём в противном случае.

Пусть $g \in C_c(G)$, $g \geqslant 0$ и $g \not\equiv 0$; последовательности $\{t_k\}, \{x_k\}$ таковы, что

$$f(y) \leqslant \sum_k t_k g_{x_k}(y).$$

Тогда

$$f_{1,2}(y) = h_{1,2}(y) f(y) \leqslant \sum_k t_k h_{1,2}(y) g_{x_k}(y).$$

Выберем E — окрестность единицы e, так, чтобы выполнялось неравенство

$$|h_{1,2}(y) - h_{1,2}(x)| \leqslant \delta \qquad (\forall x, y : x^{-1} y \in E). \tag{8.1}$$

Покажем, что это возможно[38]. По непрерывности для каждой точки $x \in G$ можно найти E_x — окрестность e, такую что для любого $x' \in E_x$ условие (8.1) выполнено для $\frac{\delta}{2}$ и пары (x, xx'). Теперь пусть $\varphi : G \times G \to G$ — умножение в группе; по непрерывности можно найти F_x, такое что $F_x \times F_x \in \varphi^{-1}(E_x)$. Тогда из множества $\{xF_x\}_{x \in G}$ можно выделить $a_1 F_{a_1}, \ldots, a_m F_{a_m}$ — конечное подпокрытие $\operatorname{supp} h_{1,2}$. Тогда $E = F_{a_1} \cap \cdots \cap F_{a_m}$ действительно подходит.

Если $\operatorname{supp} g \subset E$, то

$$\sum_k t_k h_{1,2}(y) g_{x_k}(y) \leqslant \sum_k t_k (h_{1,2}(x_k) + \delta) g_{x_k}(y)$$

[36] Лемма Урысона утверждает, что в нормальном топологическом пространстве G для пары замкнутых множеств A и B можно построить такую функцию $h\colon G \to [0,1]$, что $h(x) = 0$ при всех $a \in A$ и $h(x) = 1$ при всех $b \in B$. Можно доказать, что любая топологическая группа нормальна.

[37] Надо выбрать окрестности из определения локальной компактности в конечном наборе точек и взять их объединение (замыкание объединения есть объединение замыканий, то есть компакт).

[38] По сути здесь утверждается равномерная непрерывность функций $h_{1,2}$ — они непрерывны и имеют компактный носитель. Однако наше пространство может быть не метризуемым, так что нужно доказывать отдельно (оно аналогично).

Значит, $(f_{1,2} : g) \leqslant \sum t_k(h_{1,2}(x_k) + \delta)$. Следовательно,

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leqslant \sum_k t_k(h_1(x_k) + h_2(x_k) + 2\delta) \leqslant (1 + 2\delta) \sum_k t_k.$$

Переходя к инфимуму в правой части, получаем, что

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leqslant (1 + 2\delta)(f : g).$$

По определению f и свойствам из утверждения 8.2

$$\begin{aligned}(1 + 2\delta)(f : g) &= (1 + 2\delta)(f_1 + f_2 + \delta h : g)\\ &= (f_1 + f_2 + \delta h : g) + 2\delta(f_1 + f_2 + \delta h : g)\\ &\leqslant (f_1 + f_2 : g) + \delta(h : g) + 2\delta(f_1 + f_2 + \delta h : g)\\ &\leqslant (f_1 + f_2 : g) + \big(2\delta(1 + \delta) + \delta\big)(h : g)\\ &\leqslant (f_1 + f_2 : g) + (2\delta^2 + 3\delta)(h : f_0)(f_0 : g).\end{aligned}$$

В четвёртой строке мы воспользовались тем, что $f_1 + f_2 \leqslant h$. Поскольку множитель $(2\delta^2 + 3\delta)(h : f_0)$ можно сделать сколько угодно малым за счёт выбора δ, это завершает доказательство. ■

Доказательство теоремы 8.1. Для любой функции $g \geqslant 0$, $g \in C_c(G)$, не равной нулю тождественно, определим функционал

$$I_g(f) = \frac{(f : g)}{(f_0 : g)},$$

где f_0 — некоторая фиксированная (на всё доказательство) функция, такая что $f_0 \not\equiv 0$, $f_0 \geqslant 0$, $f_0 \in C_c(G)$. Этот функционал обладает следующими свойствами:

(1) $I_g(tf) = tI_g(f)$;

(2) $I_g(f_1 + f_2) \leqslant I_g(f_1) + I_g(f_2)$;

(3) $I_g(f_1) + I_g(f_2) \leqslant I_g(f_1 + f_2) + \varepsilon$, если $\operatorname{supp} g \subset E(\varepsilon)$ — как в лемме 8.4;

(4) $I_g(f) \geqslant 0$.

Таким образом, функционал I_g «почти» линейный. Хотим в «перейти к пределу» по $\varepsilon \to 0$ в свойстве (3). Для окрестности единицы V рассмотрим множество

$$K_V = \operatorname{Cl}\left\{ \{I_g(f)\}_{f \in C_c(G)} \;\middle|\; \begin{matrix} \operatorname{supp} g \subset V \\ g \geqslant 0, g \not\equiv 0 \end{matrix} \right\},$$

где замыкание берётся в топологическом пространстве

$$\mathcal{T} = \prod_{\substack{f \in C_c(G) \\ f \geqslant 0}} \left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0) \right].$$

с топологией произведения. Это пространство — компакт по теореме Тихонова. Значит, K_V также компакт как замкнутое подмножество компакта. Отметим, что $\{I_g(f)\} \in \mathcal{T}$, так как

$$\frac{1}{(f_0 : f)} = \frac{(f : g)}{(f_0 : f)(f : g)} \leqslant \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} = I_g(f) = \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} \leqslant \frac{(f : f_0) \cdot (f_0 : g)}{(f_0 : g)} = (f : f_0).$$

Таким образом, $\{K_V\}$, где V пробегает по всем окрестностям единицы, — семейство компактов. Кроме того,

$$K_{V_1} \cap \cdots \cap K_{V_n} \supset K_{V_1 \cap \cdots \cap V_n} \neq \varnothing,$$

то есть это семейство обладает свойством конечного пересечения. Значит (по теории из общей топологии), $\bigcap K_V \neq \varnothing$, то есть это пересечение содержит некоторый элемент $\{I(f)\}_{f \in C_c(G)}^{f \geqslant 0}$. Рассмотрим функционал $I \colon f \mapsto I(f)$. Покажем, что

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2). \tag{8.2}$$

По определению топологии произведения[39] для любого $\varepsilon > 0$ и для любой окрестности единицы V найдется функция g такая, что $\operatorname{supp} g \subset V$ и

$$\begin{aligned} &|I(f_1 + f_2) - I_g(f_1 + f_2)| < \varepsilon, \\ &|I(f_{1,2}) - I_g(f_{1,2})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Для такой функции g

$$|I(f_1 + f_2) - I(f_1) - I(f_2)| \leqslant |I_g(f_1 + f_2) - I_g(f_1) - I_g(f_2)| + 3\varepsilon.$$

Выбирая окрестность V достаточно малой (то есть такой, что $V \subset E$ из леммы 8.4), получаем, что равенство (8.2) выполнено с погрешностью не более, чем 4ε. Так как ε любое, это равенство верно.

Аналогичным образом проверяется, что функционал $I(f)$ неотрицателен, однороден и инвариантен относительно сдвигов. Пусть $f^* \in C_c(G)$, $f \geqslant 0$, $x \in G$, тогда для любого $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in G$ найдётся элемент $\{I_g(f)\}_{f \in C_c(G)}$ для некоторой функции $g \in C_c(G)$ такой, что

$$\begin{aligned} &|I(f_x^*) - I_g(f_x^*)| < \varepsilon, \\ &|I(tf^*) - I_g(tf^*)| < \varepsilon, \\ &|I(f^*) - I_g(f^*)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

[39] Фактически, мы используем здесь следующее свойство: точка $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ лежит в замыкании множества $E \subset \prod_{\alpha \in A} [a_\alpha, b_\alpha]$ тогда и только тогда, когда для любого конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} \in E$ такой, что $|x_{\alpha_k} - y_{\alpha_k}| < \varepsilon$ для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. В нашем случае $\alpha_1 = f_1 + f_2$, $\alpha_2 = f_1$, $\alpha_3 = f_2$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
&|tI(f^*) - I(tf^*)| \leqslant |tI_g(f^*) - I_g(tf^*)| + (1 + |t|)\varepsilon = (1 + |t|)\varepsilon,\\
&|I(f^*_x) - I(f^*)| \leqslant |I_g(f^*_x) - I_g(f^*)| + 2\varepsilon = 2\varepsilon,\\
&I(f^*) \geqslant I_g(f^*) - \varepsilon \geqslant -\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Значит, мы также показали, что

$$I(tf^*) = tI(f^*), \quad I(f^*) \geqslant 0, \quad I(f^*_x) = I(f^*).$$

Таким образом I — неотрицательный линейный функционал на конусе неотрицательных непрерывных функций с компактным носителем. Тогда по теореме Рисса–Маркова–Какутани существует и единственна μ — регулярная борелевская мера, такая что

$$I(f) = \int\limits_G f\,\mathrm{d}\mu \qquad \forall f \in C_c(G).$$

Инвариантность слева следует из свойства $I(f_x) = I(f)$. Действительно, рассмотрим меру ν, такую что $\nu(E) = \mu(x^{-1}E)$. Тогда

$$\int\limits_G f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_G f_x\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_G f\,\mathrm{d}\nu,$$

откуда $\mu = \nu$ по единственности. ■

8.3 Единственность меры Хаара

Теорема 8.5 (о единственности меры Хаара). Пусть G — локально компактная топологическая группа, μ_1, μ_2 — меры Хаара на G. Тогда существует число $\lambda > 0$, такое что $\mu_1 = \lambda\mu_2$.

Доказательство (только коммутативный случай). Покажем, что существует неотрицательная функция $g \in C_c(G)$, такая что $\int_G g\,\mathrm{d}\mu_2 = 1$. Действительно, существует множество ненулевой меры, тогда по регулярности существует компакт K ненулевой меры. Тогда по лемме Урысона существует такая функция $h \in C_c(G)$, что для любого $x \in K$ выполнено $h(x) = 1$. Значит, $0 < \int_G h\,\mathrm{d}\mu_2 < \infty$, и можно взять $g = \frac{h}{\int_G h\,\mathrm{d}\mu_2}$.

Для любой функции $f \in C_c(G)$, $f \geqslant 0$, имеем

$$
\begin{aligned}
\int\limits_G f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) &= \int\limits_G f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \cdot \int\limits_G g(y)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\\
&= \int\limits_G g(y)\left(\int\limits_G f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y)\\
&= \int\limits_G g(y)\left(\int\limits_G f(xy)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y) \qquad (8.3)
\end{aligned}
$$

$$= \iint\limits_{G\times G} g(y)f(xy)\,\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)(x,y) \tag{8.4}$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G g(y)f(xy)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\right)\mathrm{d}\mu_1(x) \tag{8.5}$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G g(x^{-1}y)f(y)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\mu_1(x) \tag{8.6}$$

$$= \int\limits_G f(y)\left(\int\limits_G g(yx^{-1})\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y) \tag{8.7}$$

$$= \int\limits_G f(y)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\cdot\int\limits_G g(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

В равенствах (8.3) и (8.6) мы воспользовались инвариантностью мер μ_1 и μ_2 соответственно, в равенствах (8.3) и (8.7) — коммутативностью группы G ($x^{-1}y = yx^{-1}$ и $xy = yx$). Обозначим

$$\lambda = \int\limits_G g(x^{-1})\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Это не зависящее от f положительное число (так как μ_1 — ненулевая мера). Значит,

$$\int\limits_G f(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \lambda\int\limits_G f(y)\,\mathrm{d}\mu_2(y),$$

откуда $\mu_1 = \lambda\mu_2$ — можно в качестве f подставить характеристические функции борелевских множеств.

Осталось обосновать равенства (8.4) и (8.5). В них мы сводили повторный интеграл к двойному и наоборот, меняли порядок интегрирования. Хотелось бы применить теорему Тонелли, но она верна только для σ-конечных мер. Поймём, что на примере следующего равенства, что переходы были корректны:

$$\int\limits_G g(y)\left(\int\limits_G f(xy)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\right)\mathrm{d}\mu_2(y) = \iint\limits_{G\times G} g(y)f(xy)\,\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)(x,y).$$

Докажем, что мера $\mu_1\times\mu_2$ конечна на $\operatorname{supp}(g(y)f(xy))$ — тогда можно будет применить теорему Тонелли. По регулярности меры Хаара для этого достаточно показать, что $\operatorname{supp}(g(y)f(xy)) \subset K_1\times K_2$, где K_1, K_2 — компакты. Имеем цепочку включений

$$\{(x,y) : g(y)f(xy) > 0\} \subset \{(x,y) : y\in\operatorname{supp} g, xy\in\operatorname{supp} f\} \subset$$
$$\subset \{(x,y) : y\in\operatorname{supp} g, x\in\operatorname{supp} f\cdot(\operatorname{supp} g)^{-1}\}.$$

Значит, можно взять $K_1 = \operatorname{supp} f\cdot(\operatorname{supp} g)^{-1}$ и $K_2 = \operatorname{supp} g$. Здесь K_1 — это компакт, так как умножение непрерывно, и непрерывный образ компакта — компакт, а K_2 —

так как $g \in C_c(G)$. ■

8.4 Примеры мер Хаара

Пример 8.4. Если $G = \mathbb{R}^n$, то мера Лебега $\mu = \lambda_n$ — это мера Хаара. Для окружности $G = \mathbb{T}$ мерой Хаара будет $\mu = m$.

Пример 8.5. Рассмотрим множество $G = (0, +\infty)$ с операцией умножения и топологией подпространства $\mathbb{R}$. Можно проверить, что на ячейках мера Хаара G задаётся следующим образом:

$$\mu([a, b]) = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad 0 < a < b.$$

Проверим инвариантность относительно сдвигов:

$$\mu([a \cdot t_0, b \cdot t_0]) = \int\limits_{a \cdot t_0}^{b \cdot t_0} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log(bt_0) - \log(at_0) = \log \tfrac{b}{a} = \mu([a, b]).$$

Пример 8.6. Если $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ с операцией сложения и дискретной топологией, то $\mu(A) = \#A$.

Упражнение. Найдите меру Хаара группы

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Отождествите G с $\mathbb{T}$.

Пример 8.7. Рассмотрим множество изометрий

$$G = \left\{ T : X \xrightarrow{\text{биекция}} X \;\middle|\; \rho(Tx, Ty) = \rho(x, y) \right\},$$

где (X, ρ) — компактное метрическое пространство. Оно образует (неабелеву) группу вместе с операцией композиции $T_1T_2 = T_1 \circ T_2$; и является компактом в топологии, индуцированной из $C(X)$ по теореме Арцела–Асколи.[40] На G существует мера Хаара, то есть такая мера μ, что $\mu(T \circ E) = \mu(E)$ для любого борелевского E, однако неясно, как её явно выразить.

9 Преобразование Фурье на локально компактных абелевых группах

В этом параграфе по умолчанию G — это локально компактная абелева группа, μ — мера Хаара на G.

[40] Детали оставляются в качестве упражнения.

9.1 Основные определения и примеры

Соглашение. Групповую операцию в G будем обозначать знаком $+$, чтобы подчеркнуть коммутативность.

Определение. *Левым сдвигом* называется оператор $T_s : x \mapsto x - s$.

Определение. *Характером* группы G называется непрерывный гомоморфизм

$$\gamma : G \to \mathbb{T},$$

где $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — окружность со стандартной топологией и операцией умножения. Таким образом, гомоморфность означает, что $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

Пример 9.1. Тождественная единица $\gamma(x) \equiv 1$ — характер.

Определение. Через $\widehat{G}$ будем обозначать группу характеров G.[41]

Определение. Пусть f, g — измеримые относительно меры Хаара μ функции, такие что[42]

$$\int\limits_G |f(x - y)| \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) < \infty.$$

Тогда *свёртка* f и g определяется по формуле

$$(f * g)(x) := \int\limits_G f(x - y) g(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Определение. Пусть $f \in L^1(G, \mu)$. Тогда *преобразованием Фурье* f называется оператор $\mathcal{F} f$ на группе характеров $\widehat{G}$, задающийся по правилу

$$(\mathcal{F} f)(\gamma) := \int\limits_G f(x) \overline{\gamma(x)} \, \mathrm{d}\mu(x), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Пример 9.2. Пусть $G = (\mathbb{R}, +)$. Найдём $\widehat{G}$ и $\mathcal{F}$ для этой группы. Проверим, что любой характер $\gamma \in \widehat{G}$ непрерывно-дифференцируем. Пусть $\delta > 0$ удовлетворяет условию $\alpha := \int_0^\delta \gamma(x) \, \mathrm{d}x \neq 0$. Тогда

$$\gamma(y) = \alpha^{-1} \cdot \gamma(y) \int\limits_0^\delta \gamma(x) \, \mathrm{d}x = \alpha^{-1} \int\limits_0^\delta \gamma(x + y) \, \mathrm{d}x = \alpha^{-1} \int\limits_y^{\delta + y} \gamma(x) \, \mathrm{d}x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}).$$

Очевидно, что последнее выражение дифференцируемо по y, то есть $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T})$. Дифференцируя по x равенство $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$, получаем, что

$$\gamma'(x + y) = \gamma'(x)\gamma(y).$$

[41] Проверка того, что множество характеров действительно образует группу, оставляется в качестве упражнения.

[42] Это условие называется *условием существования свёртки $f * g$ в точке x*.

При $x = 0$ получаем равенство $\gamma'(y) = \gamma'(0)\gamma(y)$. Следовательно, $\gamma(y) = e^{\gamma'(0)y}$. Так как $|\gamma(y)| = 1$, то $\gamma'(0) = it$, где $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\gamma(t) = e^{ity}$. С другой стороны, e^{ity} — характер $\mathbb{R}$ для любого t. Значит,

$$\widehat{\mathbb{R}} = \{t \mapsto e^{ity} : y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Будем обозначать характер e^{ity} через γ_t. Тогда

$$(\mathcal{F}f)(\gamma_t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\gamma_t(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x,$$

то есть мы получили наше обычное преобразование Фурье (с точностью до нормировки, которая зашита в меру Хаара).

Упражнение. Докажите, что если $G = \mathbb{T}$, то

$$\widehat{G} = \{\gamma_n : z \mapsto z^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z},$$
$$(\mathcal{F}f)(\gamma_n) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\overline{z}^n\,\mathrm{d}m(z).$$

9.2 Свойства сдвига, свёртки и преобразования Фурье

Утверждение 9.1 (свойства сдвига).

(1) T_s — изометрия в $L^p(G)$ для любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$;

(2) T_s сходится к I в сильной операторной топологии в $L^p(G)$ при $1 \leqslant p < \infty$, то есть

$$\|T_s f - f\|_{L^p(\mu)} \xrightarrow{s\to 0} 0;$$

Доказательство.

(1) Действительно,

$$\int\limits_G |f(x-s)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_G |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x),$$

так как μ — мера Хаара.

(2) Покажем, что множество $C_c(G)$ плотно[43] в $L^p(\mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Действительно, можно приблизить характеристическую функцию измеримого множества характеристическими функциями открытого U и компактного K множеств: по лемме Урысона существует такая функция $\varphi \in C(G)$, что $\varphi \equiv 1$ на K и $\varphi \equiv 0$ на $G \setminus \overline{U}$. Значит,

$$\int\limits_G |\chi_E - \varphi|^p\,\mathrm{d}\mu \leqslant 2^p\mu(U \setminus K) < \varepsilon$$

[43] Ранее мы доказывали аналогичное утверждение для полных сепарабельных метрических пространств — см. теорему 8.7 из конспекта по теории меры.

в силу регулярности меры Хаара. Очевидно, что $\|T_s f - f\| \to 0$ для любой функции $f \in C_c(G)$, и по первому пункту $\sup_{s\in G} \|T_s\| = 1 < \infty$. Значит, $\|T_s f - f\| \to 0$ для всех $f \in L^p(G, \mu)$. ■

Утверждение 9.2 (свойства свёртки).

(1) если $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $f * g \in C(G)$;

(2) если $f, g \in L^1(G)$, то свёртка $(f * g)(x)$ определена при почти всех $x \in G$, измерима по Борелю, и $\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$;

(3) если $f, g \in L^1(G)$, то $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ для любого $x \in G$, такого что выполнено условие существования свёртки.

Доказательство.

(1) Будем считать, что $p < \infty$. По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}|(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| &\leqslant \int\limits_G |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)| \cdot |g(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \\ &\leqslant \|T_{-x_1} f - T_{-x_2} f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q} \\ &= \|T_{x_1 - x_2} f - f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.\end{aligned}$$

Первый множитель стремится к нулю при $x_1 - x_2 \to 0$ по свойству (2) сдвига.

(2) Доказываем только для σ-конечных мер. Заметим, что достаточно проверить утверждение для функций $f, g \colon G \to \mathbb{R}_+$. Общий случай получается из этого заменой f на $|f|$ и g на $|g|$.

Пусть $\Phi \colon (x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$. Проверим измеримость этой функции относительно $\mathcal{B}(G \times G)$. Для этого достаточно проверить измеримость функций[44] $\Phi_1 \colon (x, y) \mapsto f(x - y)$ и $\Phi_2 \colon (x, y) \mapsto g(y)$. Они измеримы, потому что

$$\begin{aligned}&\{(x, y) : \Phi_2(x, y) > a\} = G \times \{x : g(y) > a\} \in \mathcal{B}(G \times G), \\ &\{(x, y) : \Phi_1(x, y) > a\} = \Psi^{-1}(\{z : f(z) > a\}),\end{aligned}$$

где $\Psi(x, y) = x - y$ — непрерывная функция из $G \times G$ в G. Теперь по теореме Тонелли:

i. функция $f * g : x \mapsto \int_G f(x - y)g(y) \, \mathrm{d}\mu(y)$ измерима;
ii. $\int_G (f * g)(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_G \int_G f(x - y)g(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \cdot \int_G g(y) \, \mathrm{d}\mu(y)$.

Таким образом, мы получили вторую и третью части утверждения. Первая часть следует из того, что так как $\|f * g\|_{L^1} < \infty$, то $f * g$ принимает бесконечное значение на множестве меры 0.

[44] Произведение измеримых функций измеримо.

(3) По определению и свойствам меры Хаара:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int\limits_G f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int\limits_G f(-(-x+y))g(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int\limits_G f(-y)g(x+y)\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int\limits_G f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = (g*f)(x). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Объясним первое равенство в (9.1). Достаточно проверить, что $\mu(U) = \mu(-U)$ для любого $U \in \mathcal{B}(G)$. Нетрудно проверить, что $\nu(U) = \mu(-U)$ — тоже мера Хаара, и по теореме единственности $\mu(U) = c\nu(U)$ для некоторой константы c. Найдём такой компакт[45] K, что $0 < \mu(K) < \infty$. Рассмотрим компакт $\widetilde{K} := K \cup (-K)$. Ясно, что $\widetilde{K} = -\widetilde{K}$. Значит, $\mu(\widetilde{K}) = \mu(-\widetilde{K}) = \nu(\widetilde{K})$, откуда $c = 1$, что и требовалось. ■

Утверждение 9.3 (свойства преобразования Фурье).

(1) $\mathcal{F}(f * g) = c \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$, где c — некоторая не зависящая от f и g константа;

(2) $\mathcal{F}\big(f(T_s(\square))\big)(\gamma) = \overline{\gamma(s)} \cdot (\mathcal{F} f)(\gamma)$.

Доказательство.

(1) Заметим, что $\overline{\gamma(x)} = \overline{\gamma(x-y)} \cdot \overline{\gamma(y)}$, так как $|\gamma(z)| = 1$ для всех z и γ — гомоморфизм. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\gamma) &= \int\limits_G \int\limits_G f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y) \cdot \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int\limits_G \int\limits_G f(x-y)\overline{\gamma(x-y)} \cdot g(y)\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int\limits_G \left(\int\limits_G g(y)\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}\mu(y)\right) f(x-y)\overline{\gamma(x-y)}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= (\mathcal{F}g)(\mathcal{F}f)(\gamma).\end{aligned}$$

Менять порядок интегрирования можно по свойству (2) свёртки и теореме Тонелли.

[45]Мы уже проверяли, что такой компакт существует — если мера любого компакта равна нулю, то по регулярности эта мера нулевая.

(2) По инвариантности меры Хаара и гомоморфности γ:

$$\mathcal{F}\big(f(T_s)(\square)\big)(\gamma) = \int\limits_G f(x-s)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int\limits_G f(x)\overline{\gamma(x+s)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \overline{\gamma(s)}\cdot(\mathcal{F}f)(\gamma). \qquad \blacksquare$$

9.3 Одна полезная лемма

Следующая лемма пригодится нам в доказательстве теоремы Петера–Вейля.

Лемма 9.4. Пусть группа G компактна[46], $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(G)$. Тогда

$$M(f) = \inf\left\{\|f - f * \psi_U\|_{L^p(G)} \;\middle|\; \psi_U = \frac{\chi_U}{\mu(U)},\ 0 \in U,\ U = -U\right\} = 0.$$

Доказательство. Для любой функции g верно, что

$$M(f) = M(f-g) + M(g) \leqslant 2\|f-g\|_{L^p} + M(g),$$

где последний переход следует из того, что $\|\psi_U\|_{L^1} = 1$ и неравенства[47]

$$\|h_1 * h_2\|_{L^p} \leqslant \|h_1\|_{L^p}\cdot\|h_2\|_{L^1}.$$

Найдём такую функцию $g \in C_c(G)$, что $\|f-g\|_{L^p} < \delta$. Так как $\|\psi_U\|_{L^1} = 1$, то

$$(g - g*\psi_U)(x) = \int\limits_G (g(x) - g(x-y))\psi_U(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Теперь найдём такую окрестность[48] U, что $|g(x) - g(x-y)| < \varepsilon$ для любого $y \in U$. Значит,

$$\|g - g*\psi_U\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon\int\limits_G |\varphi_U(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \varepsilon,$$

и по компактности G

$$\|g - g*\psi_U\|_{L^p} \leqslant \varepsilon\cdot(\mu(G))^{1/p} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Таким образом, $M(g) = 0$. Значит, $M(f) \leqslant 2\delta$, и устремляя δ к нулю мы получаем требуемое равенство. $\blacksquare$

[46] Это верно для любой группы, но мы будем использовать лемму только в компактном случае.

[47] Формально мы знаем это неравенство только в случае $G = \mathbb{R}^n$ (утверждение 7.3), однако в доказательстве мы пользовались только неравенством $\|f*g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}$, которое мы уже проверили и для свёртки в произвольной группе.

[48] Как обычно, это можно сделать в силу равномерной непрерывности g.

10 Теорема Петера–Вейля

10.1 Формулировка

Замечание. На самом деле, мы докажем лёгкую версию теоремы Петера–Вейля, и только в коммутативном случае.

Теорема 10.1 (Петер, Вейль). Пусть G — компактная абелева группа, μ — мера Хаара на G, $\mu(G) = 1$, $\widehat{G}$ — группа характеров. Тогда $\{\gamma\}_{\gamma\in\widehat{G}}$ — ортонормированный базис в пространстве $L^2(G)$.

10.2 Вспомогательные леммы

Лемма 10.2. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство унитарных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что $U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha$ для любых $\alpha, \beta \in A$. Тогда в $\mathcal{H}$ существует ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$, такой что $U_\alpha\varphi_k = \lambda_{\alpha,k}\varphi_k$, где $\lambda_{\alpha,k}$ — некоторые числа. (Другими словами, в $\mathcal{H}$ можно выбрать ортонормированный базис из собственных векторов U_α).

Доказательство. Доказываем индукцией размерности $\mathcal{H}$. Если $\dim\mathcal{H} = 1$, то утверждение очевидно. Если $U_\alpha = \theta_\alpha I$ для любого α, где $\theta_\alpha \in \mathbb{C}$, — то можно выбрать произвольный базис. Иначе существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$ и индекс $\alpha_0 \in A$, что

$$E_\lambda = \{\varphi \in H : U_{\alpha_0}\varphi = \lambda\varphi\} \neq \mathcal{H}, \quad E_\lambda \neq \varnothing.$$

Пусть $\varphi \in E_\lambda$. Для любого $\beta \in A$ выполнено

$$U_{\alpha_0}U_\beta\varphi = U_\beta U_{\alpha_0}\varphi = \lambda U_\beta\varphi,$$

то есть $U_\beta\varphi \in E_\lambda$. Значит, $U_\beta E_\lambda \subset E_\lambda$. При этом $\dim\mathcal{H} < \infty$ и оператор U_β обратим, то есть $U_\beta E_\lambda = E_\lambda$. По унитарности также верно $U_\beta E_\lambda^\perp = E_\lambda^\perp$. Значит, можно применить предположение индукции отдельно для E_λ и $E_\lambda^\perp$. ∎

Лемма 10.3. Пусть $G, \widehat{G}$ — как в теореме Петера–Вейля, $\varphi \in L^2(G)$, $\|\varphi\|_{L^2} = 1$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) $T_s\varphi = \lambda_s\varphi$ в $L^2(G)$ для всех $s \in G$;

(2) $\varphi = c\gamma$ в $L^2(G)$ для некоторых $c \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \widehat{G}$.

Доказательство. (2) $\Longrightarrow$ (1). Имеем:

$$(T_s\gamma)(x) = \gamma(x - s) = \gamma(-s)\gamma(x).$$

Значит, можно взять $\lambda_s = \gamma(-s)$.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Мы знаем, что равенство из условия выполнено во всех точках некоторого множества полной меры E_s:

$$\lambda_s\varphi(x)\chi_{E_s}(x) = \varphi(x - s) \qquad (\forall s \in G, x \in E_s),$$

где $\mu(E_s) = 1$. Домножим обе части на $\overline{\varphi(x)}$ и проинтегрируем по G:

$$\lambda_s = \lambda_s \int\limits_G |\varphi(x)|^2 \chi_{E_s}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_G \varphi(x-s)\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) = (\varphi * \overline{\varphi})(s).$$

Самое левое равенство выполнено, так как $\|f\|_{L^2} = 1$ по условию, а множество E_s полной меры. Поскольку $\varphi, \overline{\varphi} \in L^2(G)$, по свойству (1) свёртки функция $s \mapsto \lambda_s$ лежит в $C(G)$. Заметим, что

$$\lambda_{s_1+s_2}\varphi = T_{s_1+s_2}\varphi = T_{s_1}T_{s_2}\varphi = \lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\varphi,$$

то есть λ_s — гомоморфизм. Наконец, $|\lambda_s| = 1$, так как

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|T_s\varphi\|_{L^2} = |\lambda_s| \cdot \|\varphi\|_{L^2}.$$

Таким образом, λ_s — это характер.

Осталось показать, что функция $h(x) = \lambda_x\varphi(x)$ постоянна почти всюду на G. Тогда мы получим, что $\varphi = c \cdot \overline{\lambda}$, что и требуется. Имеем (в L^2):

$$T_s h = h(x-s) = \lambda_{x-s}\varphi(x-s) = \lambda_{x-s}\lambda_s\varphi(x) = \lambda_x\varphi(x) = h.$$

Рассмотрим функцию $\psi = \frac{\chi_U}{\mu(U)}$ для такой окрестности единицы U, что $U = -U$. Тогда

$$\int\limits_G h(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int\limits_G h(x+y)\psi(-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int\limits_G h(y)\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

В последнем равенстве мы воспользовались симметричностью ψ и тем, что $T_s h = h$. Значит, значение $\int_G h(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = c$ не зависит от x. Чтобы убедиться, что c не зависит от ψ, проинтегрируем по мере μ:

$$c = \iint\limits_{G\times G} h(x-y)\psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_G h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \cdot \int\limits_G \psi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int\limits_G h(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Таким образом, $h * \psi = c$ почти всюду. По лемме 9.4 мы знаем, что

$$M(h) = \inf\left\{\|h - h*\psi\|_{L^1} \;\middle|\; \psi = \frac{\chi_U}{\mu(U)},\ 0 \in U,\ U = -U\right\} = 0.$$

Значит, $\|h - c\|_{L^1} = 0$, то есть $h \equiv c$ почти всюду. ■

Лемма 10.4. Пусть $\psi = \frac{\chi_U}{\mu(U)}$, где $U = -U$ — окрестность нуля. Тогда

$$A_\psi \colon f \mapsto \int\limits_G f(y)\psi(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

— компактный самосопряжённый оператор на $L^2(G)$.

Доказательство. По определению скалярного произведения в $L^2(G)$ выполнено $A^*_\psi = A_{\overline{\psi}}$. Так как в нашем случае $\psi = \overline{\psi}$, то $A_\psi = A^*_\psi$, и оператор самосопряжён.

Для компактности нужно проверить, что если $h_n \to 0$ слабо в $L^2(G)$, то $A_\psi h_n \to 0$ сильно в $L^2(G)$. Из слабой сходимости h_n следует, что

$$p_n(x) = \int\limits_G h_n(y)\psi(y-x)\,\mathrm{d}\mu(y) = (h_n, T_x\psi) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad (\forall x \in G).$$

Рассмотрим функционалы $H_n\colon \varphi \mapsto (\varphi, h_n)$. Из слабой сходимости $h_n \to 0$ следует поточечная сходимость $H_n \to 0$. По теореме Банаха–Штейнгауза $\|H_n\| \leqslant c$. Значит, $\|h_n\|_{L^2} \leqslant c$ для всех n, откуда $|p_n(x)| \leqslant \|h_n\|_{L^2} \cdot \|\psi\|_{L^2} \leqslant \widetilde{c}$ и $p_n \to 0$ в L^2 по теореме Лебега об L^2-мажорированной сходимости. ∎

Лемма 10.5 (спектральная теорема для компактных операторов). Любой компактный самосопряжённый оператор A_ψ можно представить в виде

$$A_\psi = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k, \quad 1 \leqslant N \leqslant \infty,$$

где $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots, \lambda_n \to 0$, а P_n — проектор на подпространство

$$E_n = \{\varphi \in L^2(G) : A_\psi\varphi = \lambda_n\varphi\}$$

для каждого n, причём $\dim E_n < \infty$ при $n < N$ и $E_{n_1} \perp E_{n_2}$ для любых $n_1 \neq n_2$.

Доказательство. См. конспект по функциональному анализу за 5-й семестр. ∎

Лемма 10.6. Для любого k в обозначениях предыдущего следствия выполнено

$$T_s E_k = E_k.$$

Доказательство. Проверим, что $T_s A_\psi = A_\psi T_s$. Пусть $f \in L^2(G)$, тогда

$$(T_s A_\psi f)(y) = \int\limits_G f(x)\psi(y-x-s)\,\mathrm{d}\mu(x),$$
$$(A_\psi T_s f)(y) = \int\limits_G f(x-s)\psi(y-x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Правые части этих двух равенств совпадают по инвариантности μ относительно сдвига. Теперь рассмотрим функцию $\varphi \in E_k$. Имеем:

$$A_\psi(T_s\varphi) = T_s(A_\psi\varphi) = \lambda_k(T_s\varphi),$$

откуда $T_s E_k \subset E_k$. Однако $T_s|_{E_k}$ — инъективный оператор, и $\dim E_k < \infty$, откуда $T_s E_k = E_k$. ∎

10.3 Доказательство теоремы Петера–Вейля

Доказательство теоремы Петера–Вейля. Возьмём функцию $f \in L^2(G)$ и проверим, что $f \in \mathrm{Cl}_{L^2(G)}(\mathrm{span}\,\widehat{G})$, то есть что $L^2(G) = \mathrm{Cl}_{L^2(G)}(\mathrm{span}\,\widehat{G})$. Для этого рассмотрим функцию $\psi = \frac{\chi_U}{\mu(U)}$, где $U = -U$ — окрестность нуля. Мы выяснили, что $A_\psi f = \sum_{k=1}^N \lambda_k P_k f$. При этом

$$\sum_{k=m}^{N} \|\lambda_k P_k f\|^2 = \sum_{k=m}^{N} |\lambda_k|^2 \|P_k f\|^2 \leqslant |\lambda_m|^2 \sum_{k=m}^{N} \|P_k f\|^2 \leqslant |\lambda_m|^2 \cdot \|f\|_{L^2(G)} \xrightarrow[m\to N]{} 0,$$

где последнее неравенство выполнено, так как $E_{n_1} \perp E_{n_2}$. Таким образом, достаточно показать, что $P_k f \in \mathrm{span}(\widehat{G})$, так как в этом случае для любой ψ

$$A_\psi f = \lim_{m\to N} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k(f) \in \mathrm{Cl}_{L^2}(\mathrm{span}\,\widehat{G}).$$

Тогда и $f \in \mathrm{Cl}_{L^2(G)}(\mathrm{span}\,\widehat{G})$, поскольку $\inf \|f - f * \psi\|_{L^2(G)} = 0$.

Проверим, что $P_k f \in \mathrm{span}\,\widehat{G}$ для любых $f \in L^2(G)$ и $k < N$ (случай $k = N$ разберём позже). Так как $\dim E_k < \infty$, $\{T_s|_{E_k}\}_{s\in G}$ — коммутирующие унитарные операторы на E_k, то по лемме 10.2 существует ортонормированный базис $\{\gamma_{k,1}, \gamma_{k,2}, \ldots, \gamma_{k,n(k)}\}$ в E_k:

$$T_s \gamma_{kj} = \lambda_s \gamma_{kj} \qquad (\forall s \in G).$$

По лемме 10.3 получаем, что γ_{kj} пропорционально некоторому характеру (с точностью до меры ноль) для всех k, j. Значит,

$$P_k f = \sum_{j=1}^{n(k)} (P_k f, \gamma_{k_j}) \gamma_{k_j} \in \mathrm{span}\,\widehat{G}.$$

Если $K = N$ (и N конечно), то $\lambda_N = 0$, $P_N f \in E_N$ и $A_\psi(P_N f) = 0 \in \mathrm{Cl}\,\mathrm{span}\,\widehat{G}$, что и требовалось.

Наконец, проверим ортонормированность. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$. Если $\gamma_1 = \gamma_2$, то

$$\int\limits_G \gamma_1(x)\overline{\gamma_2(x)}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_G |\gamma_1(x)|^2\,\mathrm{d}\mu = \mu(G) = 1.$$

Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то существует такое $s \in G$, что $\gamma_1(s) \neq \gamma_2(s)$. Тогда

$$\int\limits_G \gamma_1(x)\overline{\gamma_2(x)}\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_G \gamma_1(x-s)\overline{\gamma_2(x-s)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \overline{\gamma_1(s)}\gamma_2(s) \cdot \int\limits_G \gamma_1(x)\overline{\gamma_2(x)}\,\mathrm{d}\mu.$$

Следовательно, $(\gamma_1, \gamma_2) = 0$, что и требовалось. ∎

10.4 Следствия из теоремы Петера–Вейля

Следствие 10.7. Если $L^2(G)$ сепарабельно, то $\widehat{G}$ не более чем счётно.

Доказательство. Семейство $\{\gamma\}_{\gamma\in G}$ — ортонормированный базис в $L^2(G)$. Предположим, что оно более чем счётно. Так как

$$\|\gamma_1-\gamma_2\|_{L^2}=\sqrt{(\gamma_1-\gamma_2,\gamma_1-\gamma_2)}=\sqrt{2},$$

то шары из семейства $\{B(\gamma,\frac{\sqrt{2}}{2})\}_{\gamma\in\widehat{G}}$ попарно не пересекаются, что противоречит сепарабельности $L^2(G)$. ■

Следствие 10.8. Если G имеет счётную базу в нуле, то $L^2(G)$ сепарабельно и $\widehat{G}$ не более чем счётно.

Доказательство. По предыдущему следствию достаточно показать сепарабельность. Действительно, $C(G)$ плотно в $L^2(G)$, а потому достаточно приблизить любую функцию из $C(G)$ функцией из некоторого счётного подмножества $L^2(G)$. Так как у G есть счётная база в нуле $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$, то $G=\bigsqcup_{j=1}^{k(n)}F_{n,j}$, где $F_{n,j}\subset U_n+x$ для некоторого $x\in G$:

$$\begin{aligned}
F_{n,1}&=U_n,\\
F_{n,2}&=(U_n+x_2)\setminus F_{n,1},\\
F_{n,3}&=(U_n+x_3)\setminus(F_{n,1}\cup F_{n,2}),
\end{aligned}$$

и так далее.

Если $f\in C(G)$, то для функции $h=\sum_{j=1}^{k(n)}f(y_i)\chi_{F_{n,j}}$ выполнено неравенство

$$(f-h)(x)\leqslant\sup_{y\in F_{n,j}}|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

по равномерной непрерывности f. Значит, $\|f-h\|_{L^2(G)}<\varepsilon$. Тогда $\{F_{n,j}\}_{n,j}$ — счётный набор, и это неравенство влечёт плотность счётного семейства

$$\left\{\sum_{n,j}c_j\chi_{F_{n,j}},c_j\in\mathbb{Q}\cup i\mathbb{Q}\right\}.$$ ■

Задача 10.1. Пусть G — компактная абелева группа со счётной базой в нуле. Докажите, что для любых $x_1,x_2\in G$ существует такой характер $\gamma\in\widehat{G}$, что $\gamma(x_1)\neq\gamma(x_2)$.