Математическая физика, практические занятия

Р. В. Бессонов

Содержание

1. Занятие 1. Градиент, ротор и дивергенция

1.1. **Бескоординатное определение и физический смысл градиента.** Градиентом гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $w \in \mathbb{R}^n$ называется вектор $grad\, f(w) \in \mathbb{R}^n$ со свойством

$$f(w+h) = f(w) + (h, grad\, f(w))_{\mathbb{R}^n} + o(h), \qquad h \to 0.$$

Из определения следует, что

$$f(w + \varepsilon\, grad\, f(w)) \geqslant f(w + \varepsilon h) \tag{1}$$

для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ со свойством $\|h\| = \|\, grad\, f(w)\|$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Физический смысл неравенства выше означает, что физическая характеристива, описываемая фунцией f, растет быстрее всего в направлении вектора $grad\, f$. В качестве f можно представлять себе температуру в точке пространства ($n = 3$) или высоту над уровнем моря ($n = 2$).

Упражнение 1. *Докажите неравенство* (8).

Упражнение 2. *Докажите, что если в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *выбрана декартова система координат и* f_{x_i} *обозначают производные по направлениям, отвечающим ее базисным векторам, то*

$$grad\, f(w) = \begin{pmatrix} f'_{x_1}(w) \\ \dots \\ f'_{x_n}(w) \end{pmatrix}.$$

1.2. **Бескоординатное определение и физический смысл дивергенции.** Дивергенцией гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в точке $w_0 \in \mathbb{R}^n$ называется предел

$$div\, f(w_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon(w_0)|} \int_{S_\varepsilon(w_0)} (f, n)\, dS$$

где $B_\varepsilon(w_0) = \{w : \|w - w_0\| \leqslant \varepsilon\}$, $S_\varepsilon(w_0) = \{w : \|w - w_0\| = \varepsilon\}$, n – внешняя единичная нормаль к $S_\varepsilon(w_0)$. Интеграл

$$\int_{S_\varepsilon(w_0)} (f, n)\, dS$$

для поля скоростей f течения жидкости отвечает объему жидкости, протекающему через $S_\varepsilon(w_0)$. Таким образом, $div\, f(w_0)$ – это показатель того, насколько мощным источником или стоком является точка w_0.

Упражнение 3. *Докажите, что* $\int_{S_\varepsilon(0)} x_i x_j dS = 0$ *при* $i \neq j$. *Здесь* x_i – i*-я координата точки* x *в стандартном базисе* $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 4. *Прибавляя и вычитая* $f(w_0)$ *под знаком интеграла в определении дивергенции, докажите, что* $div\, f(w_0) = \sum(\partial f_i/\partial x_i)(w_0)$, *если* f_i – *координатные функции поля* f *в декартовой системе координат.*

1.3. **Бескоординатное определение и физический смысл ротора.** Ротором гладкого отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в точке $w_0 \in \mathbb{R}^3$ называется такой вектор $rot\, f(w_0)$ (существование не очевидно из определения!), что для любого единичного вектора $n \in \mathbb{R}^3$

$$(rot\, f(w_0), n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|D_\varepsilon(w_0)|} \int_{C_\varepsilon(w_0)} (f, \tau)\, ds,$$

где $D_\varepsilon(w_0)$ – круг радиуса ε с центром в точке w, ортогональный вектору n, $C_\varepsilon(w_0)$ – его граница, τ – единичный касательный вектор в направлении положительного относительно n обхода $C_\varepsilon(w_0)$. Физический смысл интеграла

$$\int_{C_\varepsilon(w_0)} (f, \tau)\, ds$$

для силового поля f состоит в том, что он отвечает количеству работы, необходимой для обхода вокруг точки w_0 вдоль $C_\varepsilon(w_0)$. Если w_0 – центр вихря, то эта работа будет большей или меньшей в зависимости от его мощности.

Упражнение 5. *Выведите формулу для ротора в декартовых коориминатах. Это можно сделать по меньшей мере двумя способами. Элементарный способ состоит в использовании формулы Тейлора и явном вычислении. Более короткий - с помощью формулы Стокса. Ответ можно сверить с конспектом по математическому анализу.*

1.4. **Бескоординатное определение и физический смысл гармонических функций.** Назовем функцию $f \in C(\Omega \to \mathbb{R})$ гармонической, если

$$f(w_0) = \frac{1}{|S_r(w_0)|} \int_{S_r(w_0)} f dS$$

для любой точки $w_0 \in \Omega$ и любой сферы $S_r(w_0) \subset \Omega$. Рассматривая в качестве f распределение температуры/давления в области Ω, видим, что она гармонична (при условии, что это распределение стационарно, т.е. f не меняется со временем и зависит лишь от точки). Действительно, физическая интуиция говорит нам, что если бы $f(w_0)$ была бы больше или меньше своего среднего

$$\frac{1}{|S_r(w_0)|} \int_{S_r(w_0)} f dS$$

то тогда с течением времени $f(w_0)$ должна была бы поменяться (“соседние точки нагрели или охладили бы точку w_0”).

Упражнение 6. *Докажите, что* $f \in C^\infty(\Omega \to \mathbb{R})$ *для любой гармонической функции* f.

Упражнение 7. *Докажите, что если функция $f \in C^2(\Omega \to \mathbb{R})$, то существует предел*
$$(\Delta f)(w_0) = \lim_{r\to 0} \frac{2}{r^2|S_r(w_0)|} \int_{S_r(w_0)} (f - f_r(w_0))\, dS = f''_{x_1x_1}(w_0) + \ldots + f''_{x_nx_n}(w_0).$$
В частности, $\Delta f = 0$ всюду в Ω для любой гармонической функии f.

Верное и обратное: условие $\Delta f = 0$ всюду в Ω влечет гармоничность $f \in C^2(\Omega \to \mathbb{R})$.

1.5. **Алгебраические и дифференциальные формы.** Алгебраической формой в $\mathbb{R}^n$ порядка 1 называется линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Пример 1. *Скалярное произведение $p \mapsto (p, v)_{\mathbb{R}^n}$ с фиксированным вектором $v \in \mathbb{R}^n$ – форма порядка 1 в $\mathbb{R}^n$. Мы будем обозначать эту форму через ω_v.*

Упражнение 8. *Пример 1 описывает все возможные алгебраические формы первого порядка в $\mathbb{R}^n$.*

Пример 2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ зафиксирован некоторый базис $v_1, \ldots, v_n$. Тогда отображение, сопоставляющее $p \in \mathbb{R}^n$ его координату c_i в разложении*
$$p = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$$
является формой пордка 1.

Форма из примера 2 называется i-й координатной формой и обозначается ω_{v_i}. Это форма порядка 1. Она зависит от выбора базиса $v_1, \ldots, v_n$.

Упражнение 9. *Как найти вектор $v \in \mathbb{R}^n$ из Примера 1, определяющий форму ω_{v_i} из примера 2, если базис v_1, ... v_n – ортогонален?*

Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирован некоторый ортогональный базис $v_1, \ldots, v_n$ и назван стандартным, то его координатные формы ω_{v_i} мы будем обозначать dx_i (или dx, dy, dz, ...).

Дифференциальной формой порядка 1 в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется отображение, каждой точке $w \in \Omega$ сопоставляющее алгебраическую форму порядка 1.

Пример 3. *Если в пространстве $\mathbb{R}^2$ зафиксирован стандартный базис, форма $xdy - y^2dx$ в точке $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ равна $2\,dy - 9dx = 2\pi_2 - 9\pi_1$. На векторе $p = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ она принимает значение $2 \cdot 0 - 9 \cdot (-1) = 9$.*

Упражнение 10. *Считая, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ зафиксирован стандартный базис, найдите значение формы $x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$ в точке $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ на векторе $p = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

Внешей алгебраической формой в $\mathbb{R}^n$ порядка $k \geqslant 1$ называется отображение из $(\mathbb{R}^n)^k$ в $\mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, меняющее знак при перестановке соседних аргументов.

Пример 4. *Отождествим вектора $\mathbb{R}^n$ с их записью в стандартном базисе, а множество $(\mathbb{R}^n)^n$ — с множеством матриц размера $n \times n$. Тогда определитель — алгебраическая форма порядка n в $\mathbb{R}^n$. Матричные миноры порядка k – алгебраические формы порядка k в $\mathbb{R}^n$.*

Этот пример можно развить.

Пример 5. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ зафиксирован некоторый базис $v_1, \ldots, v_n$. Вспомним, что отображение, сопоставляющее $p \in \mathbb{R}^n$ его координату c_i в разложении*
$$p = c_1v_1 + \ldots + c_nv_n$$

называется i-й координатной формой и обозначается ω_{v_i}. Внешним произведением 1-форм $\omega_{v_{i_1}}, \ldots, \omega_{v_{i_k}}$ называется форма порядка k, задаваемая формулой

$$\omega_{v_{i_1}} \wedge \omega_{v_{i_2}} \wedge \ldots \wedge \omega_{v_{i_k}} : (p_1, p_2, \ldots, p_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} c_{1i_1} & c_{1i_2} & \ldots & c_{1i_k} \\ c_{2i_1} & c_{2i_2} & \ldots & c_{2i_k} \\ c_{ki_1} & c_{ki_2} & \ldots & c_{ki_k} \end{pmatrix},$$

где $p_s = c_{s1}v_1 + \ldots + c_{sn}v_n$. Такие формы будем называть простыми. При выборе различных базисов различные формы оказываются простыми.

Любая внешняя форма в $\mathbb{R}^n$ порядка k может быть записана в виде линейной комбинации простых форм.

Дифференциальной формой порядка $k \geqslant 1$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется отображение, каждой точке $w \in \Omega$ сопоставляющее алегбраическую форму порядка k в $\mathbb{R}^n$. Функции, действующие из Ω в $\mathbb{R}$ удобно считать дифференциальными формами порядка 0.

Пример 6. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ зафиксирован стандартный базис. Дифференциальная форма $x_1^2 x_2 dx_2 \wedge dx_3$ в точке $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ на паре векторов $p_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ равна*

$$12[dx_2 \wedge dx_3](p_1, p_2) = 12 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 48.$$

Упражнение 11. *Пусть ω_2, ω_3 – базисные дифференциальные формы цилиндрической системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Вычислите значение дифференциальной формы $x_1^2 x_2 \omega_2 \wedge \omega_3$ в точке $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ на паре векторов $p_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.*

Упражнение 12. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ выбран стандартный базис и $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что дифференциал df есть дифференциальная 1-форма и ее разложение на базисные форрмы dx_i имеет вид*

$$df = f'_{x_1}\, dx_1 + \ldots + f'_{x_n}\, dx_n.$$

В обозначениях предыдущего упражнения, внешний дифференциал формы

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

определяется следующим образом:

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

По линейности можно распространить внешний дифференциал на все гладкие формы. Позднее мы научимся вычислять внешний дифференциал в других базисах. Другой подход состоит в том, чтобы определить внешний дифференциал аксиоматически. Тогда определение будет бескоординатным, но будет больше похоже на теорему существования, чем на рецепт вычисления.

Упражнение 13. *Докажите, что для любой C^2-гладкой формы ω имеет место равенство $d^2\omega = 0$.*

На формах $0 \leqslant k \leqslant n$ в $\mathbb{R}^n$ определена операция дополнения (так называемая "звездочка Ходжа"). Нам понадобится только случай $n = 3$.

Упражнение 14. *Обобщите факты, излагаемые ниже в этом пункте на случай $n \neq 3$. Проверьте себя по книге J. Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis (2002), глава 2.1.*

Пусть ω_1, ω_2, ω_3 – базисные дифференциальные формы некоторой ортогональной системы координат с базисными векторами v_1, v_2, v_3 (зависящими от точки и образующими положительный базис). Определим нормированные базисные дифференциальные формы

$$\hat{\omega}_1 = \|v_1\|\omega_1, \qquad \hat{\omega}_2 = \|v_2\|\omega_2, \quad \hat{\omega}_3 = \|v_3\|\omega_3.$$

Для любого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ значение $\hat{\omega}_i(p)$ совпадает с i-м коэффициентом при разложении $p = c_{1w}\hat{v}_1 + c_{2w}\hat{v}_2 + c_{3w}\hat{v}_3$ в ортонормированном базисе $\hat{v}_i = v_i/\|v_i\|$. Звездочка Ходжа задается на простых формах следующим образом:

$$\star\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 \wedge \hat{\omega}_3, \quad \star\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_3 \wedge \hat{\omega}_1, \quad \star\hat{\omega}_3 = \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2, \quad \star 1 = \hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2 \wedge \hat{\omega}_3, \quad \star\star\hat{\omega} = \hat{\omega},$$

и распространяется на произвольные формы по линейности. Замечательным свойством звездочки Ходжа является то, что ее действие не зависит от выбора базисных форм $\hat{\omega}_i$.

Пример 7. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ зафиксирован стандартный базис. Тогда*

$$\star(x^2 dx \wedge dy + y dx \wedge dz) = x^2 dz - y dy.$$

Упражнение 15. *Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ – ненулевые неколлинеарные вектора. Докажите, что $\star(\omega_{v_1} \wedge \omega_{v_2}) = (\cdot, v_1 \times v_2)$, где $\times$ обозначает векторное произведение.*

Упражнение 16. *Пусть $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ – гладкая функция. Докажите, что*

$$d(g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz) = (rot\, g)_1 dy \wedge dz + (rot\, g)_2 dz \wedge dx + (rot\, g)_3 dx \wedge dy, \qquad (2)$$

где $(rot\, g)_i$ – координатные функции ротора отображения $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в декартовой системе координат.

Упражнение 17. *В условиях предыдущего упраженения,*

$$\star d(g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz) = (rot\, g)_1 dx + (rot\, g)_2 dy + (rot\, g)_3 dz. \qquad (3)$$

1.6. **Операции бемоль и диез (b и $\#$).** Эти операции очень просты. Для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ мы определяем

$$v^b = \omega_v$$

и

$$(\omega_v)_\# = v.$$

Так как по теореме Рисса (было что-то такое в курсе функционального анализа...) любая 1-форма имеет вид ω_v для некоторого v, это определяет $(\omega)_\#$ для любой 1-формы. Определение очевидным образом распространяется на дифференциальные формы.

Пример 8. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Тогда по определению градиента,*

$$(d_{w_0} f)_\sharp = (f'_{x_1}(w_0)\, dx_1 + \ldots + \ldots f'_{x_n}(w_0)\, dx_n)_\sharp = grad\, f(w_0),$$

для всех $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

1.7. **Упражнения на операции d и $\star$ в декартовых координатах.**

Упражнение 18. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкая функция. Тогда*

$$div\, f(w_0) = (\star d \star f^b)(w_0),$$

для всех $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 19. *Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – гладкая функция. Тогда*

$$rot\, f(w_0) = (\star d f^b)_\#(w_0),$$

для всех $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 20. *Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – гладкая функция. Тогда*

$$div\, rot\, f(w_0) = 0,$$

для всех $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 21. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– гладкая функция. Тогда*

$$rot\, grad\, f(w_0) = 0,$$

для всех $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 22. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *– гладкая функция. Тогда*

$$(\Delta f)(w_0) = (div\, grad\, f)(w_0) = (\star d \star df)(w_0),$$

для всех $w_0 \in \mathbb{R}^n$.

Эти упражнения показывают, что основные операторы векторного анализа могут быть явно выписаны в любой системе координат. В самом деле, операции $\flat$, $\#$, $\star$ явно определены для любых форм, и осталось лишь научиться считать $d\omega$ в других координатных системах.

2. Занятие 2. Операции в криволинейных координатах. Потенциал электростатического поля равномерно заряженного шара

2.1. **Координатные системы и базисные формы.** Пусть $F = F(w_1, w_2, w_3)$ – система координат в области $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, то есть гладкое биективное отображение из области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в область $\tilde{\Omega}$. В каждой точке $w \in \Omega$ определены вектора

$$v_1 = (\partial F/\partial w_1)(w), \qquad v_2 = (\partial F/\partial w_2)(w), \qquad v_3 = (\partial F/\partial w_3)(w). \tag{4}$$

Более того, эти вектора образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 23. *Почему вектора* v_1, v_2, v_3 *образуют базис в* $\mathbb{R}^3$*?*

Значит, в каждой точке $w \in \Omega$ определены алгебраические формы порядка 1:

$$\omega_{w,i} : p \mapsto c_{wi}, \qquad p = c_{w1}v_1 + c_{w2}v_2 + c_{w3}v_3, \qquad p \in \mathbb{R}^3.$$

Они порождают дифференциальные формы порядка 1 в области $\tilde{\Omega} = F(\Omega)$:

$$\omega_i : F(w) \mapsto \omega_{w,i}, \qquad w \in \Omega, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Упражнение 24. *Докажите, что формы* ω_1, ω_2, ω_3 *образуют базис в пространстве дифференциальных форм порядка 1 в области* $\tilde{\Omega}$.

Формы ω_1, ω_2, ω_3 называются базисными дифференциальными формами в $\tilde{\Omega}$, отвечающими системе координат F. Система координат называется правильной, если $\det(v_1, v_2, v_3) > 0$ в каждой точке $w \in \mathbb{R}^3$. Все обычные системы координат (цилиндрическая, сферическая, параболическая, ...) – правильные. Система координат F называется ортогональной, если вектора v_1, v_2, v_3 – ортогональны.

Упражнение 25. *Чему равны вектора* v_1, v_2, v_3 *для декартовой системы координат (то есть для тождественного отображения* $F : w \mapsto w$ *из* $\mathbb{R}^3$ *в* $\mathbb{R}^3$*)?*

Упражнение 26. *Докажите, что дифференциальные формы* ω_i *однозначно задаются соотношениями* $\omega_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Пример 9. *Рассмотрим цилиндрическую систему координат. Здесь*

$$\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}, \qquad \tilde{\Omega} = F(\Omega),$$

$$F : (r, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad (r, \varphi, z) \in \Omega,$$

где справа написан вектор в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$. *Эта система – ортогональная. Действительно,*

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и при любых значениях r, φ, z *вектора* v_1, v_2, v_3 *– ортогональны. Вычислим базисные дифференциальные формы* ω_1, ω_2, ω_3, *отвечающие этой системе координат. По определению, в каждой точке* $F(w) \in \tilde{\Omega}$ *форма* ω_i *действует следующим образом:*

$$\omega_i : c_{w1}v_1 + c_{w2}v_2 + c_{w3}v_3 \mapsto c_{wi}.$$

Поскольку v_i *– ортогональны,*

$$[\omega_i(F(w))](p) = \left(p, \frac{v_i}{\|v_i\|^2}\right)_{\mathbb{R}^3}, \qquad p \in \mathbb{R}^3.$$

Если, например, $i = 2$, *то в точке* $w = F(r, \varphi, z)$ *мы получаем*

$$\omega_2(w) : p \mapsto r^{-2}(p, v_2(r, \varphi, z))_{\mathbb{R}^n}, \qquad p \in \mathbb{R}^n.$$

При этом нормированная форма задается формулой

$$\hat{\omega}_2(w) : p \mapsto r^{-1}(p, v_2(r, \varphi, z))_{\mathbb{R}^n}, \qquad p \in \mathbb{R}^n.$$

Упражнение 27. *Докажите, что сферическая система координат* (r, φ, ψ) *является правильной и ортогональной.*

Упражнение 28. *Выпишите вид формы* ω_2, $\hat{\omega}_2$ *для сферической системы координат.*

Наша цель – научиться находить градиент, ротор и дивергенцию отображений, заданных в криволинейных координатах. Введение криволинейных координат бывает очень полезным, когда у изучаемых объектов есть симметрии. Ниже в качестве примера применения этой техники будет разобрано нахождение потенциала электростатического поля равномерно заряженного шара. На первом занятии мы научились выражать градиент, ротор и дивергенцию в терминах $\star$, d, $\sharp$, $\flat$. Осталось понять, как эти операции действуют в криволинейных координатах.

2.2. **Внешний дифференциал в криволинейных координатах.** При вычислении внешнего дифференциала гладкого отображения $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, заданного в криволинейной системе координат соотношением

$$\tilde{f}(F(w)) = f(w), \quad w \in \Omega,$$

используется следующий результат.

Упражнение 29. $(d\tilde{f})(F(w)) = (\frac{\partial}{\partial w_1}f)(w)\omega_1 + (\frac{\partial}{\partial w_2}f)(w)\omega_2 + (\frac{\partial}{\partial w_3}f)(w)\omega_3$

Так как $d^2\omega = 0$, для любой формы ω (в том числе - 0-формы) мы получаем

Упражнение 30. $d\omega_i = 0$ *для любой координатной формы* ω_i.

Замечая, что любая форма ω может быть разложена на базисные и что

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = (d\omega) \wedge \tilde{\omega} + (-1)^k \omega \wedge (d\tilde{\omega}) \tag{5}$$

для любых форм ω, $\tilde{\omega}$ (здесь k – порядок формы ω), мы видим, что предыдущие два упражнения дают рецепт того, как найти дифференциал любой формы в криволинейных координатах.

Пример 10. *Пусть* $\omega = \cos\varphi\,\hat{\omega}_2$, *где* ω_2 *– нормированная базисная форма цилиндрической системы координат. Тогда*

$$d\omega = d(r\cos\varphi\,\omega_2) = (\cos\varphi\omega_1 - r\sin\varphi\omega_2) \wedge \omega_2 + r\cos\varphi d\omega_2 = \cos\varphi\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Пример 11. *Посчитаем градиент гладкого отображения:*

$$grad\,\tilde{f}(F(w)) = (d\tilde{f}(F(w)))_\sharp = \Big((\frac{\partial}{\partial w_1} f)(w)\omega_1 + (\frac{\partial}{\partial w_2} f)(w)\omega_2 + (\frac{\partial}{\partial w_3} f)(w)\omega_3\Big)_\sharp$$
$$= (\frac{\partial}{\partial w_1} f)(w)v_1 + (\frac{\partial}{\partial w_2} f)(w)v_2 + (\frac{\partial}{\partial w_3} f)(w)v_3.$$

Пример 12. *Посчитаем $div\,\tilde{f}$ гладкого отображения $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, считая, что нам известно его разложение в локальной системе координат:*

$$\tilde{f}(F(w)) = f_1(w)\hat{v}_1 + f_2(w)\hat{v}_2 + f_3(w)\hat{v}_3, \qquad w \in \Omega.$$

Для этого запишем

$$\begin{aligned}
div\,\tilde{f}(F(w)) &= \star(d \star \tilde{f}^b)(F(w)) \\
&= \star(d \star [f_1(w)\hat{\omega}_1 + f_2(w)\hat{\omega}_2 + f_3(w)\hat{\omega}_3] \\
&= \star(d[f_1(w)\hat{\omega}_2 \wedge \hat{\omega}_3 + f_2(w)\hat{\omega}_3 \wedge \hat{\omega}_1 + f_3(w)\hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2] \\
&= \star(d[\|v_2\|\|v_3\| f_1(w)\omega_2 \wedge \omega_3 + \|v_3\|\|v_1\| f_2(w)\omega_3 \wedge \omega_1 + \|v_1\|\|v_2\| f_3(w)\omega_1 \wedge \omega_2] \\
&= \star\left[\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\|v_2\|\|v_3\| f_1\right)(w) + \ldots + \frac{\partial}{\partial w_3}\left(\|v_1\|\|v_2\| f_3\right)(w)\right]\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \\
&= \star\frac{\left[\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\|v_2\|\|v_3\| f_1\right)(w) + \ldots + \frac{\partial}{\partial w_3}\left(\|v_1\|\|v_2\| f_3\right)(w)\right]}{\|v_1\|\|v_2\|\|v_3\|}\hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2 \wedge \hat{\omega}_3 \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\|v_2\|\|v_3\| f_1\right)(w) + \frac{\partial}{\partial w_2}\left(\|v_3\|\|v_1\| f_2\right)(w) + \frac{\partial}{\partial w_3}\left(\|v_1\|\|v_2\| f_3\right)(w)}{\|v_1\|\|v_2\|\|v_3\|}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в случае декартовой системы координат $\|v_i\| \equiv 1$, и мы получили привычное выражение для дивергенции.

Упражнение 31. *Найдите выражение для $div\,\tilde{f}$ в цилиндрических координатах.*

Упражнение 32. *Найдите выражение для $rot\,\tilde{f}$ в общих криволинейных ортогональных координатах.*

2.3. **Оператор Лапласа в сферических координатах.** Посчитаем оператор Лапласа в сферических координатах. Для этого заметим, что

$$\Delta\tilde{f} = div\,grad\,\tilde{f},$$

а операторы $grad$ и div мы уже построили.

Упражнение 33. *Докажите, что сферической системе координат r, φ, ψ оператор Лапласа записывается следующим образом:*

$$\Delta\tilde{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}f\right)$$

На практике обычно не вводят специального обозначения $\tilde{f}$, а используют букву f в двух смыслах (как функцию одновременно от декартовых и сферических координат).

Упражнение 34. *Найдите выражение для оператора Лапласа в цилиндрической системе координат r, φ, z.*

2.4. **Уравнение Пуассона. Потенциал поля равномерно заряженного шара.** Пусть F – силовое поле в $\mathbb{R}^n$. Оно называется потенциальным, если существует функция u (потенциал поля), такая, что

$$F = grad\,u.$$

Для потенциальных полей работа поля по перемещению частицы из точки $a \in \mathbb{R}^n$ в точку $b \in \mathbb{R}^n$ вдоль любой траектории равна разности потенциалов в этих точках:

$$\int_{[a,b]} (F(t), \tau(t))\, ds = \int_{[a,b]} (grad\, u(t), \tau(t))\, ds = u(b) - u(a), \tag{6}$$

где τ – единичный касательный вектор кривой $[a, b]$.

Упражнение 35. *Докажите формулу* (10).

Потенциальные поля часто встречаются в жизни – например, таковы электростатические поля (поля, создаваемые системой заряженных частиц и не меняющиеся со временем). Как мы обсуждали на первом занятии, для произвольного поля F характеристика $div\, F$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ отвечает мощности источника поля, находящегося в точке x. Если F – электростатическое поле, $div\, F(x)$ можно отождествить с величиной заряда, находящегося в точке x. Предположим, что нам известно распределение заряда $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ некоторого электростатического поля. Тогда решение уравнения Пуассона

$$div\, grad\, u = q$$

будет совпадать с потенциалом u, создающем электростатическое поле $F = grad\, u$ с заданным распределением зарядов q. Оператор

$$\Delta = div\, grad$$

называется оператором Лапласа. Обычно от решения уравнения $\Delta u = q$ требуют, чтобы оно убывало на бесконечности со скростью $const/\|x\|^{n-2}$ (при $n \geqslant 3$) или было ограничено $const \log |x|$ при $n = 2$. Это связано с вопросами единственности, которые мы здесь не обсуждаем.

Пример 13. *Найдем поле равномерно заряженного шара $B_R \subset \mathbb{R}^3$ радиуса R. В этом примере $q = \chi_{B_R}$ – характеристическая функция шара B_R. На лекциях доказывали общую формулу для решения уравнения Пуассона:*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_0(x - y) q(y)\, dy,$$

где g_0 – фундаментальное решение уравнения Пуассона оператора Лапласа. Если $T \in SO_3$ – ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$, то

$$u(Tx) = \int_{\mathbb{R}^n} g_0(Tx - y) q(y)\, dy = u(x) \tag{7}$$

в силу свойств решения g_0 и того факта, что $|\det T| = 1$. Следовательно, в сферической системе координат $u(x) = f(r)$, где функция f удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \chi_{B_R}.$$

Решая уравнение при $r > R$, $r < R$, мы получаем соответсвенно

$$f_1(r) = \frac{c_1}{r} + c_2, \qquad r > R$$

$$f_2(r) = \frac{r^2}{6} + \frac{c_3}{r} + c_4, \qquad r < R.$$

Из условия на бесконечности получаем $c_2 = 0$. Так как решение должно быть непрерывно (см. явную формулу для него), $c_3 = 0$. Осталось подобрать c_1, c_4 так, чтобы склейка f_1, f_2 получилась непрерывно дифференцируемой:

$$\frac{c_1}{R} = \frac{R^2}{6} + c_4$$

$$-\frac{c_1}{R^2} = \frac{R}{3}$$

Итак, получаем формулу

$$u = \begin{cases} -R^3/3r, & r \geqslant R \\ r^2/6 - R^2/2, & r \leqslant R. \end{cases}$$

Упражнение 36. *Почему в предыдущем примере функция и непрерывно дифференцируема?*

Упражнение 37. *Докажите формулу* (7).

Упражнение 38. *Докажите, что если определить внешний дифференциал на формах* $\omega = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *по правилу*

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

то он будет удовлетворять свойству (8).

Упражнение 39. *Докажите, что внешний дифференциал можно определить аксиоматически, задав его следующими свойствами на гладких формах:*

(*a*) df *– дифференциал* f*, если* f *– нуль-форма,*
(*b*) $d(df) = 0$*, если* f *– нуль-форма,*
(*c*) *выполняется свойство* (8).

Это определение не зависит от выбранной системы координат.

3. Занятие 3. Обобщенные функции

3.1. **Обобщенные функции.** Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $C^\infty(\Omega)$ пространство Фреше, состоящее из гладких функций с инвариантной метрикой, задаваемой следующим образом:

$$\rho(f,g) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|f-g\|_N}{\|f-g\|_N + 1},$$

где

$$\|f\|_N = \sup_{\substack{x \in K_N \\ |\alpha| \leqslant N}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) \right|,$$

а K_N — последовательность вложенных компактов в $\mathbb{R}^n$, в объединении дающих область Ω.

Упражнение 40. *Докажите, что* ρ *– это метрика, а* $C^\infty(\Omega)$ *– пространство Фреше (полное линейное метрическое пространство с инвариантной метрикой).*

Пусть $K \subset \Omega$ — компакт (в топологии $\mathbb{R}^n$). Положим

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} f \subset K\},$$

с метрикой, индуцированной с $C^\infty(\Omega)$. Определим пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ как множество гладких функций с компактным носителем в Ω и топологией $\mathcal{T}$ индуктивного предела:

$$\mathcal{D}(\Omega) = (\cup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{T}).$$

Топология $\mathcal{T}$ определяется базой в нуле, состоящей из выпуклых уравновешенных (если $u \in U$, то $cu \in U$ для любого $c \in \mathbb{C} : |c| = 1$) множеств $U \subset C_0^\infty(\Omega)$, таких что $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ открыто в $\mathcal{D}_K(\Omega)$ для любого компакта $K \subset \Omega$. Упражнения 2-5 ниже достаточно сложны, однако те, кто их сделает, хорошо разберется в смысле происходящего.

Упражнение 41. *Сходимость $f_n \to f$ в $\mathcal{D}(\Omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой компакт K, что $\operatorname{supp} f_n \subset K$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ в $\mathcal{D}_K$.*

Топологическое линейное пространство (X, τ) назовем полным, если для любой последовательности $x_n \in X$ такой, что для любой окрестности нуля $U \in \tau$ при больших номерах n, m имеет место включение $x_n - x_m \in U$, существует элемент $x \in X$ такой, что $x_n \to x$ в топологии τ.

Упражнение 42. *$\mathcal{D}(\Omega)$ — локально выпуклое полное топологическое пространство.*

Упражнение 43. *$C_0^\infty(\Omega)$ с метрикой ρ – неполное метрическое пространство (обратите внимание на носители).*

Упражнение 44. *В пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ нет счётной базы, а потому секвенциальная замкнутость не равносильна замкнутости.*

Распределением или обобщённой функцией называется линейный непрерывный функционал на топологическом пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$. Пространство обобщённых функций со слабой топологией, порожденной тотальным семейством функционалов $\mathcal{D}(\Omega)$, обозначается через $\mathcal{D}'(\Omega)$. Вспоминая функциональный анализ, понимаем, что база окрестностей нуля в $\mathcal{D}'(\Omega)$ состоит из множеств вида

$$V_{A,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : |f(\varphi)| < \varepsilon,\ \varphi \in A\},$$

где $\varepsilon > 0$, а A пробегает все конечные подмножества $\mathcal{D}(\Omega)$. Есть простой тест, позволяющий проверить непрерывность линейного функционала в топологии $\mathcal{D}(\Omega)$.

Упражнение 45. *Линейный функционал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ лежит в $\mathcal{D}'(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset \Omega$ существуют такие числа $N = N(K)$ и $c = c(K)$, что*

$$|f(\varphi)| \leqslant c \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant N} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^\alpha}(x) \right|, \qquad f \in \mathcal{D}_K.$$

Минимальное число $N_0 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, такое, что $N(K) \leqslant N_0$ для всех компактов $K \subset \Omega$ в предыдущем упражнении, называется порядком распределения f.

3.2. **Распределения медленного роста.** Распределение (обощенная функция) медленного роста — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Пространство распределений медленного роста обозначается через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Топология на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ вводится слабым образом: базу окрестностей нуля составляют множества вида

$$V_{A,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : |f(\varphi)| < \varepsilon,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\},$$

где $\varepsilon > 0$, а A пробегает все конечные подмножества $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Упражнение 46. *Имеет место включение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Его нужно понимать следующим образом: если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то сужение $f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Указание: предположите противное и рассмотрите функции φ_N со свойством $|f(\varphi_N)| \geqslant N\|\varphi_N\|_N$.*

3.3. **Примеры распределений.** Вместо $f(\varphi)$ далее будем писать (f, φ). Если $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, то через φ_f будем обозначать функционал

$$\varphi_f : g \mapsto \int_\Omega fg\, dx$$

заданный на $\mathcal{D}(\Omega)$.

Упражнение 47. *Для любой функции $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ имеем $\varphi_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Упражнение 48. *Для любых элементов $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ из равенства $\varphi_f = \varphi_g$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ следует равенство $f = g$ в $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Это два упражнения позволяют не делать разницы между f и φ_f. Так и будем поступать в дальнейшем.

Следующее упражнение показывает, что в случае непрерывности в топологии $S(\mathbb{R}^n)$ линейного функционала, заданного на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, он продолжается на все пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ единственным образом.

Упражнение 49. *Множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $S(\mathbb{R}^n)$.*

Упражнение 50. *Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, то $\varphi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Упражнение 51. $e^x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Упражнение 52. $e^x \sin e^x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$ *для любого* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Упражнение 53. $\delta_0' : \varphi \mapsto \varphi'(0)$ *– распределение медленного роста на $\mathbb{R}^n$ порядка 1.*

Упражнение 54. *Пусть S_R – сфера радиуса R. Функционал $\delta_{S_R} : \varphi \mapsto \int_{S_R} \varphi\, dS$ – распределение медленного роста на $\mathbb{R}^n$ порядка 0.*

Упражнение 55. *Придумайте обощенную функцию порядка $k \in \mathbb{N}$ в Ω.*

Упражнение 56. *Придумайте обощенную функцию бесконечного порядка в Ω.*

Упражнение 57. *Существуют ли распределения медленного роста бесконечного порядка?*

Упражнение 58. *Пусть $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ и мультииндекс α фиксированы. Определим*

$$f\colon \varphi \mapsto 2\varphi(x_0) + 3\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^\alpha}\right)(x_1), \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Каков порядок f?

Упражнение 59. *Определим функционал f по правилу*

$$f\colon \varphi \mapsto p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Докажите, что определение корректно (интеграл в смысле главного значения существует) и $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3.4. **Дифференцирование обощенных функций.** Если $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, а α – мультииндекс, определим функционал $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f$ по следующему правилу:

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f, \varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi\right), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Упражнение 60. $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *для любого мультииндекса α.*

Упражнение 61. *Если $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, то определения $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f$ в старом и новом смысле совпадают (производные определяют одинаковый функционал).*

Упражнение 62. *Пусть θ – функция Хевисайда:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Докажите, что $\theta' = \delta_0$.

Упражнение 63. *Пусть $Z \in C^1(\mathbb{R})$. Докажите, что $(Z\theta)' = Z'\theta + Z(0)\delta_0$.*

Упражнение 64. *Пусть $P = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$ – дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами. Предположим, что существует решение $Z \in C^n(\mathbb{R})$ уравнения $P(Z) = 0$, такое, что $Z^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots n-2$, $Z^{(n-1)}(0) = 1$. Тогда θZ – фундаментальное решение для P, то есть $P(\theta Z) = \delta_0$.*

3.5. **Преобразование Фурье на классе Шварца.** Преобразованием Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называется интеграл

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,t\rangle}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\langle x, t\rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Обратным преобразованием Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ называется интеграл

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,t\rangle}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Преобразование Фурье – гомеоморфизм класса Шварца на себя. Оно продолжатеся до унитарного оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Операторы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ взаимно обратны. Более того, $\mathcal{F}^4$ – тождественный оператор.

Упражнение 65. *Проверьте, что* $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3.6. **Преобразование Фурье на классе распределений медленного роста.** Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразованием Фурье распределения f называется такой линейный функционал $\mathcal{F}f$, что

$$(\mathcal{F}f, \varphi) = (f, \mathcal{F}\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\Omega).$$

Здесь в левой части равенства преобразование Фурье в новом смысле, а справа — в старом. Преобразование Фурье – гомеоморфизм $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ на себя.

Упражнение 66. *Проверьте, что* $\mathcal{F}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Упражнение 67. *Вычислите* $\mathcal{F}(\delta_{S_R})$, *где* S_R *– сфера в* $\mathbb{R}^3$, *распределение* δ_{S_R} *определено в упражнении* (54).

Упражнение 68. *Вычислите* $\mathcal{F}(f)$, *где* f *– распределение из упражнения* (59).

4. Занятие 4. Фундаментальные решения, волновое уравнение

4.1. **Фундаментальные решения.** Пусть $P(D)$ – дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, действующий на гладкие функции в $\mathbb{R}^n$. Тогда $P(D)f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ для любой обощенной функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим уравнение

$$P(D)f = \delta_0.$$

Любое решение этого уравнения называется фундаментальным. Известно, что каждый ненулевой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение (этот глубокий факт называется теоремой Мальгранжа-Эренпрайса). В одномерной ситуации все вытекает из следующих двух упражнений.

Упражнение 69. *Пусть* $Z \in C^1(\mathbb{R})$, θ *– функция Хевисайда. Докажите, что* $(Z\theta)' = Z'\theta + Z(0)\delta_0$.

Упражнение 70. *Пусть* $P = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$ *– дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами. Предположим, что существует решение* $Z \in C^n(\mathbb{R})$ *уравнения* $P(Z) = 0$, *такое, что* $Z^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots n-2$, $Z^{(n-1)}(0) = 1$. *Тогда* θZ *– фундаментальное решение для* P, *то есть* $P(\theta Z) = \delta_0$.

Будем говорить, что K – это носитель распределения $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, если $K \subset \Omega$ – наименьшее по включению замкнутое множество, такое, что $(f, \varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus K$.

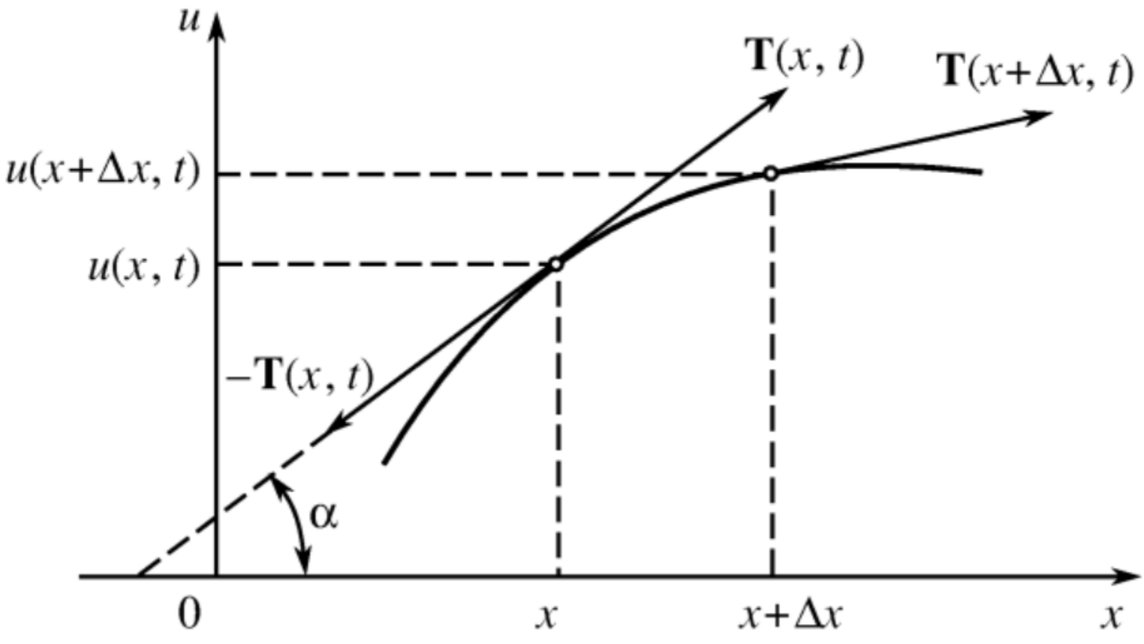

Рис. 1. Колебания струны. Рисунок взят из книги В.С. Владимирова, С.В. Жаринова "Уравнения математической физики".

Пример 14. *Носитель δ_0 совпадает с точкой $\{0\}$. Действительно, $(\varphi, \delta_0) = \varphi(0) = 0$ если $0 \notin \operatorname{supp} \varphi$. Ясно также, что $0 \in \operatorname{supp} \delta_0$, так как $\varphi(0) \neq 0$ для некоторых функций $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Пример 15. *Носитель функции $\theta Z \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ из упражнения 88 лежит на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Действительно, $\theta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, поэтому при интегрировании любой φ: $\operatorname{supp} \varphi \subset (-\infty, 0)$ мы получим 0.*

Пример 16. *Найдем фундаментальное рещение оператора $L = \frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2$. В соответствии с упражнением 88, для этого найдем решение уравнения*

$$Z'' + 3Z' + 2Z = 0, \qquad Z'(0) = 1, \quad Z(0) = 0.$$

Решение ищем в виде $Z = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$. Подставляя в уравнение, получаем следующие условия:

$$\lambda_k^2 + 3\lambda_k + 2 = 0, \qquad c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1, \quad c_1 + c_2 = 0.$$

Получаем два корня $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, откуда $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Итак,

$$\mathcal{E}_0 = \theta(e^{-x} - e^{-2x})$$

– фундаментальное решение для оператора L.

Упражнение 71. *Найдите фундаментальное решение для оператора $L = \frac{d^2}{dt^2} + a^2$. Ответ: $\mathcal{E}_0 = \theta \frac{\sin at}{a}$*

Упражнение 72. *Найдите фундаментальное решение для оператора $L = (\frac{d}{dx} + a)^2$. Ответ: $\mathcal{E}_0 = -\frac{x}{a} e^{-ax}\theta$*

4.2. **Уравнение колебаний струны.** Рассмотрим бесконечную струну, совершающую колебания в плоскости XY под действием внешней силы с плотностью f, направленной в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ вдоль оси OY. Силу натяжения струны будем считать постоянной в любой момент времени t и равной T_0 по норме. Плотность струны в точке x обозначим через $\rho(x)$. Отклонение струны от оси абсцисс в точке x в момент времени t назовем $u(x,t)$. Сумма сил, действующая на участок струны $[x, x+\Delta x]$ равна

$$-T(x,t) + T(x+\Delta x, t) + \int_{[x,x+\Delta x]} f(s,t)\,ds,$$

где $T(x,t)$ – сила натяжения в точке x. Проекция этой силы на ось OY равна

$$-T_0 \sin\alpha(x,t) + T_0 \sin\alpha(x+\Delta x, t) + \int_{[x,x+\Delta x]} f(s,t)\,ds,$$

где α – угол между $T(x,t)$ и осью абсцисс. По второму закону Ньютона, эта сила должна равняться произведению массы участка на его ускорение вдоль оси OY, то есть

$$ma = \int_{[x,x+\Delta x]} \rho(s)\,ds \cdot u''_{tt}(x,t).$$

Следовательно,

$$T_0 \left(\frac{\sin\alpha(x+\Delta x,t) - \sin\alpha(x,t)}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta x} \int_{[x,x+\Delta x]} f(s,t)\,ds = \frac{1}{\Delta x} \int_{[x,x+\Delta x]} \rho(s)\,ds \cdot u''_{tt}(x,t).$$

После перехода к пределу получаем

$$T_0 \cos\alpha(x,t) \cdot \alpha'_x(x,t) + f(x,t) = \rho(x) u''_{tt}(x,t)$$

С точностью до члена второго порядка $\alpha^2(x,t)$ имеют место соотношения $\cos\alpha(x,t) = 1$,

$$\alpha(x,t) = \tan\alpha(x,t) = u'_x(x,t), \qquad \alpha'_x(x,t) = u''_{xx}(x,t).$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\rho(x) u_{tt}(x,t) - T_0 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u'_t(x,0) = u_1(x)$$

где u_0 – положение струны в начальный момент времени, u_1 – сила, действующая на струну в момент времени $t = 0$. Если струна сделана из однородного материала и натянута с единичной силой, то данное уравнение сводится к уравнению

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad u'_t(x,0) = u_1(x),$$

где $a > 0$ – некоторая постоянная.

Пример 17. *Найдем фундаментальное решение для оператора $L = u_{tt} - a^2 u_{xx}$. Для этого применим преобразование Фурье относительно x к обеим частям уравнения*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta_0(x,t)$$

Для $\tilde{u} = \mathcal{F}_x u$ получим

$$\tilde{u}_{tt}(\xi,t) + a^2\xi^2 \tilde{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_0(t).$$

Фиксируя ξ, применим результат упражнения 98. Получим

$$\tilde{u}(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \theta(a|\xi|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi} \theta(t).$$

Вспомним, что

$$\mathcal{F}\chi_{[-r,r]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{r} e^{isx}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{isx}}{ix}\Big|_{-r}^{r} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin rx}{x}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье по ξ, получим

$$\mathcal{E}_0(\xi,t) = \frac{1}{2a} \chi_{[-at,at]}(x)\theta(t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Для того, чтобы превратить аргументы, использованные в предыдущем примере, в доказательство, требуется некоторая работа. Мы поступим иначе и сделаем следующее упражнение.

Упражнение 73. *Проверьте по определению, что* $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|)$ *– фундаментальное решение для оператора струны* $L = u_{tt} - a^2 u_{xx}$.

Упражнение 74. *С помощью преобразования Фурье постройте фундаментальное решение для оператора Даламбера* $L = u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$. *Ответ:* $\mathcal{E}_0 = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$, *где* S_R *– сфера радиуса* R.

4.3. **Обощенная задача Коши.** Начнем с простого примера.

Пример 18. *Пусть* u *– непрервно дифференцируемая функция на на* $\mathbb{R}_+$, $u(x) = 0$ *при* $x < 0$. *Тогда*

$$u'(x) = u(0)\delta_0 + u'_c(x)$$

где классическая производная u'_c *считается равной нулю в точках, где она не существует (то есть в точке* $x = 0$*), а в остальных точках вычисляется по обычному правилу. Действительно,*

$$(u', \varphi) = -(u, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}_+} u\varphi' = u(0)\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}_+} u'_c\varphi = u(0)\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} u'_c\varphi,$$

что доказывает утверждение.

Посмотрим, как модифицировать волновое уравнение, чтобы оно учитывало начальные условия.

Упражнение 75. *Пусть* u *– классическое решение волнового уравнения* $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $u(0,x) = u_0(x)$, $u'_t(0,x) = u_1(x)$. *Положим* $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)$ *при* $t \geqslant 0$ *и* $u(t,x) = 0$ *при* $t < 0$. *Тогда* $\tilde{u}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\tilde{u}''_{tt}(x,t) - a^2\tilde{u}''_{xx}(x,t) = f(x,t) + u_0(x)\delta'_0(t) + u_1(x)\delta_0(t).$$

Упражнение 76. *Пусть* $f \in C$, $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$, *и пусть*

$$u = \mathcal{E}_0 * f(x,t) + u_0(x)\delta'_0(t) + u_1(x)\delta_0(t).$$

Тогда

$$u = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)),$$

то есть функция u *удовлетворяет классической формуле Даламбера решения волнового уравнения.*

4.4. **Упражнения для лучшего понимания теории распределений.**

Упражнение 77. *Если* f *– распределение конечного порядка с компактным носителем, то* f *– конечная сумма производных мер с компактным носителем. Указание: рассмотрите случай, когда порядок* f *равен нулю. Воспользуйтесь теоремой Рисса-Маркова.*

Упражнение 78. *Докажите, что любая функция* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *есть предел в* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *последовательности функций вида* $\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, *где* $\varphi_{1,2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Упражнение 79. *Пусть* $v \in C^1[0,\infty)$, *и пусть* v_{odd}, v_{even} *– продолжения этой функции на всю ось четным и нечетным образом. Найдите* v'_{odd}, v'_{even} *в терминах теории распределений.*

5. Занятие 5. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

5.1. **Прямое произведение распределений.** Прямое произведение распределений $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ определяется по формуле

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) = (f, (g(y), \varphi(x, y)), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}).$$

Можно показать, что формула задает линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, то есть распределение $f \times g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Упражнение 80. *Множество функций вида $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, плотно в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$. Указание: рассмотрите функции вида $P(x, y)\eta_n(x)\eta_m(y)$ – где P – многочлен, $\eta_{n,m}$ – гладкий спуск с единицы.*

Заметим, что для любых $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ имеет место равенство

$$(f \times g, \varphi(x)\psi(y)) = (f, \varphi)(g, \psi) = (g \times f, \varphi(x)\psi(y)), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m).$$

Упражнение 81. *Lля любых распределений $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ имеет место равенство $f \times g = g \times f$.*

5.2. **Свертка распределений.** Формула для свертки функций подсказывает нам такое определение свертки распределений $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(f * g, \varphi) = ((f \times g)(x, y), \varphi(x + y)).$$

Проблема в том, что в общем случае функция $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ не лежит в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$. Естественно гладко срезать $\varphi(x + y)$ на большой компакт, применить $f \times g$ и перейти к пределу. Будем говорить, что $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – последовательность, сходящаяся к единице в $\mathbb{R}^n$, если функции η_k со всеми своими производными равномерно ограничены и для любого компакта K существует N, такое, что выполняется равенство $\eta_k(x) = 1$, $x \in K$, $k \geqslant N$. Сверка распределений определяется как предел

$$\lim_{k\to\infty}((f \times g)(x, y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y))$$

в случае, если этот предел существует для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и любой последовательности η_k, сходящейся к единице в $\mathbb{R}^{2n}$ (можно показать, что в этом случае предел определяет линейный непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то есть является распределением).

Упражнение 82. *Свертка распределений $f * g$ существует тогда и только тогда, когда существует свертка $g * f$, причем $f * g = g * f$.*

Вспомним, что K – это носитель распределения $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, если $K \subset \Omega$ – наименьшее по включению замкнутое множество, такое, что $(f, \varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \setminus K$.

Пример 19. *Носитель распределения δ_{S_R}, от которого мы считали преобразование Фурье, равен S_R. Действительно, $\int_{S_R}\varphi = 0$ для любой функции $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ тогда и только тогда, когда $K = S_R$.*

Пример 20. *Производные обобщенных функций не увеличивают их носители. Действительно, $(\operatorname{supp} D^\alpha f, \varphi) = 0$ для любой для любой $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Таким образом, $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$.*

Упражнение 83. *Если $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и функция $\psi \in C^\infty(\Omega)$ равна единице в окрестности $\operatorname{supp} f$, то $\psi f = f$.*

Пример 21. *Если носитель $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – компактен, то $f * g$ существует для любой обобщенной функции $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Чтобы убедится в этом, возьмем $\varphi \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$, обозначим через K_f, K_φ компакты, содержащие некоторые окрестности носителей $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} \varphi$, соответственно, и рассмотрим множество*

$$K = \{(x,y) : x \in K_f\} \cap \{(x,y) : x + y \in \operatorname{supp} K_\varphi\} = \{(x,y) : x \in K_f, y \in K_\varphi - K_f\}.$$

Ясно, что K – компакт. С другой стороны, если η – гладкий спуск с K, $\eta_{\operatorname{supp} f}$ – гладкий спуск с единицы с $\operatorname{supp} f$ с носителем в K_f, а η_k – последовательность из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, сходящаяся к единице, то

$$(f \times g, \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f \times g, \eta_{\operatorname{supp} f}(x)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f \times g, \eta_K(x,y)\varphi(x+y))$$

при больших k (столь больших, что $\eta_k = 1$ на носителе η_K). Следовательно, свертка $f * g$ существует.

Упражнение 84. *Если $\operatorname{supp} f_{1,2} \subset [0, +\infty)$, то существует $f_1 * f_2$. Как обобщить это условие для $\mathbb{R}^n$?*

Упражнение 85. *Равенство $f * \delta_0 = f$ справедливо для любого $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Упражнение 86. *Если существует свертка $f * g$, то для любого мультииндекса α существуют свертки $D^\alpha f * g$, $f * D^\alpha g$, причем*

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g.$$

Указание: если η_k сходится к единице, то $\eta_k(x,y) + \eta'_{x_i}(x,y)$ также сходится к единице. В частности, последовательность $\eta'_{x_i}(x,y)$ сходится к нулю в подходящем смысле.

Упражнение 87. *Если $\mathcal{E}_0$ – фундаментальное решение для оператора L и существует свертка $f * \mathcal{E}_0$, то $L(f * \mathcal{E}_0) = f$.*

Вспомним, как находить фундаментальные решения для одномерных дифференциальных операторов:

Упражнение 88. *Пусть $P = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$ – дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами. Предположим, что существует решение $Z \in C^n(\mathbb{R})$ уравнения $P(Z) = 0$, такое, что $Z^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots n-2$, $Z^{(n-1)}(0) = 1$. Тогда $\mathcal{E}_0 = \theta Z$ – фундаментальное решение для P, то есть $P(\mathcal{E}_0) = \delta_0$.*

Оказывается, что найденное фундаментальное решение – единственное, обладающее свойством $\operatorname{supp} \mathcal{E}_0 \subset \mathbb{R}_+$.

Упражнение 89. *В упражнении 88 распределение $\mathcal{E}_0$ – единственное фундаментальное решение с носителем на $\mathbb{R}_+$ для оператора L. Указание: $\mathcal{E}_0 = \delta_0 * \mathcal{E}_0$.*

Пример 22. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in L^1(\mathbb{R})$, $u_0 \in C(\mathbb{R})$ – функции с компактным носителем, и пусть*

$$u = \mathcal{E}_0 * (f(x,t) + u_0(x)\delta_0'(t) + u_1(x)\delta_0(t)),$$

где $\mathcal{E}_0$ – фундаментальное решение для волнового уравнения (здесь $u_0(x)\delta_0'(t) = u_0(x) \times \delta_0'(t)$, $u_1(x)\delta_0(t) = u_1(x) \times \delta_0(t)$, кроме того, мы продолжили f нулем при $t < 0$). Тогда

$$u = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,t)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}(u_0(x+at) + u_0(x-at)),$$

то есть функция и удовлетворяет классической формуле Даламбера решения волнового уравнения. Проверим этот факт в случае, когда $u_0 = u_1 = 0$. По определению, мы должны взять $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и посчитать

$$(\mathcal{E}_0 * f, \varphi) = \lim_{k\to\infty}(\mathcal{E}_0(t,x) \times f(s,y), \eta_k((x,t),(y,s))\varphi(x+y, s+t)),$$

то есть

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{E}_0(x,t)f(y,s)\eta_k((x,t),(y,s))\varphi(x+y,s+t)\,dxdtdyds$$

Вспоминая, что $\mathcal{E}_0=\frac{1}{2a}\theta(at-|x|)$ *обращается в ноль при* $|x|>at$, *а* f, φ *имеют компактный носитель, получаем, что последний предел существует и равен*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{E}_0(x,t)f(y,t)\varphi(x+y,s+t)\,dxdtdyds,$$

где подынтегральное выражение обнуляется вне компакта в $\mathbb{R}^4$. *Мы хотим записать это выражение в виде*

$$(G,\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}G(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

для некоторой функции G. *Для этого сделаем замену переменных* $x=\xi-y$, $t=\tau-s$:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{E}_0(\xi-y,\tau-s)f(y,s)\varphi(\xi,\tau)\,dydsd\xi d\tau.$$

Иными словами,

$$\begin{aligned}G(\xi,\tau)&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{E}_0(\xi-y,\tau-s)f(y,s)\,dyds,\\&=\frac{1}{2a}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}}\theta(a(\tau-s)-|\xi-y|)f(y,s)\,dyds,\\&=\frac{1}{2a}\int_0^\tau\int_{\xi-a(\tau-s)}^{\xi+a(\tau-s)}f(y,s)\,dyds\end{aligned}$$

– так же, как и в формуле Даламбера. Подставляя вместо f *распределение* $u_0(x)\delta_0'(t)+u_1(x)\delta_0(t)$, *легко эвристически проверить формулу для оставшихся двух членов. Затем можно строго доказать ее.*

Упражнение 90. *Рассмотрите случай, в котором* $f=0$, $u_1=0$.

Упражнение 91. *Рассмотрите случай, в котором* $f=0$, $u_0=0$.

Упражнение 92. *Найдите решение (в виде явной формулы) уравнения волнового уравнения на* $\mathbb{R}$ *для* $u_1=\delta_{-1}(x)+\delta_1(x)$, $u_0=0$. *Каков физический смысл этого решения? (при каких физических условиях струна поведет себя таким образом?)*

Упражнение 93. *Для волнового уравнения (*$t\in\mathbb{R}_+$, *оператор Лапласа по переменной* $x\in\mathbb{R}^3$*)*

$$u_{tt}-a^2\Delta u(x,t)=f(x,t),\qquad u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t'(x,0)=u_1(x)$$

обобщенная задача Коши ставится в виде

$$u_{tt}-a^2\Delta u(x,t)=f(x,t)+u_0(x)\delta_0'(t)+u_1(x)\delta_0(t),$$

где $f(x,t)$ *продолжено нулем при* $t<0$. *Докажите, что классическое решение волнового уравнения решает обобщенную задачу в смысле распределений.*

Упражнение 94. *Докажите формулу Кирхгофа*

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi^2a^2t}\int_{|\xi-x|=at}u_1\,dS$$

для классической задачи Коши волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ *в случае* $f=u_0=0$, *отталкиваясь от формулы для фундаментального решения:*

$$\mathcal{E}_0(x,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi a^2t}\delta_{S_{at}}(x),\qquad S_R=\{x\in\mathbb{R}^3:\|x\|=1\}.$$

Упражнение 95. *Выведите формулу Кирхгофа для классической задачи Коши волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ в случае $f = u_1 = 0$ и в случае $u_0 = u_1 = 0$.*

6. Занятие 6. Метод бегущих волн для волнового уравнения

6.1. **Метод отражений/метод бегущих волн.** Формула Даламбера,

$$u = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}(u_0(x+at)+u_0(x-at)),$$

которую мы уже вывели с вомощью обобщенных функций, показывает, что решение волнового уравнения на всей оси всегда можно представить в виде

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) \tag{8}$$

для некоторых функций f, g на $\mathbb{R}$. Они интерпретируются как уходящая (влево) и приходящая (слева) бегущие волны. В классическом случае (когда все производные существуют и понимаются в обычном смысле) формулу Даламбера можно вывести из представления (8) и начальных условий $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t'(x,0) = u_1(x)$:

Упражнение 96. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклая область, и пусть $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ для некоторой функции $u \in C^2(\Omega)$. Тогда если $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, то функция $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ в соответствующей области удовлетворяет уравнению $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, то есть имеет вид $\tilde{u} = f(\xi) + g(\eta)$ для некоторых функций f, g.*

Упражнение 97. *Выведите из предыдущего упражнения представление Даламбера для решения одномерного волнового уравнения на $\mathbb{R}$,*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

при условиях $u \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$.

Представление (8) оказывается очень полезным, когда волновое уравнение решается на полуоси или на интервале. В первом случае к начальным условиям добавляются одно краевое, описывающее поведение левого конца струны:

Упражнение 98. *Решить уравнение*

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 16t^2, \quad u(x,0) = x^4/6, \;\; u_t(x,0) = 2\sin x, \;\; u(0,t) = 4t^4, \;\; x \geqslant 0, \; t \geqslant 0.$$

Ответ: $u(x,t) = 4t^4 + 4t^2x^2 + \frac{x^4}{6} + \sin 2t \sin x$.

Упражнение 99. *Решить уравнение*

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt, \quad u(x,0) = x^3, \;\; u_t(x,0) = 0, \;\; u(0,t) = t^3, \;\; x \geqslant 0, \; t \geqslant 0.$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{2}(x+2t)^3 + \frac{1}{2}(x-2t)^3 + xt^3$ *при* $x \geqslant 2t$, $u(x,t) = \frac{1}{2}(x+2t)^3 + \frac{3}{8}(x-2t)^3 + xt^3$ *при* $x < 2t$.

Метод бегущих волн можно "алгоритмизировать" следующим образом.

Пример 23. *Найдем решение волнового уравнения для полубесконечной струны с закрепленным левым концом:*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u(0,t) = 0, \qquad x,t \in \mathbb{R}_+,$$

при условиях $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0$. Рассмотрим область $\Omega = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Как мы выяснили, решение волнового уравнения в этой области должно иметь вид (8). Попытаемся найти функции f, g исходя из начально-краевых условий. Из условия $u(0,t) = 0$ следует, что

$$f(at) + g(-at) = 0,$$

то есть

$$u(x,t) = f(x+at) - f(-(x-at)), \qquad x \geqslant 0.$$

для некоторой функции f на $\mathbb{R}$. В частности, если решение существует, то $u(x,0) = f(x) - f(-x)$ продолжается на $\mathbb{R}_-$ как нечетная функция по x. Аналогично, производная $u_t(x,0) = af'(x) - af'(-x)$ продолжается на $\mathbb{R}_-$ как нечетная функция по x. Это мотивирует нас продолжить u_0, u_1 нечетным образом на $\mathbb{R}_-$ (начальные условия позволяют нам это сделать с сохранением гладкости!). Обозначим продолжение через $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{u}_0(x)$, $\tilde{u}_1(x)$. Заметим, что

$$\tilde{u}(x,t) = f(x+at) - f(-(x-at)), \quad u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Эту задачу мы уже умеем решать (см. упражнение 96), ответ дается формулой Даламбера:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(s)\,ds. \tag{9}$$

Легко проверить, что сужение $\tilde{u}(x,t)$ обратно на $\mathbb{R}_+$ (по x) решает исходную задачу.

Стоит отметить, что несмотря на конкретику процедуры, описанной выше, при решении задач с явными функциями проще действовать так же, как мы действовали при решении упражнений 98 и 99 (записывать решение в виде бегущих волн и находить неизвестные функции f, g). Вот еще задача и пример на ту же тему.

Упражнение 100. *Доказать, что задача*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \quad u(0,t) = \psi(t), \qquad x,t \in \mathbb{R}_+,$$

имеет единственное решение $u = \theta(at-x)\psi(t-x/a)$ если $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и выполняются условия $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0$.

Пример 24. *Докажем, что задача колебания струны с двумя закрепленными концами*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \ \ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \ \ 0 \leqslant x \leqslant \ell,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

имеет единственное решение вида (9) (при этом на функции u_0, u_1 накладываются следующие условия: $u_0(0) = u_0(\ell) = u_1(0) = u_1(\ell) = u_0''(0) = u_0''(\ell) = 0$, $u_0 \in C^2[0,\ell]$, $u_1 \in C^1[0,\ell]$). Для этого запишем общий вид решения волнового уравнения

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

Из ограничений на переменные $x \in [0,\ell]$, $t \in \mathbb{R}_+$ видно, что функция f определена на $\mathbb{R}_+$, а функция g – на множестве $(-\infty,\ell]$. Если решение, удовлетворяющее краевым условиям, существует, то

$$f(\xi) = -g(-\xi), \qquad f(\ell+\xi) = -g(\ell-\xi), \qquad \xi \geqslant 0.$$

Функции f, g, входящие в эти два уравнения допускают единственное продолжение $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ на всю вещественную ось с выполнением условий

$$\tilde{f}(\xi) = -\tilde{g}(-\xi), \qquad \tilde{f}(\ell+\xi) = -\tilde{g}(\ell-\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

В самом деле, первое уравнение продолжает f на множество $[-\ell,0]$, затем второе уравнение продолжает g на $[\ell,3\ell]$, затем первое уравнение продолжает f на множество $[-3\ell,-\ell]$, затем второе уравнение продолжает g на множество $[3\ell,5\ell]$ – и т.д. Так как каждый раз при продолжении не возникает свободы выбора, это гарантирует единственность. В то же время, процедура продолжения доопределяет функции f,g каждый раз на новых множествах, и доопределение функций не приводит к нарушению (10) на старых множествах изменения параметров. В частности, условия (10) будут выполнятся на всей вещественной оси. Рассмотрим теперь функцию

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{f}(x+at) + \tilde{g}(x-at) = \tilde{f}(x+at) - \tilde{f}(-(x-at)), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Заметим, что

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и что

$$\tilde{f}(\ell+\xi) = -\tilde{g}(\ell-\xi) = -\tilde{g}(-(\xi-\ell)) = \tilde{f}(\xi-\ell),$$

откуда следует, что

$$\tilde{u}(x+\ell,0) = \tilde{f}(x+\ell) - \tilde{f}(-(x-\ell)) = \tilde{f}(x-\ell) - \tilde{f}(-(x+\ell)) = u(x-\ell,0).$$

Значит, функция $\tilde{u}(x,0)$ – нечетна и 2ℓ-периодична. Продолжим u_0 нечетным и 2ℓ-периодическим образом на $\mathbb{R}$. Обозначим продолжение через $\tilde{u}_0$. Тогда

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично,

$$\tilde{f}'(\xi) = -\tilde{g}'(-\xi), \qquad \tilde{f}'(\ell+\xi) = -\tilde{g}'(\ell-\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Значит, функция

$$\tilde{u}_t(x,0) = a\tilde{f}'(x) - a\tilde{f}'(-x)$$

является нечетной и 2ℓ-периодической. В частности, если мы продолжим u_1 нечетным и 2ℓ-периодическим образом, то для продолжения $\tilde{u}_1$ будет выполнятся

$$\tilde{u}_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Итак, для продолжения $\tilde{u}$ выполняются следующие условия:

$$\tilde{u}_{tt} - a^2\tilde{u}_{xx} = 0, \quad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \;\; \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{u}_1(x).$$

Значит, $\tilde{u}(x,t)$ имеет вид (9), где начальные данные $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ определены на всей оси и полученны следующим образом: $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ – 2ℓ-периодические нечетные функции совпадающие с u_0, u_1 на $[0,\ell]$. На функции u_0, u_1 накладываются следующие условия: $u_0(0) = u_0(\ell) = u_1(0) = u_1(\ell) = u_0''(0) = u_0''(\ell) = 0$, $u_0 \in C^2[0,\ell]$, $u_1 \in C^1[0,\ell]$. Сужая и обратно на $[0,\ell]\times\mathbb{R}_+$, мы получаем решение исходной задачи в виде (9) с $u(x,t)$ в левой части.

Упражнение 101. *Доказать, что задача колебания струны с двумя свободно скользящими концами,*

$$u_{tt}-a^2u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(0,x) = u_1(x), \;\; u_x'(0,t) = u_x'(\ell,t) = 0, \;\; 0 \leqslant x \leqslant \ell, \; t \in \mathbb{R}_+,$$

имеет единственное решение вида (9). При этом оно отвечает начальным данным $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ на всей оси, полученным следующим образом: $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ – 2ℓ-периодические четные функции совпадающие с u_0, u_1 на $[0,\ell]$. На функции u_0, u_1 накладываются следующие условия: $u_0'(0) = u_1'(0) = u_0'(\ell) = u_1'(\ell) = 0$, $u_0 \in C^2[0,\ell]$, $u_1 \in C^1[0,\ell]$.

Вот задача для тренировки дома:

Упражнение 102. *Решить задачу*

$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad u(x,0) = x + \cos x, \quad u_t'(x,0) = 1, \quad u_x'(0,t) = 1, \quad t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0.$$

Ответ: $x + t + t^2 + \cos x \cos t$.

Больше про метод отражения и его физическую интерпретацию можно прочитать в книге *Владимиров В.С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов* (страница 189 и далее). Задачи можно брать из параграфа 21 задачника *Сборник задач по уравнениям математической физики. Под ред. В. С. Владимирова. Физматлит, 2001.*

7. Контрольная работа. Вариант 1

Задача 1. Найдите $(\star(df))(e_1, e_2)$ в точке p для функции $f(x, y, z) = z \sin x + y^2$ на векторах e_i, заданных в стандартном базисе,

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите выражение для оператора $\operatorname{div} \tilde{f}$ в координатной системе F,

$$\begin{cases} x = \cosh \tau \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \cosh \tau \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \operatorname{sh} \tau \sin \theta, \end{cases} \qquad \tau \in (0, +\infty), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Поле $\tilde{f}$ считается заданным в локальном нормированном базисе $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ системы координат F, то есть известно разложение $f(w) = \tilde{f}(F(w)) = f_1(w)\hat{v}_1 + f_2(w)\hat{v}_2 + f_3(w)\hat{v}_3$ в каждой точке $w \in (0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$.

Задача 3. Найдите любое фундаментальное решение для оператора $f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} - 16f$. Проверьте по определению, что найденная функция – действительно фундаментальное решение.

Задача 4. Докажите, что для любых двух распределений $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ с носителем в квадранте $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определена свертка $f * g$.

Задача 5. Докажите, что задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(0, x) = 0, \quad u(0, t) = \psi(t), \qquad x, t \in \mathbb{R}_+,$$

имеет единственное решение $u = \theta(at - x)\psi(t - x/a)$ если $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и выполняются условия $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0$.

Задача 6. Найдите решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} - 4u \ \ (0 < x < 1); \quad u(0, t) = u(1, t) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = x^2 - x.$$

8. Контрольная работа. Вариант 2

Задача 1. Докажите, что для гладкого отображения $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет место равенство
$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = (\star(df^b))_{\#}.$$

Задача 2. Найдите выражение для оператора $\operatorname{rot} \tilde{f}$ в произвольной правильной ортогональной системе координат $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Поле $\tilde{f}$ считается заданным в локальном нормированном базисе $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ системы координат F, то есть известно разложение $f(w) = \tilde{f}(F(w)) = f_1(w)\hat{v}_1 + f_2(w)\hat{v}_2 + f_3(w)\hat{v}_3$ в каждой точке $w \in \Omega$.

Задача 3. Найдите любое фундаментальное решение для оператора $f \mapsto \frac{d^2 f}{dx^2} + 16f$. Проверьте по определению, что найденная функция – действительно фундаментальное решение.

Задача 4. Докажите, что для любого распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ порядка 1 с компактным носителем существует комплекснозначная мера с μ компактным носителем и конечной вариацией, такая, что $f = \mu'$ (производная берется в смысле распределений). Указание: используйте теорему об общем виде линейных непрерывных функционалов на $C(K)$.

Задача 5. Найдите решение следующей задачи:
$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad u(x,0) = x + \cos x, \quad u'_t(x,0) = 1, \quad u'_x(0,t) = 1, \quad t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0.$$

Задача 6. Найдите решение следующей смешанной задачи:
$$u_{tt} + u_t = u_{xx} \ \ (0 < x < 1); \quad u(0,t) = t, \quad u(1,t) = u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1 - x.$$
Указание: рассмотрите функцию $u - t(1-x)$.

9. Контрольная работа. Вариант 3

Задача 1. Докажите, что для любого гладкого отображения $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет место равенство $\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$. Можно использовать выражения для div, rot в терминах дифференциальных форм.

Задача 2. Найдите выражение для оператора Лапласа $\Delta\tilde{f}$ в цилиндрической системе координат

$$F(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Задача 3. Докажите, что распредение $f = (x^2+1)\cdot(|x-1|)''$ лежит в классе $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и найдите его значение на тестовой функции e^{-x^2}.

Задача 4. Определим функционал f по правилу

$$f\colon \varphi \mapsto p.v.\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Докажите, что определение корректно (интеграл в смысле главного значения существует) и $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Задача 5. Докажите, что задача колебания струны с двумя свободно скользящими концами,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(0,x) = u_1(x), \;\; u'_x(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0, \;\; 0 \leqslant x \leqslant \ell, \; t \in \mathbb{R}_+,$$

имеет единственное решение вида

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(s)\,ds.$$

При этом оно отвечает начальным данным $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ на всей оси, полученным следующим образом: $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$ – 2ℓ-периодические четные функции совпадающие с u_0, u_1 на $[0,\ell]$. На функции u_0, u_1 накладываются следующие условия: $u'_0(0) = u'_1(0) = u'_0(\ell) = u'_1(\ell) = 0$, $u_0 \in C^2[0,\ell]$, $u_1 \in C^1[0,\ell]$.

Задача 6. Найдите решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} + x \;\; (0 < x < \pi); \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

10. Контрольная работа. Вариант 4

Задача 1. Докажите, что для любого гладкого отображения $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет место равенство $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. Можно использовать выражения для grad, rot в терминах дифференциальных форм.

Задача 2. Найдите $\star d\omega$ в цилиндрической системе координат

$$F(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

для формы $\omega = \varphi z\, d\hat{\omega}_1 + rz\, d\hat{\omega}_2 + r\varphi\, d\hat{\omega}_3$.

Задача 3. Докажите, что распределение $f = (x^2+1)\cdot(|x-1|)''$ лежит в классе $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и найдите его значение на тестовой функции e^{-x^2}.

Задача 4. Определим функционал f по правилу

$$f\colon \varphi \mapsto p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - x\varphi'(x)}{x^3}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Докажите, что определение корректно (интеграл в смысле главного значения существует) и $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Задача 5. Решите задачу

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad u_x(x,0) = \cos t.$$

Задача 6. Найдите решение следующей смешанной задачи:

$$u_{tt} = u_{xx} + x \ \ (0 < x < \pi); \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x,0) = 0.$$